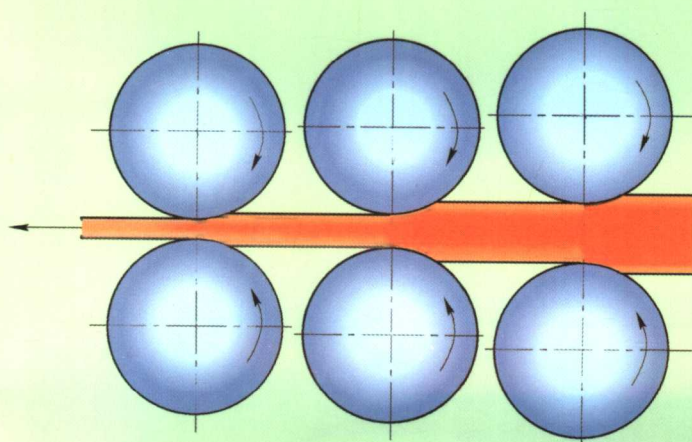


高等学校规划教材
GAODENG XUEXIAO GUIHUA JIAOCAI

轧制理论

张小平 秦建平 主编



冶金工业出版社

<http://www.cnmp.com.cn>

高等学校规划教材

轧 制 理 论

张小平 秦建平 主编

北 京

冶 金 工 业 出 版 社

2006

内 容 简 介

轧制理论是轧钢机械设计与轧钢工艺专业的主要课程,它的任务是为轧钢机械设计与轧制过程分析、研究建立必要的专业理论基础。

全书共四篇 18 章。第 1 篇塑性变形的力学基础,包括应力和应变,变形力学方程,塑性变形抗力;第 2 篇塑性变形的计算方法,包括确定表面压力的工程计算方法,滑移线理论及应用,极值原理及上限法,数值计算法,人工智能在轧制过程中的应用;第 3 篇纵轧理论,包括轧制过程的基本概念,实现轧制过程的条件,轧制过程中的宽展,轧制过程中的前滑和后滑,轧制过程力能参数的计算,不对称轧制理论,钢管成形纵轧理论;第 4 篇其他轧制方式的基本理论,包括钢管成形斜轧理论,环件轧制理论,楔横轧理论。

本书是一部特色鲜明的轧制理论教材,可以作为高等院校相关专业本、专科学生的教学用书,也可供研究生和从事轧钢专业的研究人员与工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

轧制理论/张小平等主编. —北京:冶金工业出版社, 2006. 11

高等学校规划教材

ISBN 7-5024-4123-9

I. 轧… II. 张… III. 轧制—高等学校—教材 IV. TG33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 133631 号

出 版 人 曹胜利 (北京沙滩嵩祝院北巷 39 号, 邮编 100009)

责任编辑 张 卫 (联系电话: 010-64027930; 电子信箱: bull2820@sina.com)

张爱平 (联系电话: 010-64027928; 电子信箱: zaptju99@163.com)

美术编辑 李 心 责任校对 刘 倩 王贺兰 李文彦 责任印制 牛晓波

北京兴华印刷厂印刷; 冶金工业出版社发行; 各地新华书店经销

2006 年 11 月第 1 版, 2006 年 11 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16; 22.75 印张; 605 千字; 349 页; 1-3000 册

42.00 元

冶金工业出版社发行部 电话: (010)64044283 传真: (010)64027893

冶金书店 地址: 北京东四西大街 46 号 (100711) 电话: (010)65289081

(本社图书如有印装质量问题, 本社发行部负责退换)

前 言

轧制理论是轧钢机械设计专业与轧钢工艺专业的主要课程, 是进行轧钢机械设计与轧制过程分析和研究的专业理论基础。

本书按照轧钢机械与轧钢工艺专业培养目标的教學要求, 是在总结作者多年专业教学和科研经验的基础上编写而成的。编写中参考了目前所使用的各类轧制理论的教材与专著, 吸收了国内外轧制理论研究的最新成果, 其中的数值算法中的条元法、人工智能在轧制过程中的应用、斜轧理论、环件轧制理论、楔横轧理论等内容反映了我国学者对轧制理论的重大贡献。本书是一部特色鲜明的轧制理论教材, 可以作为高等院校相关专业本、专科学生的教学用书, 也可以作为研究生和从事轧钢专业的研究及工程技术人员的参考书。

本书在编写过程中得到了国内很多著名学者的大力支持, 尤其要感谢胡正寰院士、王国栋院士、李连诗教授、刘宏民教授、王廷溥教授、华林教授的大力支持。本书第1章由秦建平教授编写, 第2章~第6章由郭拉凤老师编写, 第7章~第14章、第18章由张小平教授编写, 第15章、第16章由双远华教授编写, 第17章由周存龙副教授编写。全书由张小平教授统稿, 李国祯教授审定。由于作者水平所限, 时间比较仓促, 书中不妥之处, 敬请读者批评指正。

张小平
2006年9月

目 录

第 1 篇 塑性变形的力学基础

1 应力和应变	1
1.1 内力和应力	2
1.1.1 外力和内力	2
1.1.2 应力	2
1.2 应力状态和应力图示	3
1.3 斜面上的应力及应力边界条件	4
1.4 主应力与应力常量	6
1.4.1 主应力及应力张量的不变量	6
1.4.2 应力状态的几何图示	7
1.5 应力张量的分解	11
1.6 位移与应变	13
1.6.1 位移分量及转动分量	13
1.6.2 应变分量	14
1.6.3 单位相对位移张量及应变张量	15
1.7 主应变及应变张量不变量	18
1.8 体积应变及不可压缩性条件	19
1.9 应变张量的分解	20
1.10 等效应力和等效变形	21
1.10.1 八面体应力和八面体应变	21
1.10.2 等效应力和等效应变	22
2 变形力学方程	24
2.1 坐标系及应力分量	25
2.2 平衡微分方程	25
2.3 几何方程	27
2.3.1 由应变表示的几何方程	27
2.3.2 用应变增量与变形速度表示的几何方程	29
2.4 屈服条件	31
2.4.1 屈雷斯卡屈服条件	31
2.4.2 米赛斯屈服条件	32
2.4.3 加工硬化金属的屈服条件	35

2.5 应力与变形的关系	36
2.5.1 弹-塑性变形理论方程式	36
2.5.2 塑性流动理论方程式	37
3 塑性变形抗力	39
3.1 变形抗力的概念	39
3.2 变形抗力的测定	40
3.2.1 热状态下的变形抗力曲线	40
3.2.2 冷状态下的变形抗力曲线	46
3.3 变形抗力的计算公式	47
3.3.1 热状态下变形抗力的计算公式	47
3.3.2 冷状态下变形抗力的计算	48
3.4 影响变形抗力的因素	49
3.4.1 变形温度对变形抗力的影响	49
3.4.2 变形程度对变形抗力的影响	50
3.4.3 变形速度对变形抗力的影响	51
3.5 变形抗力曲线	52
3.5.1 幂指数硬化曲线	53
3.5.2 有初始屈服应力的刚塑性硬化曲线	53
3.5.3 有初始屈服应力的刚塑性硬化直线	53
3.5.4 无加工硬化的水平直线	53
第2篇 塑性变形的计算方法	
4 确定表面压力的工程计算方法	55
4.1 接触表面的摩擦条件	56
4.1.1 第一种类型 ($l/\bar{h} > 5$)	58
4.1.2 第二种类型 ($l/\bar{h} = 2 \sim 5$)	59
4.1.3 第三种类型 ($l/\bar{h} = 0.5 \sim 2$)	59
4.1.4 第四种类型 ($l/\bar{h} < 0.5$)	59
4.2 全滑动摩擦平面镦粗的单位压力公式	60
4.3 混合摩擦平面镦粗的单位压力公式	62
4.3.1 第一种情况 [$b/h > 2(1+\phi)$]	62
4.3.2 第二种情况 [$2 \leq b/h \leq 2(1+\phi)$, $0 < \mu < 0.5$]	64
4.3.3 第三种情况 ($b/h \geq 2$, $\mu \geq 0.5$)	64
4.3.4 第四种情况 ($b/h \leq 2$)	65
5 滑移线理论及应用	67
5.1 平面应变问题及滑移线场	67
5.1.1 平面应变问题	67

5.1.2 滑移线场	71
5.2 汉基 (Hencky) 方程	72
5.3 滑移线的几何性质	74
5.4 应力边界条件和滑移线场的绘制	78
5.4.1 应力边界条件	78
5.4.2 滑移线场的绘制	79
5.5 滑移线场的速度场	84
5.5.1 速度场	84
5.5.2 速度矢端图	87
5.6 窄锤头冲压厚板时的应力分布	90
6 极值原理及上限法	92
6.1 基本概念	92
6.2 虚功原理及最大塑性功原理	93
6.2.1 虚功原理与基本能量方程式	93
6.2.2 最大塑性功原理	95
6.3 上限定理	96
6.4 上限法的应用	98
6.4.1 解题步骤	98
6.4.2 应用实例——光滑平冲头压入半无限体 (窄冲头冲压厚板) 的 上限分析	98
6.5 对上限法的评价	100
7 数值计算法	101
7.1 有限元法	101
7.1.1 弹塑性有限元法	101
7.1.2 刚塑性有限元法	105
7.2 边界元法	107
7.3 条元法概述	109
7.3.1 条元法的提出	109
7.3.2 条元法三维轧制理论体系	109
7.3.3 条元法的应用	110
8 人工智能在轧制过程中的应用	111
8.1 人工智能在轧制领域应用的背景和作用	111
8.1.1 人工智能进入轧制领域的背景	111
8.1.2 人工智能在轧制领域的作用	113
8.1.3 国内外发展状况	114
8.2 人工智能在轧制过程中的应用	116

8.2.1 轧制问题求解机制与求解方法的分类	116
8.2.2 几种智能方法相结合在轧制中的应用	118
8.2.3 人工智能与其他方法相结合在轧制中的应用	120

第3篇 纵轧理论

9 轧制过程的基本概念	127
9.1 变形区主要参数	128
9.1.1 轧制变形区及其主要参数	128
9.1.2 轧制变形的表示方法	131
9.2 金属在变形区内的流动规律	132
9.2.1 沿轧件断面高向上变形的分布	132
9.2.2 沿轧件宽度方向上的流动规律	134
10 实现轧制过程的条件	136
10.1 咬入条件	136
10.2 稳定轧制条件	138
10.3 咬入阶段与稳定轧制阶段咬入条件的比较	139
10.3.1 合力作用点位置或系数 K_x 的影响	139
10.3.2 摩擦系数变化的影响	139
10.4 改善咬入条件的途径	140
10.4.1 减小 α 角	140
10.4.2 增大 β 的方法	141
11 轧制过程中的宽展	142
11.1 宽展及其分类	142
11.1.1 宽展及其实际意义	142
11.1.2 宽展分类	143
11.1.3 宽展的组成	144
11.2 影响宽展的因素	145
11.2.1 影响轧件变形的基本因素分析	145
11.2.2 各种因素对轧件宽展的影响	149
11.3 宽展计算公式	154
11.3.1 A. И. 采里柯夫公式	154
11.3.2 Б. П. 巴赫契诺夫公式	155
11.3.3 S. 爱克伦得公式	155
11.3.4 C. И. 古布金公式	156
11.4 孔型轧制时宽展的特点及其简化计算	156
11.4.1 在孔型中轧制时宽展的特点	156
11.4.2 在孔型中轧制时计算宽展的简化方法	158

12 轧制过程中的前滑和后滑	159
12.1 轧制过程中的前滑和后滑现象	160
12.2 轧件在变形区内各不同断面上的运行速度	161
12.3 中性角 γ 的确定	163
12.4 前滑的计算公式	164
12.5 影响前滑的因素	165
12.5.1 压下率对前滑的影响	165
12.5.2 轧件厚度对前滑的影响	166
12.5.3 轧件宽度对前滑的影响	166
12.5.4 轧辊直径对前滑的影响	166
12.5.5 摩擦系数对前滑的影响	167
12.5.6 张力对前滑的影响	167
12.6 连续轧制中的前滑及有关工艺参数的确定	168
12.6.1 连轧关系和连轧常数	168
12.6.2 前滑系数和前滑值	169
12.6.3 堆拉系数和堆拉率	170
13 轧制过程力能参数的计算	172
13.1 计算轧制单位压力的理论	172
13.1.1 沿接触弧单位压力的分布规律	172
13.1.2 计算单位压力的 T. 卡尔曼微分方程	173
13.1.3 单位压力卡尔曼微分方程的 A. И. 采里柯夫解	175
13.1.4 E. 奥罗万单位压力微分方程和 R. B. 西姆斯单位压力公式	179
13.1.5 M. D. 斯通单位压力微分方程式及单位压力公式	180
13.2 轧制压力的工程计算	181
13.2.1 影响轧件对轧辊总压力的因素	181
13.2.2 接触面积的确定	182
13.2.3 金属实际变形抗力 σ_φ 的确定	184
13.2.4 平均单位压力的计算	187
13.3 轧机传动力矩及功率的计算	196
13.3.1 传动力矩的组成	196
13.3.2 轧制力矩的确定	197
13.3.3 附加摩擦力矩的确定	199
13.3.4 空转力矩的确定	200
13.3.5 静负荷图	200
13.3.6 可逆式轧机的负荷图	201
13.3.7 主电机的功率计算	202

14 不对称轧制理论	205
14.1 异步轧制理论	205
14.1.1 异步轧制基本概念及变形区特征	205
14.1.2 异步轧制压力	207
14.1.3 异步轧制的变形量及轧薄能力	208
14.1.4 异步轧制的轧制精度	208
14.1.5 异步轧制有关参数的选择	209
14.2 轧辊异径轧制理论	210
14.2.1 概述	210
14.2.2 异径轧制原理与工艺特点	211
15 钢管成形纵轧理论	215
15.1 圆孔形中轧管的分类和变形过程	215
15.2 圆孔形轧管的变形区和孔型的几何参数	217
15.2.1 变形区的几何参数	217
15.2.2 孔型几何参数	219
15.3 变形区的后边界方程式	222
15.4 管子的最小压扁条件	225
15.5 在圆孔形中轧管时的咬入条件	227
15.6 圆孔形中轧管的运动学	230
15.6.1 速度分析	230
15.6.2 前滑	231
15.6.3 连轧机的运动学特征	231
15.6.4 无芯棒连轧机的速度确定	232
15.6.5 带芯棒连轧机的速度确定	235
15.7 在圆孔形中轧管时金属的变形和流动	237
15.7.1 在外力作用下圆孔形中金属的变形和流动（无芯棒）	237
15.7.2 接触弧长度和接触面积的确定	238
15.7.3 定、减径和张力减径的压力计算	239
 第 4 篇 其他轧制方式的基本理论	
16 钢管成形斜轧理论	243
16.1 斜轧时的应力与变形	243
16.1.1 孔腔形成理论	244
16.1.2 三角形效应分析	245
16.1.3 斜轧时的变形	246
16.2 斜轧几何学	253
16.2.1 斜轧变形区的特点	253

16.2.2 斜轧空间坐标变换关系	258
16.2.3 斜轧机轧辊辊形的计算	262
16.2.4 斜轧孔型开度值计算	267
16.3 斜轧运动学	270
16.3.1 轧辊的运动速度	270
16.3.2 轧件的运动速度	271
16.3.3 变形区内金属的滑移	272
16.3.4 大送进角轧制	276
16.4 斜轧机力能参数计算	279
16.4.1 概述	279
16.4.2 接触面积的计算	279
16.4.3 变形速度及变形程度的确定	281
16.4.4 斜轧单位压力计算	283
16.4.5 顶头上轴向力的确定	287
16.4.6 斜轧受力分析与力矩计算	288
17 环件轧制理论	292
17.1 环件轧制过程分析	293
17.1.1 环件咬入过程分析	293
17.1.2 环件塑性失稳分析	296
17.2 环件轧制过程中的变形	298
17.2.1 轧制变形区运动学方程	298
17.2.2 环件轧制中的前滑和后滑	299
17.2.3 环件直径扩大运动	303
17.2.4 环件旋转运动	304
17.2.5 轧制直线进给运动	305
17.2.6 驱动辊旋转轧制运动	307
17.3 环件轧制过程的力能计算	308
17.3.1 环件轧制力的计算	308
17.3.2 轧环机传动轧辊所需力矩的计算	309
18 楔横轧理论	314
18.1 轧制原理	315
18.1.1 轧辊与轧件的相对运动	315
18.1.2 轧件旋转条件	317
18.1.3 模具展宽角	322
18.1.4 轧件端面移动量	325
18.2 轧制压力与力矩	333
18.2.1 模具与轧件接触面积	333

18.2.2 接触面上的平均单位压力	336
18.2.3 轧制压力与力矩的理论计算	340
参考文献	344
术语索引	345

塑性变形的力学基础

1 应力和应变

学习要点

- (1) 应力及应力状态的概念:

$$\text{应力} \quad \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} = S_n$$

- (2) 斜面上的应力及应力边界条件:

$$\left. \begin{aligned} S_{xn} &= \sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y + \tau_{xz} \alpha_z \\ S_{yn} &= \tau_{yx} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{yz} \alpha_z \\ S_{zn} &= \tau_{zx} \alpha_x + \tau_{zy} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z \end{aligned} \right\}$$

- (3) 主应力的概念及其求解方法。
 (4) 应力张量及其不变量的概念, 应力张量的分解。
 (5) 位移、应变和应变张量及其不变量的概念。
 (6) 主应变的概念及其求解方法。
 (7) 体积不变条件:

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0 \quad \text{或} \quad \theta = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$$

- (8) 等效应力和等效应变:

$$\text{等效应力} \quad \sigma_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\text{等效应变} \quad \epsilon_{ef} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}$$

在外力作用下, 当所施加的外力大于材料屈服极限载荷时, 材料可以由弹性状态进入塑性状态, 而塑性力学则是研究材料在塑性状态下的力学行为的科学, 是连续介质力学的一个分支。塑性力学通常采用以下基本假设:

- (1) 连续性假设;
- (2) 匀质性假设;
- (3) 各向同性假设;

- (4) 初应力为零;
- (5) 体积力为零;
- (6) 体积不变假设。

即材料是连续分布的、均匀的, 在任一点, 沿任意方向, 其力学性质是相同的。在塑性变形过程中, 材料的体积不发生变化。

1.1 内力和应力

应力分析的目的是求解变形体内的应力分布, 即求解变形体内各点的应力状态及其随坐标位置的变化, 这也是求解塑性加工问题的重要基础。

物体受外力作用, 其内部质点在各方向上都受到应力的作用, 因此不能以某一方向的应力来说明其受力状况, 需要引入“应力状态”的概念来完整地表示质点受力状况 (见 1.2 节)。

1.1.1 外力和内力

作用在变形体上的外力有两种: 表面力和体积力 (或称质量力)。

表面力是作用在变形体表面上的外力。在金属压力加工中, 表面力是由变形工具对变形体的作用而产生的, 一般为分布载荷。作用在工具和工件之间接触表面上的**分布载荷**, 可以分解为垂直接触表面的**单位正压力**和切于接触表面的**单位摩擦力**。单位摩擦力是由于在材料变形过程中, 工件的表层金属与工具表面相对滑动或有滑动的趋势而产生的。

体积力是作用于变形体所有质点上的力, 如重力及惯性力等。在变形过程中, 由于金属质点的流动速度发生变化, 产生**惯性力**。体积力与质量的大小成正比。体积力通常很小, 在求解塑性变形问题时, 通常不考虑体积力的作用。

当变形体受到外力作用时, 其内部会产生相应的**内力**。**内力**是一部分变形体和另一部分变形体之间相互作用而产生的力。可设想, 用一个截面将在外力作用下处于平衡状态的物体截开, 两部分之间的内力变成相互之间作用的外力, 使截掉的两部分仍然处于平衡状态。变形体内的内力不仅具有与外力相平衡的性质, 也使变形体内部各部分之间保持平衡。这种现象可以在轧钢生产中观察到, 例如, 将一块有很高内应力、而表面平整的钢板纵向切开, 则钢板会出现明显的侧弯。这是由于在切口处内力消失, 钢板失去平衡的结果。

当温度分布不均匀时, 变形体也会产生内力, 甚至导致其变形和开裂。本课程主要是研究与金属塑性流动有关的内力。

1.1.2 应力

为了引入应力的概念, 可设想用某一平面 F 将在外力作用下处于平衡状态的物体截成两个部分 (图 1-1)。考虑物体作为整体存在时, 物体的一部分 (如 B 部分) 对另一部分 (如 A 部分) 沿截面 F 所作用的内力。一般来说, 内力沿截面的分布是不均匀的。在截面 F 上的任一点 M 周围取一面素 ΔF 。如果面素 ΔF 上的作用力的主矢用 ΔP 表示, 则比值

$$\frac{\Delta P}{\Delta F}$$

称为面素 ΔF 上的平均应力。若使面素 ΔF 以点 M 收缩, 则在面素 ΔF 减小的同时作用力主矢 ΔP 的大小将减小, 其方向将改变, 其极限

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} = S_n$$

就称为 M 点在面素 ΔF 上的应力。应力为矢量，通常将 S_n 称为全应力，以区别由其分解所得到的应力分量。

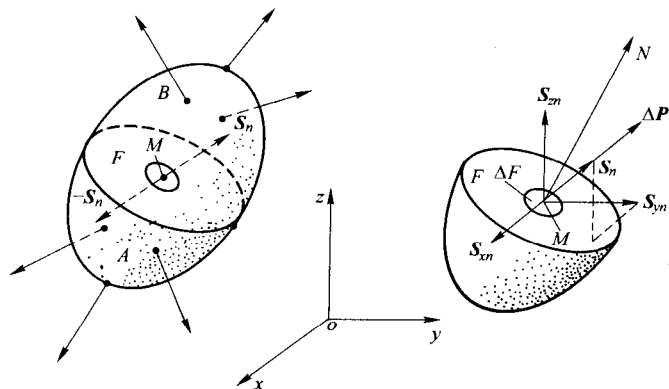


图 1-1 面素上的内力和应力

1.2 应力状态和应力图示

由于处于应力状态（在外力作用下处于平衡状态）的物体的各质点都处于和其周围所有质点发生作用的状态之中，因此面素 ΔF 在空间处于任何方位时在 M 点都有应力存在。并且在一般情况下，应力的大小和方向彼此不相同。由此可见，应力不仅依赖于 M 点（ ΔF 的中心）的位置——坐标 (x, y, z) ，而且还与面素 ΔF 的方位有关。

由于过一点 M 可作无限多个方位不同的面素，因此可以得到无数多个 M 点的全应力。由此可得结论，一点的应力状态不能用一个矢量简单地加以表示，一点的应力状态是一个具有一定性质的由该点在各方位不同的面素 ΔF 上的无限多个应力矢量所构成的矢量集合。通常，将该矢量称为张量，即一点的应力状态可以用一个张量表示。

为了进一步分析一点的应力状态，可以将应力沿坐标方向分解。引入直角坐标系 $oxyz$ （图 1-2），空间某一点 M 的坐标用 (x, y, z) 表示，而沿坐标轴方向的单位矢量以 e_x 、 e_y 、 e_z 表示。点在某一外法线为 N 的平面上的应力 S_n ，称为全应力矢量，其在三个坐标方向上的三个分量的几何和为：

$$S_n = e_x S_{xn} + e_y S_{yn} + e_z S_{zn} \quad (1-1)$$

式中 $S_{in} = S_n e_i$ ($i = x, y, z$) 为全应力矢量 S_n 在坐标轴上的投影。

在应力状态理论中，具有重要意义的是点在三个垂直坐标方向的平面（坐标平面）上的应力。面素 ΔF 处在平行坐标平面的方位时，全应力矢量沿三个坐标方向 x 、 y 及 z 分解的三个应力分量：一个为垂直于作用面的法应力分量，用 σ 表示；两个为切于作用面的剪应力分量，用 τ 表示（图 1-2）。在垂直 x 轴的坐标平面上全应力可表示为

$$S_x = e_x \sigma_x + e_y \tau_{yx} + e_z \tau_{zx} \quad (1-2a)$$

在垂直 y 及 z 轴的坐标平面上，则有

$$S_y = e_x \tau_{xy} + e_y \sigma_y + e_z \tau_{zy} \quad (1-2b)$$

$$S_z = e_x \tau_{xz} + e_y \tau_{yz} + e_z \sigma_z \quad (1-2c)$$

对于各应力分量按下述规则标记角标：与应力分量相平行的坐标轴的符号为第一个角标，表示应力分量的方向；与应力作用面相垂直的坐标轴的符号为第二个角标，表示应力的所在平

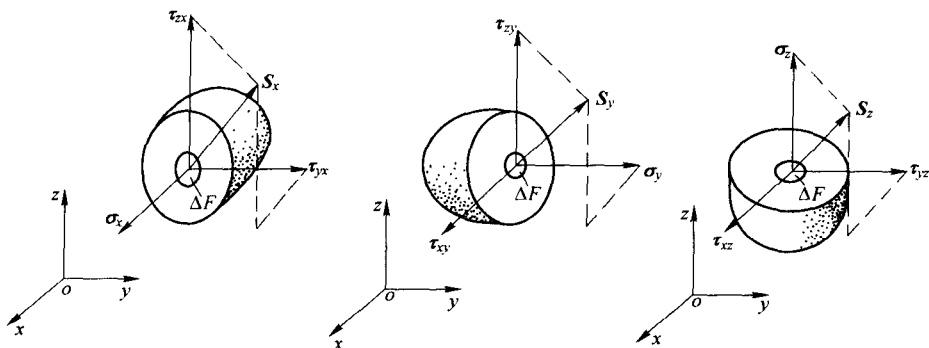


图 1-2 坐标平面上全应力的分解

面。对于法应力分量，表示应力方向和作用面的角标相同，为了简化可采用一个角标。

关于应力分量的正负号做如下规定：拉伸法应力规定为正；在外法线与坐标轴正方向一致的坐标平面上，剪应力指向坐标轴正方向时为正；在外法线指向坐标轴负方向的坐标平面上，剪应力指向坐标轴负方向时为正。

可将点在三个相互垂直的坐标平面上的应力，表示在认为是无限小的直角六面体的表面上，由此所得到的图形称为应力状态图示（见图 1-3）。

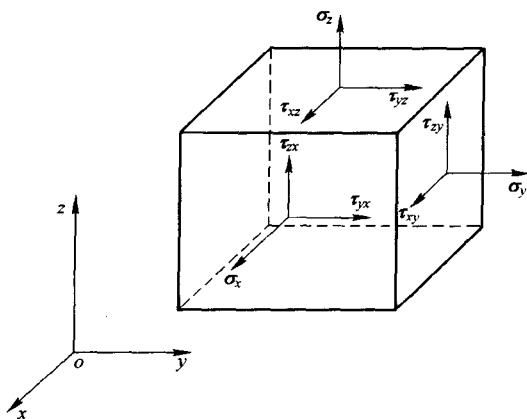


图 1-3 应力状态图示

1.3 斜面上的应力及应力边界条件

一点的应力状态是点在不同平面上的无限多个应力矢量的集合，由此可以提出这样一个问题：要表述一点的应力状态，是否需要知道矢量集合中的每个矢量呢？根据所研究点处于静力平衡状态的条件，可以证明，如果已知一点在通过其本身的三个相互垂直平面（坐标平面）上的应力，则点在通过它的任何一个平面上的应力均可求得。

为此，考察一四面体体素（图 1-4），以直角坐标的三个坐标轴为四面体的棱边。由外法线 N 所决定的四面体的斜面 $dF(\triangle abc)$ 相对坐标轴是任意的。如果四面体的棱边无限缩短，四面体将趋于一点，因此作用在四面体各面上的应力即为所研究点在这些平面上的应力，可以根据四面体的平衡条件来确定点在不同平面上的应力间的解析关系。

四面体处于坐标面的面积，分别用 dF_x 、 dF_y 及 dF_z 表示。作用在正向坐标平面（外法线指向坐标轴正方向的平面）上的全应力 S_i ($i = x, y, z$) 视为正。

根据静力平衡条件，作用在微小四面体 $abco$ 各面上的力的几何和等于零，即

$$S_n dF = S_x dF_x + S_y dF_y + S_z dF_z$$

或写为

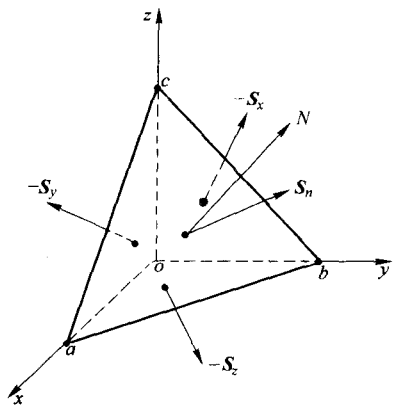


图 1-4 四面体上的应力

$$S_n = S_x \frac{dF_x}{dF} + S_y \frac{dF_y}{dF} + S_z \frac{dF_z}{dF} \quad (1-3)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_x}{dF} &= \mathbf{n} \mathbf{e}_x = \cos(N, x) = \alpha_x \\ \frac{dF_y}{dF} &= \mathbf{n} \mathbf{e}_y = \cos(N, y) = \alpha_y \\ \frac{dF_z}{dF} &= \mathbf{n} \mathbf{e}_z = \cos(N, z) = \alpha_z \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式中 $\mathbf{n}$ ——外法线 N 方向上的单位矢量。

所以, 方程式 1-3 可写为

$$S_n = S_x \alpha_x + S_y \alpha_y + S_z \alpha_z \quad (1-5)$$

式中 $\alpha_i (i = x, y, z)$ 称为外法线 N 的方向余弦数值。

根据式 1-1 和式 1-2, 由矢量方程式 1-5 可得如下三个代数方程式

$$\left. \begin{aligned} S_{xn} &= \sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y + \tau_{xz} \alpha_z \\ S_{yn} &= \tau_{yx} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{yz} \alpha_z \\ S_{zn} &= \tau_{zx} \alpha_x + \tau_{zy} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

简写为

$$S_n = \sigma_{ij} \alpha_j \quad (i, j = x, y, z)$$

由式 1-6 可知, 已知一点在通过其本身的三个相互垂直的坐标平面上的三个全应力矢量或其在三个坐标轴上的九个投影, 则可以得到该点在通过其本身的任一斜面上的应力。也就是说, 一点的应力状态决定于对应坐标方向的三个全应力矢量或其在三个坐标轴上的九个分量(标量), 因而是一个二阶张量。九个应力分量称为应力张量的分量。

张量可用其分量组成的矩阵表示。

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1-7)$$

在矩阵的各行中, 应力的方向相同, 应力按所在平面(第二个角标)的顺序排列。各列内是同一平面上的三个应力分量, 各应力按作用方向(第一个角标)的顺序排列。

由剪应力互等定理可知,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (1-8)$$

实际上点的应力状态张量是决定于六个应力分量。该定理可根据体素的力矩平衡条件加以证明。

根据剪应力互等定理, 点的应力状态不仅是一张量, 而且是二阶对称张量, 可将应力张量的矩阵写为

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1-9)$$