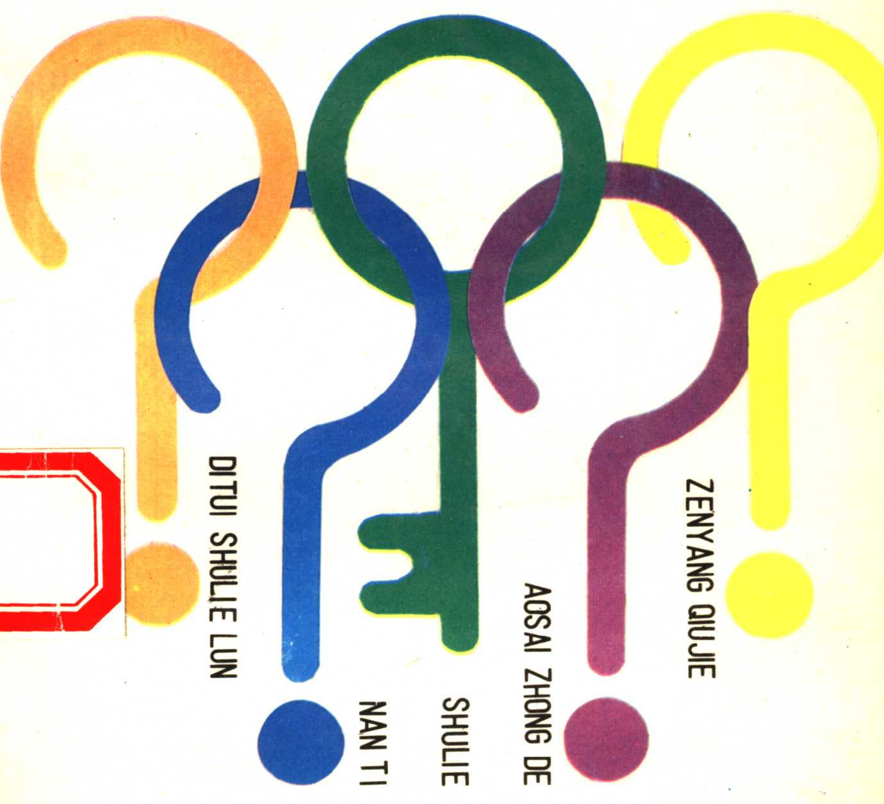
怎样求解奥赛中的数列难题
——递推数列论

陈泽安著

湖南科学技术出版社



怎样求解
奥赛中的数列难题

——递推数列概论

湖南科学技术出版社

湘新登字004号

内　容　提　要

本书专论递推数列，主要讨论线性递推数列的解法。内容涉及非齐线性、一般线性、一般线性组以及少量非线性等问题。在附录中，还介绍了求解数列问题的重要工具——母函数。使用本书的求解方法，不少历史上有名的数列习题，以及前30届国际奥林匹克数学竞赛中难度较大的递推数列习题，可轻而易举地求出其解。

本书虽是专论，但尽可能地做到了深入浅出，只要读者认可附录Ⅱ中的命题，一般都能看懂本书。

怎样求解奥赛中的数列难题——递推数列论

陈泽安　著

责任编辑：曾平安

*

湖南科学技术出版社出版发行

（长沙市展览馆路3号）

湖南省新华书店经销

湖南省化工地质印刷厂印刷

（印装质量问题请直接与本厂联系）

*

1993年11月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张：6.25　字数：141,000

印数：1—3,000

ISBN7—5357—1312—2

0·112　**定价：**5.20元

地科133—36

序

这是一本专门论述数列的书。大家知道，数列是依照某种规则排列着的一列数。把这一列数用和号联结起来就是级数。数列和级数是形影相随地紧密联系的。它们不仅是初等数学的，同时也是高等数学的重要而基本的概念。数列的通项及数列的极限，仅是数列理论研究的原始课题。微积分也是从研究数列的极限开始的。数列和级数的理论极其丰富。它既包括对以数为项的数列和级数的研究，也包括对函数列和函数项级数的研究，从而出现一致收敛的概念以及函数项级数运算的问题；它既包括对单重级数的研究，也包括对二重级数、多重级数的研究，因而出现了多重级数与累次级数的关系问题；它既包括数列和级数的一般理论研究，也包括对诸如三角级数、幂级数等特别级数的专门理论研究；它既包括对决定性的数列和级数的研究，也包括对随机数列和随机级数的研究。数列和级数已渗透到数学的各个分支，它不仅在理论上是重要的，在应用上也是很广泛的。

本书专论递推数列，重点是线性递推数列方程的解法，即对于这类数列方程，找出求一般通项公式的方法。关于常系数齐次线性递推数列方程的解法，过去已有人论述过。关于非齐次线性递推数列方程，更一般的线性递推数列方程，一般的线

性递推数列方程组，以及线性分式递推数列方程等方程的解法，尚未见专门的、系统的论述。而本书对上述类型的递推数列，作了系统、深入的论述，求出了它们的解。结论和方法都是新的，初等，简洁，明了，具有普遍的意义。

特别可喜的是，作者从历届国际奥林匹克数学竞赛试题中，将有关数列的试题挑选出来，用本书的解法给予解答，发现许多解答比标准答案还要简单。这是本书的一个特点。

作者是一位长期从事数学教学的老师，在繁忙的教学中能对专门课题搜集资料，悉心钻研，著书立说，是十分难能可贵的。本书是用初等方法叙述的，由浅入深，循序渐进。阅读本书不需要高深的数学知识，必要的一些高等代数和母函数知识，已作为附录列出。本书的出版，将给广大青年读者和从事数学教学的老师们，以教益和启发，将产生有益的作用和影响，特作序。

杨向群　于湖南师大里仁村

1993.3

目　　录

第一章　绪论

数列反映现实世界运动过程中的一种数量关系；它是组合数学中的一个重要内容，在高等数学中有相当的比重。概率论中离散型随机变量的分布列，就是一类特殊的数列。在数列的实际问题中，大多不能直接地写出描述过程的数量关系，即数列通项式，但有一类相当广泛的数列问题比较容易建立数列的递推式。解决这类数列实际问题的基本步骤是、①建立实际问题的数学模型，即建立反映该实际问题的数列递推式；②解此数列递推式，求出数列通项；③用所得结果解释实际问题。因此，这类数列问题的核心是：从已知的数列递推式求出数列通项。我们把数列的递推式称为数列方程，简称方程；把求数列通项的过程称为解方程：把求得的通项称为方程的解。

数列问题分类纷杂，解法多变，至今没有统一的解法，讨论数列问题的文献也很零散，没有系统的论述。本书专门对递推数列问题进行系统的论述；对数列进行分类整理与严格的理论推导；汇总了数列的已有解法和作者在长期教学实践中积累的许多崭新解法。对广泛且常见的一类数列方程给出一个统一的解法。从而，根本没有必要再面对各个问题冥思苦想，以觅求各自相异的解题思路与解题技巧。阅读本书需要较少的数学分

析知识和较多的线性代数知识，与本书内容有关的分析与代数知识在附录Ⅱ列出，一般不另行证明。先以具体例子简单地介绍怎样建立数列的方程。

§1.1 怎样建立方程

先看例子。

例1 十三世纪初， 意大利比萨的一位叫伦纳德，绰号菲波那契的数学家，在一本题为《算盘书》的数学著作中，提出一个有趣的“兔子问题”：

兔子出生以后两个月就能生小兔，以后每月生一次，若每次不多不少恰好生一对（一雌一雄）。假如年初养了刚满月的兔子一对（一雌一雄），试问一年以后共有多少对兔子（如果生下的小兔都不死的话）？

解：分析：二月初，最初的一对兔子已长大，可生出一对小兔，所以二月里有两对兔子。三月初大兔又生出一对小兔，所以三月里有 3 对兔子。四月初，因二月出生的小兔已长大并开始生育，这时共有2对大兔生育，所以四月里有5对兔子。五月初，因三月出生的小兔已长大并开始生育，这时共有 3 对大兔生育，所以五月里有8对兔子。下面越来越复杂。 我们换一种方法。设第n个月有$x(n)$对兔子。

则：

$x(1)=1$，$x(2)=2$，$x(3)=3$，$x(4)=5$，$x(5)=8$。

我们发现这五个数有一个规律，每个数都是前面两个数之和：

$x(3)=x(1)+x(2)$；$x(4)=x(2)+x(3)$；$x(5)=x(3)+x(4)$。

这个规律对以后的数还对吗？我们这样想，第n个月时兔房中的兔子可分成两部分：一部分是本月初新生的小兔：一部分是上月已有的兔子。凡第$n-2$个月里已有的兔子到第n个月的月初都已是能生育的大兔，每对生一对小兔，即：新生小兔对数为第$n-2$个月里已有兔子对数。

所以：

$$x(n)=x(n-2)+x(n-1)。\tag{1.1}$$

用第三章介绍的方法可以求出：

$$x(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$$x(13)=377。$$

因此第2年初有377对兔子。若不是通过计算，$x(n)$的表达式是很难直接写出来的。一串正整数居然通过一个包含无理数的式子表示！

例2 求n个互异实数的积，应用乘法的交换律和结合律，可以用不同的方法得到。例如给定了3个互异实数a_1，a_2，a_3，则有如下12种方法：

$$a_1\times(a_2\times a_3),\ a_2\times(a_1\times a_3),\ a_3\times(a_1\times a_2),$$

$$a_1\times(a_3\times a_2),\ a_2\times(a_3\times a_1),\ a_3\times(a_2\times a_1),$$

$$(a_2\times a_3)\times a_1,\ (a_1\times a_3)\times a_2,\ (a_1\times a_2)\times a_3,$$

$$(a_3\times a_2)\times a_1,\ (a_3\times a_1)\times a_2,\ (a_2\times a_1)\times a_3,$$

形成a_1，a_2，a_3的积，其中只有如下2种方法：

$$a_1\times(a_2\times a_3),\ (a_1\times a_2)\times a_3$$

保持a_1，a_2，a_3原来的次序不变。

现在问，给定n个互异实数a_1，a_2，…，a_n。要形成它们

的积，有多少种方法；其中保持a_1，a_2，…，a_n，原来的次序不变，又有多少种方法？

解：没有$x(n)$种方法形成n个实数的积；当排列次序不变时，有$y(n)$种方法形成n个实数的积。

则：

$x(n)=y(n)\cdot n!$ 。

所以求出$x(n)$，也就能求出$y(n)$。

当$n=1$时，只有一种方法，所以$x(1)=1$。当$n=2$时，有2种方法：

$a_1\times a_2$，$a_2\times a_1$，

所以$x(2)=2$。当$n=3$时考虑2个数a_1，a_2的$x(2)$个积中的任何一个，我们用下列6种方法把a_3添加到这个积中去形成a_1，a_2，a_3的积：

$(a_3\times a_i)\times a_j$，$(a_i\times a_3)\times a_j$，$a_i\times(a_j\times a_3)$，

$a_i\times(a_3\times a_j)$，$a_3\times(a_i\times a_j)$，$(a_i\times a_j)\times a_3$。

所以：$x(3)=6\times(2)=12$。

设$n\geqslant 3$，n个数a_1，a_2，…，a_n相乘，将连续做$n-1$次两数的乘法。考虑$n-1$个数$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$的$x(n-1)$种形成积的方法中的任何一种。该种方法形成的积是连续做$n-2$次两数的乘法所得。我们用下列方法的任一种方法把a_n添加到这个积中去，形成n个数的积：

①在这$n-2$次两数的乘法中的任一次乘法中，用a_n乘其中任意一个乘数的任一边。共$4(n-2)$种方法；②用a_n前乘a_1，a_2，…，a_{n-1}之积。只1种方法；③用a_n后乘a_1，a_2，…，a_{n-1}之积。只1种方法。所以：

$$x(n)=(4n-6)x(n-1)\ ,\quad (n\geqslant 3)\ ; \qquad (1.2)$$

$$y(n)=(4-\frac{6}{n})\ y(n-1)\ (n\geqslant 3) \qquad (1.3)$$

但$y(n)$也可直接求递推式。在a_1，a_2，…，a_n的乘积中，一定有a_1，a_2，…，a_k的某个积与a_{k+1}，a_{k+2}，…，a_n的某个积做最后一次乘积。因a_1，a_2，…，a_k有$y(k)$种方法形成积；a_{k+1}，a_{k+2}，…，a_n有$y(n-k)$种方法形成积，$1\leqslant k\leqslant n-1$。所以：

$$y(n)=\sum_{k=1}^{n-1} y(k)\cdot y(n-k) \qquad (1.4)$$

同一个数列，但有两个不同的数列方程。

例3　设有一凸n边形，用$n-3$条在凸n边形内部不相交的对角线把这n边形分成$n-2$个三角，一共有多少种不同的分法？

解：设对凸$n+1$边形有$y(n)$种分法：显然$n=1$时，问题无意义；$n=2$时，$n+1$边形是一个三角形，它只有一种分法，就是它自己。所以$y(2)=1$。今设$n\geqslant 3$，我们在凸$n+1$边形s中先任取一条边，例如图1中AB边，另取一点C，设$\triangle ABC$左边图形为S_1，它是一个凸$k+1$边形，设$\triangle ABC$右边图形为S_2，它是一个凸$n-k+1$边形。由假设凸$k+1$边形S_1，有$y(k)$种不同分法；凸$n-k+1$边形S_2，有$y(n-k)$种分法。让C点遍取A、B外所有其它点，那么共有$\sum_{k=1}^{n-1} y(k)\cdot y(n-k)$种分法。

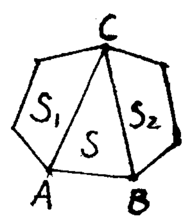


图1

即：

$$y(n)=\sum_{k=1}^{n} y(k).y(n-k), \qquad (n\geqslant 3) \qquad (1.5)$$

约定$n=1$时，$y(1)=1$。

（1.4）与（1.5）是同一个式子。不同的实际问题却有相同的递推方程。当然也就有相同的数列通项。

建立递推式，或者说建立数列方程，没有统一的方法。一般先设一个未知数列的通项$x(n)$，看$x(n+1)$与前n项$x(1)$，$x(2)$,…，$x(n)$有什么规律；或者从实际问题背景中找出$x(n)$之间的关系。这既需要一定的实践经验，也需要一定的数学技巧。

§1.2基本概念

设N表示自然数集，Z表示整数集。R^n表示n维欧氏空间。

定义1 定义在N上的函数称为数列，即一列数$a(1)$，$a(2)$，…,$a(n)$,…，称为数列。简记为：$\{a(n), n\in N\}$或$\{a(n)\}$。$\{a(n), n\in Z\}$称为无首项数列。当n泛指时，$a(n)$称为数列$\{a(n)\}$的通项。

除非特别声明，一般只讨论$\{a(n), n\in N\}$。以后我们一般用$x(n)$，$y(n)$表示未知数列的通项。

定义2 若对一切$n\in N$，$a(n)=0$，称$\{a(n)\}$是零数列，否则称为非零数列；若存在$k\in N$，$a(k)=0$，且又存在$m\in N$，$a(m)\neq 0$,称$\{a(n)\}$为有零数列；若对一切$n\in N$,$a(n)\neq 0$，称$\{a(n)\}$是无零数列；若对一切$n\in N$，$a(n)=a$，称$\{a(n)\}$是常值数列，否则称为非常值数列。

需要强调指出：$\{a(n)\}$是有零数列，则它必定是非零数列。

定义3　设$F(n, x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m)$是定义在$N\times R^{m+1}$上的函数，且函数$F$显含(*) x_0, x_m，设$m\in N$，m固定。形如：

$$F(n, x(n), x(n+1), \cdots, x(n+m))=0. \tag{1.6}$$

的递推式称为m阶数列方程，简称方程。其中m称为方程的阶。

例如（1.1）是2阶方程。虽然变量是$n-2$，$n-1$，n 我们只要变量最大与最小之差是2就仍是2阶方程，对于m阶方程也一样。（1.2），（1.3）是1阶方程。（1.4）是变阶方程不在定义3之规定内，一般不讨论。

若将$a(n)$代入方程（1.6）后，使它成为恒等式，则称$a(n)$是方程的解。带有m个独立的任意常数$c_1, c_2, \cdots, c_m$的解：

$$a(n)=a(n, c_1, c_2, \cdots, c_m) \tag{1.7}$$

称为通解。所谓带m个独立常数，是指行列式：

$$\left|\frac{\partial a(n-1+i)}{\partial c_j}\right|_{m\times m}\neq 0. \tag{1.8}$$

为了确定方程（1.6）的一个特定的解，我们通常给出这个解所应满足的条件。这就是所谓定解条件。一般只讨论定解条件是初始条件的情形，即如下m个条件：

$$a(1)=\gamma_1, a(2)=\gamma_2, \cdots, a(m)=\gamma_m. \tag{1.9}$$

满足（1.9）的解称为特解。其它不带任意常数的解也称为特解。

(*) 例如：$F(n, x(n), x(n+1), \cdots, x(n+m))=nx^2(n)+x(n+m)$，$F$就显含$n, x(n), x(n+m)$，而不显含$x(n+1), x(n+2), \cdots, x(n+m-1)$.

第二章　一阶方程

本章介绍一阶方程的解法。一般的一阶方程没有统一解法。对显示一阶方程，我们总能得到形式解法。对于一阶线性方程，我们能求出全部解。非线性方程放到第六章。最后，在应用举例中，对相当广泛的一类数列解决了已知通项，求和的问题。

§2.1　一阶线性方程

对于显式一阶方程：

$$x(n+1)=f(n、x(n))\ , \tag{2.1}$$

在形式上总可求出解：

$$x(n)=f(n-1,f(n-2,f(\cdots,f(1,x(1)\cdots))) \tag{2.2}$$

这是一个递归式，只有理论上的意义。下面类型的显式一阶方程的解才有实际意义，即一阶线性方程。

定义1　设$p(n)$和$f(n)$是定义在N上的两个函数，形如：

$$x(n+1)=p(n)x(n)+f(n) \tag{2.3}$$

的方程称为一阶线性方程。其中$\{p(n)\}$是非零数列。当$\{f(n)\}$是零数列，即$f(n)\equiv 0$时，方程(2.3)变形为：

$$x(n+1)=p(n)x(n) \tag{2.4}$$

称为一阶齐次线性方程。当$\{f(n)\}$是非零数列时，(2.3)称为一

阶非齐次线性方程。并把方程(2.4)称为"相应于"方程(2.3)的齐次线性方程。

例如：(1.2)与(1.3)都是一阶齐次线性方程。

我们先讨论齐次方程的解法。因$\{p(n)\}$是非零数列，这时有两种情况出现：$\{p(n)\}$为有零数列或者$\{p(n)\}$为无零数列。设：

$$i=\min_{n\in N}\left\{n, p(n)=0\right\} \tag{2.5}$$

即i是使$p(n)$首次等于0的自然数。对有零数列$\{p(n)\}$，$i<\infty$；对于无零数列$\{p(n)\}$，约定$i=\infty$，则有下面的定理。

定理1 若$\{p(n)\}$是有零数列。则方程(2.4)的解为：

$$x(n)=\begin{cases} x(1)\prod\limits_{k=1}^{n-1} p(k), & n\leqslant i; \\ 0, & n>i. \end{cases} \tag{2.6}$$

其中i由(2.5)定义，且约定$\prod\limits_{k=1}^{0} p(k)=1$。对于不同的$x(1)$，上式(2.6)的值是不同的。$x(1)$就相当一个任意常数。所以(2.6)是通解。当$x(1)=\gamma$确定后(2.6)又是特解。

证明：将(2.6)代入(2.4)验证即得。证毕。

例1 求满足$x(1)=2$时，方程

$x(n+1)=(n^2-11n+28)x(n)$的特解。

解：由于$p(n)=n^2-11n+28$，$\{p(n)\}$为有零数列。由(2.5)，$i=4$，所以由(2.6)满足条件的特解为：

$$x(n)=\begin{cases}2\prod\limits_{k=1}^{n-1}(k^2-11k+28), & n\leqslant 4;\\ 0, & n>4.\end{cases}$$

即：

$\{(n)\}$为，2，36，360，1440，0，…，0，…。

定理2 若$\{p(n)\}$是无零数列。则方程(2.4)的解为：

$$x(n)=x(1)\prod_{k=1}^{n-1}p(k),\quad n\in N. \tag{2.7}$$

证明：将(2.7)代入(2.4)验证即得。证毕。

当$x(1)$不定时，(2.7)是通解。当$x(1)$确定时，(2.7)是特解。

例2 求方程(1.3)满足$y(1)=1$的特解。

解：将(1.3)改写成(2.4)的形式为：

$$y(n+1)=\left(4-\frac{6}{n+1}\right)y(n),$$

所以，

$$p(k)=\frac{2(2k-1)}{k+1},\quad y(1)=1.$$

由(2.7)有

$$y(n)=y(1)\prod_{k=1}^{n-1}p(k)$$