新世纪

中等职业教育
基础类课程规划教材

ZHONGDENG ZHIYE JIAOYU JICHULEI KECHENG GUIHUA JIAOCAI

数学

（基础版I）

主编 关革强 主审 程敬松

ZHONGDENG
ZHIYE JIAOYU
JICHULEI KECHENG
GUIHUA JIAOCAI

大连理工大学出版社

新世纪

中等职业教育基础类课程规划教材

数　　学

(基础版Ⅰ)

主　审　程敬松

主　编　关革强　　副主编　张岩松　李传欣

SHU XUE

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学(基础版Ⅰ)/ 关革强主编．一大连:大连理工大学出版社,2006.11
中等职业教育基础类课程规划教材
ISBN 7-5611-2949-1

Ⅰ．数…　Ⅱ．关…　Ⅲ．数学课—专业学校—教材
Ⅳ．G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 101095 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:8.75　字数:192 千字
印数:1～3000
2006 年 11 月第 1 版　2006 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑:赵　部　欧阳碧蕾　责任校对:米青霞
封面设计:波　朗

定　价:14.00 元

前　言

《数学(基础版Ⅰ)》是中等职业教育基础类课程规划教材之一,也是《数学(基础版)》的第一分册。

数学是研究空间形式和数量关系的科学。随着现代科学技术和经济建设的高速发展,数学的思想、内容、方法和语言日益在科学技术、生产和生活中得到广泛的应用,成为现代文化不可缺少的组成部分。因此,使学生在中等职业学校继续受到必要的数学教育,提高数学素养,对培养高素质劳动者和初、中级人才具有十分重要的意义。

为了适应中等职业学校培养应用型、复合型人才的需要,同时,为了适应中等职业教育的改革形势,为了能更好地将课程与实际教学相结合,我们编写了这套教材——《数学(基础版)》。本套教材共两册,以“概念、定理适度掌握,强化实用,培养技能”为重点,充分体现了以应用为目标、以够用为度的中等职业教学基本原则;理论描述精确简练,具体讲解明晰易懂;很好地兼顾了中职各专业对数学知识的需要。本套教材的内容包括:集合、不等式、简单逻辑;幂函数、指数函数、对数函数;任意角的三角函数;加法定理及其推论、正弦型曲线;反三角函数与简单的三角方程;空间图形;直线和二次曲线;数列;复数;排列、组合、二项式定理、概率初步等十部分。

与同类教材相比,本教材在编写的过程中主要突出以下特点:

1. 强调数学概念与实际问题的联系,通过大量新颖的数学应用例题,使学生能体会到数学应用的可能性,从而更加明确学习数学的目的;

2. 充分考虑中职学生的数学基础,较好地处理了初中数学与中职数学之间的过渡和衔接;

3. 每章节后的习题量少简洁、针对性强,以便学生明确

新世纪

和掌握重点，理解和消化难点，及时复习巩固所学内容。

《数学(基础版Ⅰ)》由广西工业职业技术学院关革强任主编，天津对外经济贸易职业学院张岩松、吉林交通职业技术学院李传欣任副主编。具体编写分工如下：第1、5章由关革强编写，第2、3章由张岩松、关革强共同编写，第4章由关革强、李传欣共同编写。吉林交通职业技术学院程敬松老师审阅了全部书稿并提出了很多宝贵的意见和建议，在此谨致谢忱。

对于教材中存在的不足和错误之处，诚望读者批评指正。

所有意见和建议请发往：gzjckfb@163.com

联系电话：0411—84707492　84706104

编　者

2006年11月

目　录

第1章

集合、不等式、简单逻辑

集合论是现代数学的一个重要分支，它的基本知识已被运用于数学的各个领域，我们在日常生活、生产、学习实践中，常常会接触集合的问题。逻辑学是研究思维规律及思维形式的科学，它为我们提供了学习数学时必不可少的逻辑知识。本章除了介绍集合的概念、常用符号、简单运算外，还将介绍一些常用的逻辑用语的含义。

1.1 集合的概念

1.1.1 集合的概念

在初中数学中，我们已经接触过"集合"一词。

在初中代数里学习数的分类时，就用到"正数的集合"、"负数的集合"等。此外，对于一元一次不等式 $2x-1>3$，所有大于 2 的实数都是它的解。我们也可以说，这些实数组成了这个不等式的解的集合，简称为这个不等式的解集。

在初中几何里学习圆时，定义圆是到定点的距离等于定长的点的集合。几何图形都可以看成是点的集合。

一般地，某些指定的对象集中在一起就成为一个**集合**，简称**集**。集合中的一个对象叫做这个集合的一个**元素**。

例如，"我校篮球队的队员"组成一个集合；"地球上的四大洋"也组成一个集合。我们一般用大括号表示集合，上面的两个集合就可以分别表示成{我校篮球队的队员}与{地球上的四大洋}。"地球上的四大洋"这一集合的元素是：太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋。

为了方便起见，我们还经常用大写的拉丁字母 A、B、C…来表示集合，例如，$A=${地球上的四大洋}，$B=\{1,2,3,4,5\}$。

集合中的元素常用小写的拉丁字母 a、b、c……表示。如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$。

例如，设 $B=\{1,2,3,4,5\}$，那么 $5\in B$，$\frac{3}{2}\notin B$；

又如，$6\in\mathbf{N}$，$\frac{3}{2}\in\mathbf{Q}$，$\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$。

从以上例子我们得到：

(1)集合中的元素必须是确定的。这就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了。例如，给出集合{地球上的四大洋}，它只有太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋四个元素，其他对象都不是它的元素。又如，“我国的小河流”就不能组成一个集合，因为组成它的元素是不确定的。

(2)集合中的元素又是互异的。这就是说，集合中的元素是没有重复的，任何两个相同的对象在同一个集合中时，只能算作这个集合的一个元素。

(3)集合中的元素无固定的排列次序。

下面是一些常用的数集及其记法：

全体非负整数的集合通常简称**非负整数集**(或**自然数集**)，记作 $\mathbf{N}$；非负整数集内排除 0 的集合，称**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^+$；

全体整数的集合通常简称**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数的集合通常简称**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数的集合通常简称**实数集**，记作 $\mathbf{R}$。

1.1.2 集合的表示方法

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法。

列举法是把集合中的元素一一列举出来的一种方法。

例如，由方程 $x^2-1=0$ 的所有解组成的集合，可以表示为 $\{-1,1\}$。

又如，由小于 5 的正整数所组成的集合，可以表示为 $\{1,2,3,4\}$ 或 $\{4,3,2,1\}$ 等。

注　集合 $\{-1,1\}$ 的元素有两个。一般地，含有有限个元素的集合叫做**有限集**。

又如，由所有大于 0 且小于 10 的奇数组成的集合，可以表示为 $\{1,3,5,7,9\}$。

描述法是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的一种方法。

例如，不等式 $x-3>2$ 的解集可以表示为 $\{x\in\mathbf{R}\mid x-3>2\}$。

我们约定，如果从上下文看，$x\in\mathbf{R}$ 是明确的，那么这个集合也可以表示为

$$\{x\mid x-3>2\}$$

注　集合 $\{x\mid x-3>2\}$ 的元素有无限个。一般地，含有无限个元素的集合叫做**无限集**。

又如，所有直角三角形的集合，可以表示为

$$\{x\mid x\text{ 是直角三角形}\}$$

再看一个例子，由方程 $x^2+1=0$ 的所有实数解组成的集合，可以表示为

$$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+1=0\}$$

注　这个集合是没有元素的。一般地，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\varnothing$。

想一想：

(1)数 0 与 $\varnothing$ 有什么区别？

(2)集合 $\{0\}$ 与 $\varnothing$ 有什么区别？

1.1.3 集合的子集

在集合与集合之间，存在着“包含”或“相等”的关系。

先看集合与集合之间的“包含”关系。设

$$A=\{1,2,3\},B=\{1,2,3,4,5\}$$

集合 A 是集合 B 的一部分，我们就说集合 B 包含集合 A。

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，我们就说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A$$

这时我们也说集合 A 是集合 B 的**子集**。

当集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，则记作

$$A\nsubseteq B \text{ 或 } B\nsupseteq A$$

我们规定：空集是任何集合的子集。也就是说，对于任何一个集合 A，都有

$$\varnothing\subseteq A$$

再看集合与集合之间的“相等”关系。设

$$A=\{x\mid x^2-1=0\},B=\{-1,1\}$$

集合 A 与集合 B 的元素是相同的，我们就说集合 A 等于集合 B。

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 中的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作

$$A=B$$

由集合的“包含”与“相等”的关系，可以得出下面的结论：

(1)对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A 本身，所以

$$A\subseteq A$$

也就是说，任何一个集合都是它本身的子集。

我们常常涉及“真正的子集”的问题，对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，我们就说集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A$$

用图形表示，如图 1-1 所示。

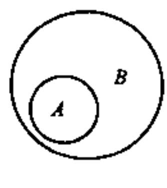

图 1-1

显然，空集是任何非空集合的真子集。

容易知道，对于集合 A、B、C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$。事实上，设 x 是集合 A 中的任意一个元素，因为 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$，又因为 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$，从而 $A\subseteq C$。

同样可知，对于集合 A、B、C，如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$。

(2)对于集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$。

【例 1-1】 写出集合 $\{a,b\}$ 的所有子集，并指出其中哪些是它的真子集。

解 集合 $\{a,b\}$ 的所有子集是 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$，其中 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$ 是它的真子集。

【例 1-2】 解不等式 $x-3>2$，并将结果用集合表示。

解 $x>5$，

原不等式的解集是 $\{x\mid x>5\}$。

【例 1-3】 说出下列集合之间的关系。

(1)$A=\{2,4,5,7\}$,$B=\{2,5\}$;

(2)$P=\{x|x^2=1\}$,$Q=\{-1,1\}$;

(3)$C=\{$奇数$\}$,$D=\{$整数$\}$。

解 (1)$B\subset A$ 或 $A\supset B$;(2)$P=Q$;(3)$C\subset D$ 或 $D\supset C$。

习题 1.1

1. 说出下面集合中的元素。

(1){大于 3 且小于 11 的偶数};

(2){平方等于 9 的数};

(3){15 的约数}。

2. 用适当的方法表示下列集合,然后说出它们是有限集还是无限集。

(1)由大于 10 的所有自然数组成的集合;

(2)由 24 与 30 的所有公约数组成的集合;

(3)方程 $x^2-4=0$ 的解的集合;

(4)由小于 10 的所有质数组成的集合;

(5)水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星。

3. 用描述法表示下列集合,然后说出它们是有限集还是无限集。

(1)由 4 与 6 的所有公倍数组成的集合;

(2)由所有正奇数组成的集合;

(3)方程 $x^2-2=0$ 的解集;

(4)不等式 $4x-6<5$ 的解集。

4. 写出集合$\{a,b,c\}$的所有子集,并指出其中哪些是它的真子集。

5. 用适当的符号($\in$,$\notin$,$\subseteq$,$\supseteq$,$\subset$,$\supset$,$=$)填空。

(1)a ________ $\{a\}$;

(2)a ________ $\{a,b,c\}$;

(3)d ________ $\{a,b,c\}$;

(4)$\{a\}$ ________ $\{a,b,c\}$;

(5)$\{a,b\}$ ________ $\{b,a\}$;

(6)$\{3,5\}$ ________ $\{1,3,5,7\}$;

(7)$\{2,4,6,8\}$ ________ $\{2,8\}$;

(8)$\varnothing$ ________ $\{1,2,3\}$。

6. (1)解方程 $x+3=\frac{x}{2}-5$,并将结果用集合表示。

(2)解不等式 $3x+2<4x-1$,并将结果用集合表示。

1.2 集合的运算

1.2.1 交集、并集

观察下面的三个图。图1-2(1)中给出了两个集合 A 与 B，集合 A 与 B 的公共部分就叫做集合 A 与 B 的交集(图1-2(2)的阴影部分)，集合 A 与 B 合并到一起得到的集合就叫做集合 A 与 B 的并集(图1-2(3)的阴影部分)。

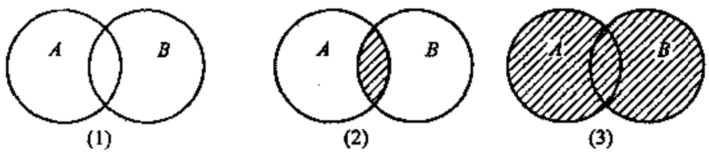

图1-2

一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$(读作"A 交 B")，即

$$A\cap B=\{x|x\in A,\text{且 } x\in B\}$$

而由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$(读作"A 并 B")，即

$$A\cup B=\{x|x\in A,\text{或 } x\in B\}$$

【例 1-4】 设 $A=\{x|x>-2\}$，$B=\{x|x<3\}$，求 $A\cap B$。

解 $A\cap B=\{x|x>-2\}\cap\{x|x<3\}=\{x|-2<x<3\}$

【例 1-5】 设 $A=\{x|x\text{ 是等腰三角形}\}$，$B=\{x|x\text{ 是直角三角形}\}$，求 $A\cap B$。

解 $A\cap B=\{x|x\text{ 是等腰三角形}\}\cap\{x|x\text{ 是直角三角形}\}=\{x|x\text{ 是等腰直角三角形}\}$

【例 1-6】 设 $A=\{4,5,6,8\}$，$B=\{3,5,7,8\}$，求 $A\cup B$。

解 $A\cup B=\{4,5,6,8\}\cup\{3,5,7,8\}=\{3,4,5,6,7,8\}$

注 集合中的元素是没有重复现象的，在两个集合的并集中，原来两个集合的公共元素只能出现一次，不要写成

$$A\cup B=\{3,4,5,5,6,7,8,8\}$$

【例 1-7】 设 $A=\{x|x\text{ 是锐角三角形}\}$，$B=\{x|x\text{ 是钝角三角形}\}$，求 $A\cup B$。

解 $A\cup B=\{x|x\text{ 是锐角三角形}\}\cup\{x|x\text{ 是钝角三角形}\}=\{x|x\text{ 是斜三角形}\}$

【例 1-8】 设 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|1<x<3\}$，求 $A\cup B$。

解 $A\cup B=\{x|-1<x<2\}\cup\{x|1<x<3\}=\{x|-1<x<3\}$

由交集的定义容易知道，对于任何集合 A、B，有

$$A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cap B=B\cap A$$

由并集的定义容易知道，对于任何集合 A、B，有

$$A\cup A=A, A\cup\varnothing=A, A\cup B=B\cup A$$

【例 1-9】 设 $A=\{(x,y)\mid y=-4x+6\}$，$B=\{(x,y)\mid y=5x-3\}$，求 $A\cap B$。

解 $A\cap B=\{(x,y)\mid y=-4x+6\}\cap\{(x,y)\mid y=5x-3\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{l}y=-4x+6\\y=5x-3\end{array}\right\}$

$=\{(1,2)\}$

注 本题中，(x,y)可以看作是直线上的点的坐标，也可以看作是二元一次方程组的解。

形如 $2n(n\in\mathbf{Z})$的整数叫做**偶数**，形如 $2n+1(n\in\mathbf{Z})$的整数叫做**奇数**。全体奇数的集合简称**奇数集**，全体偶数的集合简称**偶数集**。

【例 1-10】 已知 A 为奇数集，B 为偶数集，$\mathbf{Z}$ 为整数集，求 $A\cap B$，$A\cap\mathbf{Z}$，$B\cap\mathbf{Z}$，$A\cup B$，$A\cup\mathbf{Z}$，$B\cup\mathbf{Z}$。

解 $A\cap B=\{$奇数$\}\cap\{$偶数$\}=\varnothing$

$A\cap\mathbf{Z}=\{$奇数$\}\cap\mathbf{Z}=\{$奇数$\}=A$

$B\cap\mathbf{Z}=\{$偶数$\}\cap\mathbf{Z}=\{$偶数$\}=B$

$A\cup B=\{$奇数$\}\cup\{$偶数$\}=\mathbf{Z}$

$A\cup\mathbf{Z}=\{$奇数$\}\cup\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$

$B\cup\mathbf{Z}=\{$偶数$\}\cup\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$

【例 1-11】 设 $A=\{$矩形$\}$，$B=\{$菱形$\}$，求 $A\cap B$。

解 $A\cap B=\{$矩形$\}\cap\{$菱形$\}=\{$正方形$\}$

1.2.2. 全集、补集

首先来看一个例子。

设集合 S 是全班同学的集合，集合 A 是班上所有参加校运动会的同学的集合，而集合 B 是班上所有没有参加校运动会的同学的集合，那么这三个集合有什么关系呢？容易看出，集合 B 就是集合 S 中除去集合 A 之后余下来的集合。

一般地，设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集(即 $A\subseteq S$)，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 A 在 S 中的**补集**(或**余集**)，记作 C_SA，即

$$C_SA=\{x\mid x\in S,\text{且 }x\notin A\}。$$

图 1-3 中的阴影部分表示 A 在 S 中的补集 C_SA。

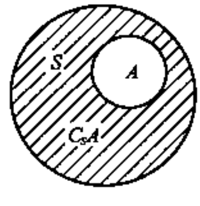

图 1-3

例如，如果 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，那么

$$C_SA=\{2,4,6\}$$

如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作一个**全集**，全集通常用 U 表示。

例如，在实数范围内讨论问题时，可以把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集 U，那么，有理数集 $\mathbf{Q}$ 的补集 $C_U\mathbf{Q}$ 就是全体无理数的集合。

习题 1.2

1. 设 $A=\{(x,y)|3x+2y=1\}$，$B=\{(x,y)|x-y=2\}$，$C=\{(x,y)|2x-2y=3\}$，$D=\{(x,y)|6x+4y=2\}$，求 $A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap D$。

2. 设 $A=\{x|x=2k,k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=2k+1,k\in \mathbf{Z}\}$，$C=\{x|x=2(k+1),k\in \mathbf{Z}\}$，$D=\{x|x=2k-1,k\in \mathbf{Z}\}$，在 A、B、C、D 中，哪些集合相等，哪些集合的交集是空集？

3. 设 $U=\{x|x$ 是小于 9 的正整数$\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，求 $A\cap B$，$C_U(A\cap B)$。

4. 图 1-4 中 U 是全集，A、B 是 U 的两个子集，用阴影表示：

(1)$(C_UA)\cup(C_UB)$；(2)$(C_UA)\cap(C_UB)$。

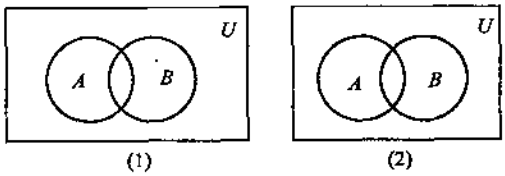

图 1-4

5. 填空。

(1)如果全集 $U=\mathbf{Z}$，那么 $\mathbf{N}$ 的补集 $C_U\mathbf{N}=$________；

(2)如果全集 $U=\mathbf{R}$，那么 $C_U(C_U\mathbf{Q})=$________。

1.3 不等式

1.3.1 不等式的性质

在初中我们学习了实数大小的比较，结合实数运算法则，对任意两个实数 a 和 b，具有如下基本性质：

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$$
$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$$
$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$$

这个性质把实数的大小与减法运算的结果联系起来，是比较实数大小的一种基本思想。我们从这个性质出发，研究不等式的一些重要性质。

性质 1 如果 $a>b$，那么 $b<a$；反过来，如果 $b<a$，那么 $a>b$。即 $a>b\Leftrightarrow b<a$。

性质 2 如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$。即 $a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$。

性质 3 如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$。即 $a>b\Rightarrow a+c>b+c$。

推论 1 $a>b$，$c>d\Rightarrow a+c>b+d$。

想一想：若 $a+c>b+c$，那么 $a>b$ 成立吗？

性质 4 如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$。即 $a>b$，$c>0\Rightarrow ac>bc$；$a>b$，$c<0\Rightarrow ac<bc$。

推论 2 $a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$。

推论 3 $a>b>0, n\in \mathbf{Z}^+, n>1 \Rightarrow a^n>b^n$。

性质 5 如果 $a>b>0, n\in \mathbf{Z}^+, n>1$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。即 $a>b>0, n\in \mathbf{Z}^+, n>1 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。

以上证明，可由学生在教师的指导下练习。

【例 1-12】 选择题。

(1)已知 $a>b>0$，下列各式正确的是(　　)。

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C. $ac^2>bc^2$　　D. $ac<bc$

解 $\left.\begin{array}{l} a>b>0 \\ \frac{1}{ab}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，故选 B。

(2)已知 $a>b, c>d$，下列各式正确的是(　　)。

A. $a-d>b-c$　　B. $a-c>b-d$　　C. $ac>bd$　　D. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

解 $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d \Rightarrow a-d>b-c$，故选 A。

【例 1-13】 用“>”或“<”填空。

(1)若 $x<0$，则 $7x$ ________ $4x$；

(2)若 $a<b$，则 $5+a$ ________ $5+b$；

(3)$m>0, a>b \Rightarrow am$ ________ bm；

(4)$m<0, a>b \Rightarrow \frac{a}{m}$ ________ $\frac{b}{m}$。

解 (1)<；(2)<；(3)>；(4)<。

【例 1-14】 证明性质 5。

证明 用反证法证明。

假定 $\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b}$，(1)若 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，则 $a<b$；(2)若 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，则 $a=b$，这都与 $a>b$ 矛盾，所以 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ 成立。

【例 1-15】 求证：$a>b>0, c>d>0$，则 $\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$。

证明 因为 $a>b>0, c>d>0$，得

$$\left.\begin{array}{l} ac>bd \\ \frac{1}{cd}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$$

利用不等式的性质，我们可以推导出下列重要的不等式：

定理 1 如果 a、$b\in R$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”）。

定理 2 如果 a、b 是正数，那么 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”）。

【例 1-16】 已知 x、y 都是正数，求证：

(1)如果积 xy 是定值 P，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$；

(2)如果和 $x+y$ 是定值 S，那么当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$。

证明 因为 x、y 都是正数，所以 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，

(1)积 xy 是定值 P 时，有$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{P}$，

所以
$$x+y\geqslant2\sqrt{P}。$$

当 $x=y$ 时，上式取等号，因此，当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$。

(2)因为和 $x+y$ 是定值 S，有$\sqrt{xy}\leqslant\frac{S}{2}$，

所以
$$xy\leqslant\frac{1}{4}S^2。$$

当 $x=y$ 时，上式取等号，因此，当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值$\frac{1}{4}S^2$。

【例 1-17】 已知 a、b、c、d 都是正数，求证：$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant4abcd$。

证明 由 a、b、c、d 都是正数，得

$$ab+cd\geqslant2\sqrt{abcd}>0,ac+bd\geqslant2\sqrt{abcd}>0$$

即
$$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant4abcd。$$

【例 1-18】 某工厂要建造一个长方体无盖蓄水池，其容积为 4800 立方米，深为3 米，如果池底每 1 平方米的造价为 150 元，池壁每 1 平方米的造价为 120 元，问怎样设计水池才能使总造价最低，最低总造价是多少元?

解 设水池底面的一边长度为 x 米，则另一边长度为$\frac{4800}{3x}$米，又设水池总造价为 l 元。根据题意，得

$$\begin{aligned}l&=150\times\frac{4800}{3x}\cdot x+120(2\times3x+2\times3\times\frac{4800}{3x})\\&=240000+720(x+\frac{1600}{x})\\&\geqslant240000+720\times2\times\sqrt{x\cdot\frac{1600}{x}}\\&=240000+720\times2\times40\\&=297600\end{aligned}$$

当 $x=\frac{1600}{x}$时，即 $x=40$ 时，l 有最小值 297600。

因此，当水池的底面是边长为 40 米的正方形时，水池的总造价最低，最低总造价是 297600 元。

习题 1.3.1

1. 请把下列各式成立的条件填入括号内。

(1)$3a>4a$( )； (2)$3a<4a$( )；

(3)$\frac{a}{3}>\frac{a}{4}$(　　)；　　　　(4)$\frac{a}{3}<\frac{a}{4}$(　　)；

(5)$2b^2<3b^2$(　　)；　　　　(6)$4-b^2>3-b^2$(　　)。

2.用“>”或“<”填空。

(1)$(a+2)^2$ ________ $a(a+4)$；

(2)$(x+1)(x-3)$ ________ $(x-4)(x+2)$；

(3)$x\neq0$，$(x^2+1)^2$ ________ x^4+x^2+1；

(4)$a\neq b$，$(\frac{a+b}{2})^2$ ________ $\frac{a^2+b^2}{2}$。

3.用“>”或“<”填空。

(1)如果 $a<0$，$ab<0$，那么 b ________ 0；

(2)如果 $a>0$，$ab<0$，那么 b ________ 0；

(3)如果 $ab<0$，则 $a>0$ 时，b ________ 0；$a<0$ 时，b ________ 0。

4.已知 a、b、c 都是正数，求证：$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$。

5.已知 x、y 都是正数，求证：

(1)$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant2$；　　(2)$(x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)\geqslant 8x^3y^3$。

6.已知 $x\neq0$，当 x 取什么值时，$x^2+\frac{81}{x^2}$的值最小？最小值是多少？

7.一段长为 l 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，问这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大，最大面积是多少？

8.求证：在直径为 d 的圆的内接矩形中，面积最大的是正方形，这个正方形的面积等于$\frac{1}{2}d^2$。

1.3.2　一元二次不等式及解法

在初中已经学过一元一次不等式和一元一次不等式组的解法，从集合的观点来看，解一元一次不等式组，先是求出不等式组中各个不等式的解集，然后求出这些解集的交集，它就是不等式组的解集。在这一节里，我们来学习一元二次不等式的解法。

含有一个未知数且未知数的最高次幂是 2 的不等式，叫**一元二次不等式**，其一般形式为

$$ax^2+bx+c>0\ (a\neq0)$$

或者

$$ax^2+bx+c<0\ (a\neq0)$$

其解法如下：

如果左边的 $ax^2+bx+c\ (a\neq0)$可以因式分解，那么根据两个因式的乘积符号，则可转化为一个一元一次不等式组求解；如果左边的 $ax^2+bx+c\ (a\neq0)$不能因式分解或不是完全平方式，那么根据实数的性质来求解。

【例 1-19】 求下列不等式的解。

(1)$x^2-2x-3>0$；　　　　(2)$x^2<6-x$；

(3)$x^2-2x-1>0$；　　　　(4)$x^2-4x+5>0$；

(5)$x^2-4x+4<0$。

解　(1)因为 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$，从而

$$(x+1)(x-3)>0,$$

得

$$\begin{cases}x+1>0\\x-3>0\end{cases}① \quad 或 \begin{cases}x+1<0\\x-3<0\end{cases}②,$$

①的解为 $x>3$，②的解为 $x<-1$，故原不等式的解集为

$$\{x|x>3 或 x<-1\}。$$

(2)原式可变为 $x^2+x-6<0$，即

$$(x+3)(x-2)<0,$$

得

$$\begin{cases}x+3>0\\x-2<0\end{cases}① \quad 或 \begin{cases}x+3<0\\x-2>0\end{cases}②,$$

①的解为 $-3<x<2$，②的解为 $\varnothing$，故原不等式的解集为

$$\{x|-3<x<2\}。$$

(3)$x^2-2x-1=(x-1)^2-2=(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})>0$，得

$$\begin{cases}x-1+\sqrt{2}<0\\x-1-\sqrt{2}<0\end{cases}① \quad 或 \begin{cases}x-1+\sqrt{2}>0\\x-1-\sqrt{2}>0\end{cases}②,$$

①的解为 $x<1-\sqrt{2}$，②的解为 $x>1+\sqrt{2}$，故原不等式的解集为

$$\{x|x>1+\sqrt{2}或 x<1-\sqrt{2}\}。$$

(4)$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$，不论 x 是任何实数，$(x-2)^2+1$ 都大于 0，故原不等式的解集为 $x\in\mathbf{R}$。

(5)$x^2-4x+4=(x-2)^2$，因为任何实数的平方都不可能为负，因此原不等式无解，即为空集。

习题 1.3.2

解不等式。

1. $x^2-5x+6<0$；　　　　2. $x^2-x-12>0$；

3. $x^2-9\leqslant 0$；　　　　4. $(x-2)^2\leqslant 9$；

5. $3x^2<7x-2$；　　　　6. $6x^2+x\geqslant -2$；

7. $-x^2+2x-3>0$；　　　　8. $x(x-1)<x(2x-3)+2$。

1.3.3　分式不等式及解法

我们在解一些不等式的过程中常常见到如下一些形式：

$$\frac{x-1}{3-2x}<0,\qquad \frac{2x+5}{x-2}\geqslant 0,\qquad \frac{1}{2+x}+\frac{1}{3-x}<\frac{3}{x+1}。$$

这些不等式的特点是：不等式所包含的代数式中有分式，我们将这样的不等式叫做分式不等式。