

数学教育论集

张君达 编著

机械工业出版社



ZJD-2
/
G6

数学教育论集

张君达 编著



机械工业出版社

(京)新登字054号

本书系作者自1980年以来，数学教育研究的部分成果的汇集。

全书共分三篇：数学教育的理论与实验；数学的发展与数学教育发展之间的联系；数学奥林匹克的实践与认识。

书中选录了作者在国际数学教育大会、四国数学教育会议、日中数学教育会议以及国内有关学术会议上宣读，或发表的或未发表的论文。论文所及反映了数学教育研究的三个方面，其特点是观点新颖、材料丰富、立论严谨、叙述简明。

本书可作为指导高等师范院校数学系学生毕业论文的参考书，也可作为数学教育工作者及数学教育方向的研究生的研究文献。

数学教育论集

张君达 编著

*

责任编辑：张淑琴，责任校对：黄薇

封面设计：方芬，版式设计：王颖

责任印制：王国光

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

邮政编码：100037

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092^{1/32}$ · 印张 $9^{3/8}$ · 字数 199 千字

1993年7月北京第1版·1993年7月北京第1次印刷

印数 001—920 · 定价：11.80元

*

ISBN 7-111-03584-4/G·187

序

数学，作为学校教育中的一门学科，它的教育作用，随着社会的发展，在不断地而且迅速地增大着。以致在今日的学校中，它已成为最重要的学科之一了。

回顾数学教育发展的历史，长期以来均以使学生牢固掌握数学基础知识、熟练数学应用的基本技能为首要目的。这就是说数学的最主要的教育作用，就在于使学生学好数学的基础知识及其应用的基本技能——当然，是适应社会发展需要的知识和技能。本世纪60年代初，国际上虽曾进行过一次规模较大的数学教育改革实验，实际上只是为适应社会发展的需要，进行的数学教材改革的实验（未成功）。其本质仍是把数学教育的最主要的作用放在使学生学好数学的基础知识及其应用的基本技能上。

70年代在国外以及相应的80年代初在国内，对数学教学的要求提高了一大步，这就是把培养学生的数学能力，也作为数学教学的主要目的之一。这也说明，数学教学具有培养学生数学能力的作用；在数学教学中，应该结合数学知识与技能的教学，充分发挥培养学生数学能力的作用。这在数学教育发展的历史上，可以说是一种不小的变革。因而对数学教育研究者和数学教师，便提出了一系列的数学教育改革的问题。如教材内容如何确定、课本如何编写；教学过程如何设计；教学方法如何选择；等等，都已成为亟待研究并要付诸实施的问题了。

北京师范学院教育科学研究所张君达副所长从70年代末便开始了数学教育改革的研究与实验工作。十几年来已取得了不少的研究成果。为了在数学教育改革的研究中，向广大的数学教育研究者和数学教师同仁们提供参考，最近在所撰的论文中，挑选并整理出23篇编辑成书，定名为《数学教育论集》，希望借此与同仁们相互切磋，共同研讨，以使数学教育改革的方向，得以正确而深刻的认识；数学教育改革的理论，得以充实而完善的阐述。

这部《论集》划分为三大篇。第一篇数学教育的理论和实验；第二篇数学的发展与数学教育发展间的联系；第三篇数学奥林匹克的实践与认识。

在第一篇中，首先安排了《关于数学本质的思考》一文。这是从数学教育的角度对通常所说的数学特点的分析，是研究数学教育的主要基点之一。其次安排了《关于数学教育中的三个基本原理》一文。这是按照数学的特点，根据教育理论以及数学教学的要求，提出的进行数学教育及其不断改革应遵循的、主要的理论基础。正是在这一篇论文的基础上，经过进一步理论研究的教学实验，才引出了前一篇反映数学特点的《关于数学本质的思考》的研究论文。再次安排了《学习理论在数学教育学中的地位与作用》一文。文中反映了君达同志在研究与进行数学教育实践中，对理论指导的重要性的体会。这是一篇从理论上对应该与如何运用理论去指导数学教育研究与实践的研究成果。

理论指导实践，而理论又来自于实践。为此，第一篇中安排的第4、5、6、7篇论文，可谓论述数学教育一般理论所依据的、实践基础的几个侧面。当然，每一篇都反映了某一侧面的研究成果。第4篇《关于题型教学的探讨》，是

有鉴于在数学教学中，使学生解答习题的作用，与其它学科中使学生解答习题的作用不尽相同，更有它特殊的重要作用而引出的，是关于为了充分发挥数学习题的教育作用，则数学习题的结构或者说模式，是否应有一般规律可循，以及在教学中如何运用等问题的初步探索。第5篇《关于直观图形的解析》，是鉴于长期以来，在数学教学中，不论在知识与技能教学上还是在学生能力培养上，对于发挥直观图形的教育作用均感不足而引出的，是关于直观图形的教育作用，以及在教学中如何发挥这一教育作用的初步研究成果。

从整体上研究数学教育应依据不同教学阶段的数学教育的特点。第一篇中第6、7两篇论文，就是关于不同年级的数学教育特点研究的事例。前者是有鉴于长期以来，初中代数教学中，理论性体现得较为薄弱，为充实初中代数课中的理论性要求而进行教育改革实验的分析。文中既反映了学生初学代数时的特点，也反映了学生开始进入初中阶段后，在学习数学上与小学的衔接问题。后者是对初中二年级进行数学教育改革实验的分析。文中也反映了学生进入同时学习数学的两个分支时的一些特点。自不待言，这两篇实验总结性的论述，也是研究中、小学数学教学内容改革时的参考。

由心理学可知，学生智力的发展，既有其年龄特征，又有其环境因素——社会发展的因素。且学习各种学科的素质也有所差异。这样，在不同的历史时期，学生学习数学所能达到的一般高度，也是数学教育研究中的重要问题。第一篇的第8篇论文《中国数学早慧少年的测试与评估》，就是为研究现阶段，数学素质较高的学生，在数学学习上可能达到的高度所进行的实验及其总结性的论文。无疑，这在深入研究数学教育的过程中，对如何选择数学知识内容的问题，提

供了有价值的参考。

纵观上述,《论集》第一篇的内容,可以说是在研究数学教育和数学教育改革上,作为理论与实践的基础,所提出的部分的研究成果。

根据数学教育发展的历史,特别是本世纪60年代以来国际间进行数学教育改革的经验可知,随着社会发展的需要,学校中数学课的知识内容是要不断地更新的。但是要以“继承发展”的精神去更新。这就是说,根据社会发展的需要,以精选传统的内容为前提,而后根据需要与可能,充实新的数学知识。但也要根据需要与可能,对保留的传统内容予以新的数学思想——现代或近代的数学观点和方法的阐述。这是有重大意义的指导思想。从数学发展的历史可知,数学思想常常是在研究与解决具体数学问题中得到发展的。而数学思想的发展,对数学知识的发展又常常起着促进的作用。因此,以现代或近代的数学思想阐述教学中保留的传统内容,也蕴涵着促进数学与数学思想发展的因素,更何况以新的数学思想阐述数学理论知识时,更具有使学生深刻理解理论实质,以及提高他们的数学观点的作用了。而这些又都是符合要在数学教学中充分培养学生数学能力的意图的。然而,贯彻这项教学要求的条件,首先在于如何以现代或近代数学思想阐述传统数学理论知识的研究。《论集》第二篇的内容,就是君达同志从研究以现代或近代数学思想阐述初等数学理论知识的成果中,选出的五篇论文。

第二篇的五篇论文,可以分为两部分。第一部分由第1、2、3篇组成,即《关于函数的近代数学基础的探讨》、《“代数”、“方程”、“函数”刍议》和《数的概念的扩充与进位制的发展》。这是以近代数学思想研究与阐述中学数

学课中重点的也是基础的内容的事例。第二部分由第4、5两篇论文组成，即《扩充域与不动点原理浅析》和《关于非欧几何中的“模型”的认识》。这又是以现代数学的思想、以传统的数学理论知识为例，进行阐述的事例；是针对初等数学，从基础上以现代数学思想论述的两项研究成果。

因此，第二篇的内容也可以说，既是为研究中学数学教育内容的改革，也是为高等师范院校数学系的“初等数学研究”课的改革，所提供的参考。

如前所述，在不同历史时期，学生学习数学所能达到的一般高度，是有所不同的。研究现阶段数学素质较高的学生在数学学习上可能达到的高度，也是有重要意义的。它可在研究数学教育内容的改革中，作为估计学生可能接受的数学理论知识上限的依据，举办数学竞赛——数学奥林匹克，其目的在于及早发现数学素质较高的学生，为国家输送更多的、在数学上可以成材的后备力量；同时也促进数学教育向前发展而从数学竞赛所起的作用来说，它也起到了研究现阶段数学素质较高的学生在数学学习上可能达到的高度的作用。然而，自1978年在国内恢复数学竞赛活动以来，虽然在各个方面发挥了一定的作用，特别是在几届国际数学奥林匹克中，取得了突出的成绩，但是数学竞赛工作，应如何更能在各个方面充分发挥它应发挥的作用，还是有必要在实践总结的基础上，从理论上作进一步的探讨的。君达同志自1978年以来，便参与了各级的数学竞赛工作。并且在实践的基础上，对数学竞赛作了大量的理论性的研究。《论集》第三篇的内容就是从研究成果中，选出的10篇论文。

第三篇中，首先安排的两篇论文是《数学奥林匹克的实

践与认识》和《数学奥林匹克的命题原则和方法》，这两篇论文可以说是关于举办数学竞赛活动、进行数学竞赛工作的指导思想的研究。前者是从理论上对数学竞赛的作用及其实施所作的探讨；后者则是对数学竞赛工作的核心——命题工作的理论依据，所作的研究成果。第3、4两篇论文，即《关于第31届IMO的分析与评估》和《数学奥林匹克解题思维特征初探》，是在第31届国际数学奥林匹克工作总结的基础上，所作的进一步的理论分析之作。前者主要是从命题和参加竞赛者的解答所作的科学分析和评估，文中分析了第31届国际数学奥林匹克竞赛工作的科学性，从而反映出我国参加竞赛者取得突出成绩的价值；同时也又一次地反映了作者对数学竞赛应发挥的作用的认识。后者是针对解答数学竞赛题所需的思维能力，和参加竞赛的学生具有的思维力进行分析与研究的成果。从中既可看出这两个方面的一致因素；也可看出它们的差距，从而一方面为命题的改进提供了实践的基础，另一方面也对数学素质较高的学生，进行充实培养时，提供了一定的依据。第5、6两篇论文，是进一步提高与发展数学竞赛工作的研究成果。前者可以说是属于数学教育方面的、国内外的比较教育之作。文中对国外的数学竞赛工作作了较为深入的分析。从中可以看出应“取长补短”之处。这就是说，从中可以看出我之所长而发扬之；也可看出我之所短而弥补之。因而这是一篇含有提高与发展数学竞赛的方向性的论文。后者则是第4篇论文的继续与深入之作。

第三篇的第7、8、9篇论文《筛选与枚举》、《费尔马定理及其应用》、《倒根多项式及其变换》是如何充实培养数学素质较高的学生的实例。文中既反映了如何提高学生

的数学能力，特别是给出了创造性的结论与证明；也反映了为学生充实的知识内容与他们在课内所学知识的衔接性。因而为选择充实与提高学生的知识与能力提供了可靠的参考材料。本书之末的《数学奥林匹克在中国》一文是君达同志应日本出版社之约撰写的介绍中国数学奥林匹克发展的文章。

因此，第三篇的内容，实际上既是从理论上对历届数学竞赛进行的总结；又是提高与发展数学竞赛的方向性论述；也为研究数学教育内容的改革，提供了依据。

这样，从整体上说，《论集》含有关于研究数学教育的理论基础的论述；也含有以现代或近代的数学观点和方法对初等数学理论进行的阐述；还含有从理论上对历届数学竞赛的总结，以及提高与发展数学竞赛的方向性的论述。因而，可以说，《论集》为数学教育的研究提供了理论基础；也为以现代或近代的数学观点和方法阐述初等数学提供了事例；还为数学竞赛的提高与发展提供了依据。而且不论从上述的哪个方面说来，也都为数学教育的进一步改革提供了可靠的参考。

因此，概而言之，《论集》确是一部为数学教育的研究，提供理论基础的著作。

《论集》虽然只包含君达同志的部分研究成果，但从中已能看出十几年来，君达同志在数学教育的研究上，取得的成果是很丰富的。这是可喜可贺的。而十几年来君达同志不遗余力地对数学教育进行研究，这种坚持不懈的精神和毅力，更是值得学习的。

《论集》即将付印了。为了祝贺《论集》的问世，谨作数语如上。更希望君达同志继续深入地进行数学教育的研究。

究，不断地有新的数学教育论集问世。也希望广大数学教育研究者和数学教师，以《论集》为参考，广泛地开展数学教育的研究，为提高我国数学教学的质量，发展我国数学教育作出更大、更多的贡献。

钟善基

1992年2月于北京师范大学

自序

国际数学教育委员会 (ICMI) 成立迄今已有84年的历史, 由其组织与召开的国际数学教育大会 (ICME) 共计六届。1992年8月17日到8月23日于加拿大即将召开第七届国际数学教育大会, 数学教育的研究及其发展已愈来愈受到数学家与数学教育家的重视。作为一名数学教育工作者, 我尤为关注当代数学教育的发展及其研究方向。

70年代后期, 我开始数学教育的研究与实验工作。初始, 参加张士充先生主持的“结构分析与题型设计”课题的研讨, 受益匪浅。尔后, 在“首届中日数学教育学术交流会”(1981年)上宣读论文“关于题型教学的探讨”迈出了实验研究的第一步。1982年参加了《教育研究》编辑部召开的“学科教育座谈会”, 与会的专家胡克英、江山野、冯忠良、刘国盈、温寒江等诸位先生对学科教育的研究及其发展作了很有见地的论述。1986年参加了国家教委委托山东师范大学召开的“全国高师教材教法课程建设研讨会”, 与会者重点讨论了学科教育学的对象、范畴与体系等有关问题。这两次会议对我国学科教育的研究及其发展起到一定的促进作用, 也促使我进一步开展数学教育的研究与实验工作。

《数学教育论集》摘录了80年代以来, 我或我与陶凤娟、郭春彦、吴建平、嵇燕竹、甘波等同志合作发表的论文二十三篇, 拟按三方面来反映我们的工作:

数学教育的理论与实验;

数学的发展与数学教育发展间的联系；

数学奥林匹克的实践与认识。

为客观反映当时的水平，摘录的论文没有作过多的修改。

在我进行数学教育的研究和整理《数学教育论集》文稿的过程中，得到钟善基教授无微不至的关心和帮助；梅向明教授对我的数学奥林匹克的理论与实践工作给予了必要的指导与支持。值此《论集》出版之际，谨致两位老师以及与此有关的同志以衷心的感谢。

著名书法家欧阳中石先生特为本书封面题字，谨此致谢。

殷切地期望专家、同仁与读者赐教。

张君达

一九九二年五月于北京师范学院

目 录

序

自序

第一篇 数学教育的理论与实验	1
关于数学本质的思考	1
数学教学中的三个基本原理	7
学习理论在数学教育学中的地位与作用	14
关于题型教学的探讨	22
关于直观图形的解析	30
关于在初一代数教学中加强概念教学与推理思维训练 的实验	37
关于改进初二数学教学方案的实验报告	45
中国数学早慧少年的测试与评估	54
第二篇 数学的发展与数学教育发展间的联系	63
关于函数的近代数学基础的探讨	63
“代数”、“方程”、“函数”刍议	86
数的概念的扩充与进位制的发展	103
扩充域与不动点原理浅析	111
关于非欧几何中的“模型”的认识	122
第三篇 数学奥林匹克的实践与认识	135
数学奥林匹克的实践与认识	135
数学奥林匹克的命题原则和方法	148
关于第31届IMO的分析与评估	164
数学奥林匹克解题思维特征初探	176

国际数学奥林匹克的发展与预测	186
再探数学奥林匹克解题思维特征	197
筛选与枚举	213
费尔马定理及其应用	240
倒根多项式及其变换	253
数学奥林匹克在中国	274
参考文献	282

第一篇 数学教育的理论与实验

关于数学本质的思考

在浩瀚的人类文明史册之中，作为人类智慧的一种表现形式——数学，闪烁着完美和谐的异彩。它源于现实，又超脱于现实；它奠基于直觉和意念，运用分析思考和逻辑推理工具构筑着自己的大厦。

数学的本质是什么^{〔6〕}？

要回答这一问题，就必须辩证地探究不同时期的数学发展的规律。

在19世纪下半叶，恩格斯给出了数学对象的定义：“纯数学的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系”。他还说：“但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式与关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这样我们就得到没有长、宽、高的点，没有厚度和宽度的线。”^①这一定义反映出，正像其他科学一样，数学科学的萌芽、发生及其发展都是不同程度地适应了客观的需要。数学不仅被直接应用于实践之中，而且会超越出直接应用的界限而向前发展^{〔1〕}。

① 恩格斯著，反杜林论，北京：人民出版社，1970年版，35页。

早在公元前4、5世纪的古希腊时代，毕达哥拉斯学派就提出“世界具有数学描述的形式，科学的本质就是数学。”该学派的代表学者之一柏拉图认为，“数学研究的对象来源于可感知世界，但又比可感知世界高得多。”他第一次较为完整地描述了公理化方法：“研究几何学、数学以及这一类学问的人在开始要假定偶数与奇数，各种角及其他类似的东西，把这些东西看成已知的，看成绝对的假设，不觉得需要为他们自己或别人来为这些东西加以说明，而是把这些东西当作自明的。”“从这些假设出发，通过一系列的逻辑推理而最后达到他们所要求的结果。”公元前300年问世的欧几里得的《几何原本》是柏拉图公理化思想的代表。

从毕达哥拉斯开始，直至19世纪为止的大多数科学家都坚持“科学产生于用数解释自然这一信念。”在人类最古老的书写形式的数学文献中，无论是公元前约3000年的巴比伦人的楔形文字泥版，还是公元前约1800年的埃及纸草书都反映了数学源于丈量土地，计数方法等实践需要的事实。尔后，数学又作为天体力学、物理学、电磁学等科学理论的工具而起作用。这一时期，人们普遍认为数学是一门自然科学。

19世纪20年代以后，数学的进展跨入了新的时期。非欧几何、抽象代数的产生、分析的严密化运动使得人们对数学研究对象有了进一步的认识。非欧几何向人们宣告：欧氏几何的空间形式并不是唯一的空间形式。抽象代数则表明，不是仅有数才可以进行运算，代数主要研究再次抽象得到的各种结构问题。分析的严密化运动、四元数及高维空间的引进等使得数学研究的对象不再局限于现实世界的空间形式和数量关系。人们开始认识到无论是形式，还是内容，数学已不是一门自然科学，而是与自然科学处于同等地位的大部类科