大专院校规划教材

主编 王积芳

Jingji Shuxue

经济数学

广东高等教育出版社

经济数学

主　编：王积芳
副主编：丁淑纯　李庆桃

广东高等教育出版社
·广州·

内容提要

本书根据教育部制订的《经济数学基础课程教学基本要求（草案）》编写而成。本书共分七章：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学。

本书可供普通高等院校、高职高专、成人高校、继续教育学院使用，也可供报考专升本的学生使用。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学/王积芳主编．—广州：广东高等教育出版社，2006.11
ISBN 7-5361-3325-1

Ⅰ．经… Ⅱ．王… Ⅲ．经济数学-高等学校-教材 Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第021173号

广东高等教育出版社出版发行
地址：广州市天河区林和西横路
邮编：510500　　电话：87553335
广东信源彩色印务有限公司印刷
开本：787毫米×1 092毫米　1/16开本　印张：13.25　字数：312千字
2006年11月第1版　2006年11月第1次印刷
印数：1～3 000册
定价：21.30元

前　言

本书遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，基本概念讲解清晰，在保证逻辑性的基础上，适当减少数理证明；重视对学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

该书特点如下：

①在内容编排上，注重严密性、逻辑性及思想方法与实际应用的密切结合；通俗易懂，既便于教师教学，又便于学生学习。

②选例典型、特别、丰富。每章节后都编排了大量、丰富的练习题，其中既有基础题，又有提高题。综合题灵活多样，分 A，B 组，能更好地满足不同层次学生的要求（A 组是基本题，B 组是提高题和综合题）；并配有部分习题的参考答案与提示。

③带有 * 号的根据需要作为选学内容。

本书由王积芳担任主编，由丁淑纯、李庆桃担任副主编。

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2006 年 11 月

目　录

第一章　函　　数

函数不仅是数学的基础概念之一，也是微积分学中的一个重要的研究对象.

函数是研究变量之间的依赖关系. 在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中，经常会遇到函数这种依赖关系.

本章主要介绍函数的概念、性质和分类.

第一节　实数概述

《经济数学》主要是在实数范围内研究函数等问题，因此，在学习函数之前，首先简单复习与实数有关的基础知识.

一、实数的定义

实数由有理数和无理数组成。有理数是指能表示为两个整数相除形式的数，包括整数、分数、有限小数、无限循环小数。如 2 000，$-\dfrac{7}{10}$，1. 572 121 21…. 无理数是指无限不循环小数，即不能表示为两个整数相除形式的数. 如：π，$-\sqrt{3}$，lg 3 ，ln 3，1. 523 579….

实数按照以下方法分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

二、数轴与绝对值

规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴. 一般情况下，从左向右为正方向(图 1－1).

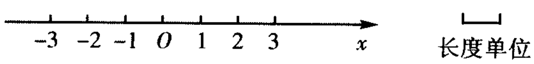

图 1－1

数轴上的 O 表示原点，原点右边的

点表示正数，原点左边的点表示负数．数轴上的点与全体实数是一一对应的，即对任意一个实数 a，在数轴上一定能找到一点与它对应．反之，对数轴上的任意一点，一定存在一个实数 a，它能表示该点在数轴上的位置．

一个数的绝对值就是数轴上表示这个数的点到原点的距离，记作 $|a|$．

正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，0 的绝对值是 0．

$$|a| = \begin{cases} a, & a>0; \\ 0, & a=0; \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

在从左到右为正向的数轴上，任意两点所表示的数，右边的数总是比左边的数大．因此，在实数中正数大于零，负数小于零，正数大于负数．两个正数相比较，绝对值大的正数大，而两个负数相比较，则是绝对值大的负数小．

三、区间与邻域

设 $\mathbf{R}$ 为实数集合，a，$b \in \mathbf{R}$，且 $a<b$，将满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，叫做以 a，b 为端点的开区间．记作 (a, b)，即 $(a, b) = \{x | a<x<b\}$，如图 1－2 所示．

图 1－2

将满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，叫做以 a，b 为端点的闭区间．记作 $[a, b]$，即 $[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$，如图 1－3 所示．

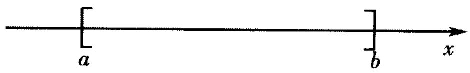

图 1－3

将满足不等式 $a<x \leqslant b$（或 $a \leqslant x<b$）的所有实数 x 的集合，叫做以 a，b 为端点的半开区间．记作：

①$(a, b]$，即 $(a, b] = \{x | a<x \leqslant b\}$，如图 1－4 所示．

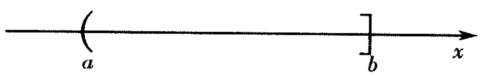

图 1－4

②$[a, b)$，即 $[a, b) = \{x | a \leqslant x<b\}$，如图 1－5 所示．

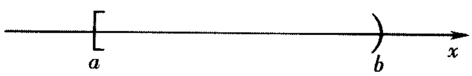

图 1－5

以上四种区间为有限区间．有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$ 叫做区间的长

度. 几何上表示点 a 与点 b 间的线段，开区间不包括端点，闭区间包括端点.

引入记号"$+\infty$"(读作"正无穷大")和"$-\infty$"(读作"负无穷大")，可以有以下几种无限区间：

$(a, +\infty)=\{x|a<x\}$　　　　$[a, +\infty)=\{x|a\leqslant x\}$

$(-\infty, b)=\{x|x<b\}$　　　　$(-\infty, b]=\{x|x\leqslant b\}$

$(-\infty, +\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$，即实数集合.

在数轴上以点 x_0 为中心，长度为 $2\delta(\delta>0)$ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)=\{x||x-x_0|<\delta, \delta>0\}$，叫做点 x_0 的 δ 邻域，简称点 x_0 的邻域，将 $(x_0-\delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0+\delta)$ 分别叫做 x_0 的左邻域和右邻域. 一般地，δ 是一个很小的正数.

例如：$|x-3|<0.2$ 是以 $x_0=3$ 为中心，长度为 0.4 的邻域，也就是开区间 $(2.8, 3.2)$. 如果在数轴上的 δ 邻域内挖去点 x_0，所得集合 $\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$，称为 x_0 的去心邻域. 将 x_0 的去心邻域表示为区间 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$.

第二节　函数概念

一、变量与常量

变量就是变化着的量，即在某一过程中可以取不同数值的量，如商品的销售量、人口的数量、一天的温度等等.

常量，就是在某一过程中，始终取同一数值的量.

二、函数的定义

在现实生活中，无论是自然现象还是社会现象，常常会同时出现几个变量，这些变量并不是彼此独立变化的，而是按照一定的规则互相联系. 函数就是变量间这种确定的依赖关系的一种数字描述.

本节只讨论两个变量的情形，然后再给出函数的定义.

例 1　在平面直角坐标系 xOy 中，方程 $y=x^3$ 表示了曲线上点 (x, y) 的两个坐标之间的依赖关系.

给定 $x=x_0$，就确定了 y 的对应值 $y=x_0^3$，如图 1-6 所示.

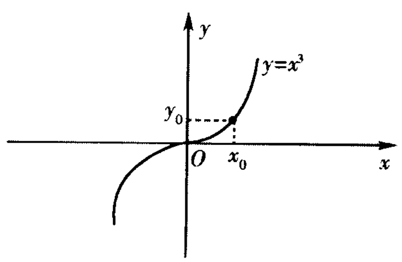

图 1-6

例 2　人口数随时间的变化而变化，人口数与时间之间存在一种依赖关系.

例 3　在自由落体过程中，物体垂直下落的距离与时间的关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$. 其中 t 为时间，g 为重力加速度. 在这个过程中，时间 t 和距离 s 为变量，

重力加速度 g 为常量. 但严格地说, g 也应当是一个变量. 因为每点的重力加速度 g 与该点到地心的距离有关. 然而, 如果在一个运动过程中, 物体垂直下落的距离不是很大, 那么重力加速度 g 的变化就很小, 因而可以近似地看作常量.

人们对于函数的认识是随着科学技术的发展以及人们对客观世界的认识而不断深化的. 17 世纪人们所理解的函数, 基本上就是曲线. 直到 18 世纪, 占统治地位的思想仍然是认为函数是由一个公式表示的, 这样的认识基本上局限于初等函数. 然而, 随着科学技术的发展, 不断地出现新的类型的函数. 数学家们必须为函数下一个一般的定义, 这样的定义应当包括已知的所有类型的函数. 无论是对于数学的理论, 还是对于数学的应用, 这都是一件非常重要的事情. 数学家们为此探索了几个世纪, 直至 1837 年, 德国数学家狄里克雷(1805—1859 年)才对函数给出了一个与现代十分接近的定义. 他指出: 如果对于给定区间上的每一个 x 的值, 有唯一的 y 值与其对应, 则 y 就是 x 的一个函数. 狄里克雷还强调指出, 在整个区间上, y 是否按一种或多种规律依赖于 x, 以及 y 依赖于 x 的方式能否用数学表达式来表达, 都是无关紧要的.

对于一个自变量的函数(即一元函数), 给出下述定义:

定义 1.1 **设 x, y 是两个变量, x 取值于实数集合 D, 如果对于每一个 $x \in D$, 都可以按照某一给定规则 f, 唯一地确定一个 y 值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为: $y=f(x)$, $x \in D$.**

其中, x 称为自变量, y 称为因变量. 自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域, 因变量 y 的集合 M 称为函数的值域, $M=\{y \mid y=f(x),\ x \in D\}$.

为了进一步理解函数的定义, 再作以下几点说明:

定义中的"f"表示变量 x 与 y 之间的确定的依赖关系, 是一种抽象的函数符号. 它是一种对应, 也可以采用别的记号来表示, 如: $y=y(x)$, $y=\varphi(x)$ 等. 当同时表示几个函数时, 通常取不同的符号代表不同的函数.

在函数定义中, 有两个基本要素, 一是自变量的取值范围(定义域), 另一个是对应规则. 因此, 只有当自变量有相同的定义域, 而且有相同的对应规则时, 才能说这两个函数是相同的. 如函数 $y=x^2$, $x \in (2, 3)$ 与 $y=x^2$, $x \in (-2, -3)$ 虽然有相同的对应规则, 但由于 x 的定义域不同, 所以它们是不相同的函数.

三、函数的定义域

在研究函数时, 必须注意函数的定义域, 因为只有当自变量在定义域内取值时, 函数关系式才有意义.

对于一个用数学式子表示的函数, 其定义域就是使这个式子有意义的自变量的取值范围.

例 4 确定函数 $y=\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{(x-1)(x+3)}$ 的定义域.

解 要使该式有意义, 必须满足

$$\begin{cases}2-x^2\geqslant 0,\\ x-1\neq 0,\\ x+3\neq 0.\end{cases}$$

解得 $$|x|\leqslant\sqrt{2},\ x\neq 1,\ x\neq -3.$$

所以，函数的定义域 D 为：$[-\sqrt{2},\ 1)\cup(1,\ \sqrt{2}]$.

在这个集合中每给定一个 x，就可以由表达式计算得到函数 y 的一个值.

如果讨论的函数是由实际应用问题提出来的，它的定义域应由自变量的实际意义来确定.

例 5　用边长为 $a(a>0)$ 的正方形铁片，从四个角各剪去边长为 x 的小正方形，做一个无盖铁盒，其体积 V 是 x 的函数，即 $V=x(a-2x)^2$.

要考虑问题的实际意义，该函数的定义域应为 $D=(0,\ \frac{a}{2})$.

四、函数的表示方法

函数关系可用不同的方法来表示，常用的表示法有解析法、列表法和图象法. 其中解析法是微积分学中函数的主要表示方法，图象法是直观了解函数的重要手段.

1. *列表法*

所谓列表法就是将自变量的一组常数值与其对应的一组函数值列成一个数表，其优点是便于查找函数值. 例如：对数函数表、三角函数表、平方根表等.

2. *图象法*

所谓图象法就是用坐标平面上的点或曲线来表示纵坐标 y 是横坐标 x 的函数，如图 1－7 所示.

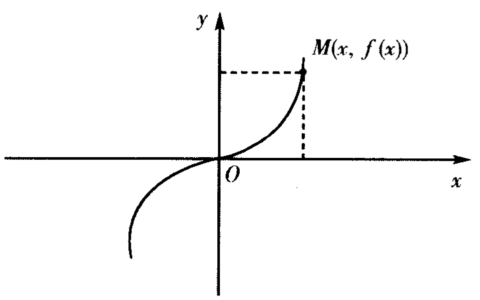

图 1－7

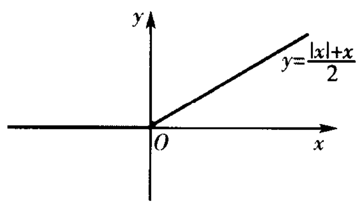

图 1－8

例 6　函数 $y=\frac{|x|+x}{2}$ 的图象如图 1－8 所示，这个函数可以表示为 $\begin{cases}y=x, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$

例 7　函数 $y=[x]$，这里 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，称为 x 的整数部分，即若 $x=k+r$，其中 k 为整数，$0\leqslant r<1$，则 $[x]=k$，如图 1－9（见下页）所示.

用图象表示函数的优点是直观，便于观察函数的整个变化趋势. 几何图形可以帮助我们理解微积分中的概念、结论和方法.

3. 解析法

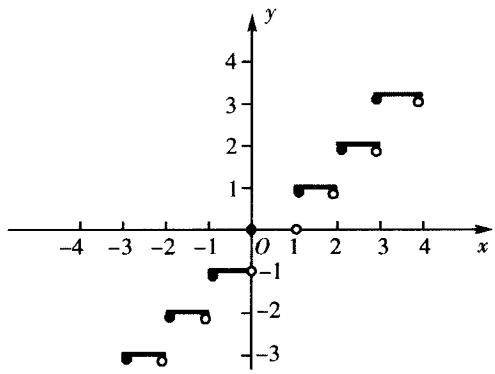

图 1－9

所谓解析法就是将自变量与因变量之间的关系用方程表示．这些方程通常称为函数的解析表达式．例如：

① $y = x^2 - 1$.

② $y = \cos x + 2$.

③ $y + \sin y = x + \lg x$.

④ $y = \begin{cases} 2x, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

这些都是函数 y 的解析表达式．

下面分三种情况进行深入讨论．

(1)式子①和②中，函数 y 已由 x 的解析式直接表示出来．这种形式的函数称为显函数．

(2)式子③中，y 未由 x 的解析式直接表示出来，所以不是显函数．这种形式的函数称为隐函数．

一般地，若一个函数的自变量 x 和因变量 y 的对应关系是由一个二元方程 $F(x, y) = 0$ 来确定的，且 $y = y(x)$，则称这个函数为隐函数．

显然，隐函数是函数的更一般的形式．

(1)显函数可以看成隐函数．

(2)一个隐函数未必总能化成显函数的形式．

(3)在函数的解析表示法中，有些函数在其定义域的不同范围，具有不同的解析表示式，这种函数称为分段函数．例如式子④中所给的函数就是一个分段函数．应该注意的是，分段函数是用几个解析式子合起来表示一个函数，而不是表示几个函数．

下面再列举两个分段函数的例子．

例 8　函数

$$y = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 0; \\ 1 + x^2, & x < 0 \end{cases}$$

是一个分段函数．分段函数的定义域是各个分支函数定义域的并集．该函数的定义域 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，如图 1－10(见下页)所示．

例 9　函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

是一个分段函数，其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，此函数称为符号函数，如图 1－11(见下页)所示．

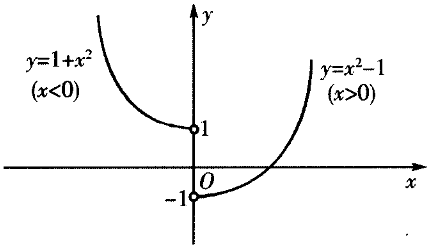

图 1－10

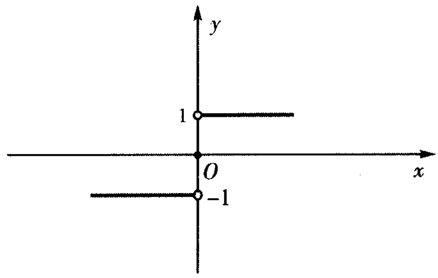

图 1－11

五、反函数

在函数定义中，有两个变量，一个叫自变量，一个叫因变量，因变量随着自变量的变化而变化. 但在实际问题中，自变量与因变量并不是绝对的，要根据研究的问题而定. 在一定的条件下，函数的自变量与因变量的地位可以变换，这就得到一个新的函数. 这个函数叫做原来那个函数的反函数. 一般地，有下列定义：

定义 1.2　设给定函数 $y=f(x)$，定义域为 D，值域为 M，如果对 M 中的任一 y 的值，按关系式 $y=f(x)$，总有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应，这样就得到一个以 y 为自变量的函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，称 $y=f(x)$ 为原始函数.

一般地，$y=f(x)$ 的反函数记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in M$.

因习惯上用字母 x 表示自变量，用字母 y 表示因变量，所以总是将 $y=f(x)$ 的反函数表示为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$.

在同一坐标系中，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

特别强调：并非任何函数都具有反函数，自变量与因变量存在一一对应关系的时候，这样的函数才存在反函数；原始函数与其反函数的定义域、值域交叉对应（即原始函数的定义域是其反函数的值域，原始函数的值域是其反函数的定义域）.

例如：$y=x^2$，$x\in D=(-\infty,+\infty)$，其值域 $m=[0,+\infty)$，对每一个 $y\in[0,+\infty)$，在 D 中有两个 x 的值 $x=\pm\sqrt{y}$，使得 $x^2=y$，故在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $y=x^2$ 不存在反函数.

例 10　求函数 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$ 的反函数，并求反函数的值域.

解　由原式解出 x，得

$$y(x-3)=2x-5,$$

$$x=\frac{3y-5}{y-2}.$$

由于原始函数的定义域、值域与其反函数的定义域、值域有特殊的对应关系，所以原始函数定义域 $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ 是其反函数的值域.

六、复合函数

在实际问题中，有时两个变量之间的联系并不是直接的，而是通过另一个变量联系

起来的. 函数关系是可以传递的，如果 y 是 u 的函数，而 u 又是 x 的函数，那么，在一定条件下，y 也是 x 的函数.

定义 1.3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 的联系也是 x 的函数. 我们称这样的函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

复合函数可以推广到含有多个中间变量的情形.

例 11　设函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u\in[0,+\infty)$，且 $u=\varphi(x)=1-x^2$，$x\in[-1,1]$，则 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2}$ 是一个定义在 $[-1,1]$ 上的复合函数.

例 12　函数 $f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=\sin x-2$，试求复合函数 $f[\varphi(x)]$.

解　$f[\varphi(x)]=f(\sin x-2)=\sqrt{\sin x-2}$.

由于 $|\sin x|\leqslant 1$，即 $\sin x-2\leqslant -1$，则 $\sqrt{\sin x-2}$ 没有意义. 虽然复合函数在形式上有一个表达式，但因其定义域是一个空集，故这个复合函数实际上并不存在.

例 13　设 $f[\varphi(x)]=\sqrt{\varphi(x)}+1=\sqrt{x^2}+1=|x|+1$，其定义域为 $D_1=(-\infty,+\infty)$.

设 $\varphi[f(x)]=[f(x)]^2=(\sqrt{x^2}+1)^2=x^2+2\sqrt{x^2}+1$，其定义域为 $D_2=[0,+\infty)$.

例 14　设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解　将 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ 代以 $f(x)$ 中的 x，得

$$f[f(x)]=\frac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}.$$

再将 $f[f(x)]=\dfrac{x}{1-2x}$ 代以 $f(x)$ 中的 x，得

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-\dfrac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}.$$

在以后的讨论中，还经常要对函数进行分解，即将一个函数看成是由若干个不含有中间变量的函数复合而成的.

例 15　下列函数由哪些函数复合而成?

(1) $y=\ln\arcsin x^3$;　　(2) $y=e^{\tan\frac{1}{x}}$.

解　(1) 由外层函数向内层函数分解，就是按由自变量 x 确定因变量 y 的运算顺序进行.

令 $v=x^3$，令 $u=\arcsin v$，$y=\ln u$，于是，函数 $y=\ln\arcsin x^3$ 是由函数 $y=\ln u$，$u=\arcsin v$，$v=x^3$ 复合而成的.

(2)由外层函数向内层函数分解.

令 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{1}{x}$，可知 $y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成的.

七、函数关系的建立

在实际应用中，经常需要列出变量之间的函数关系，也就是说，建立函数关系往往是用数学方法解决实际问题的第一步. 下面举几个例子，说明如何根据实际问题中所给的条件列出需要的函数关系.

例 16　设某商店以每件 a 元的价格出售某种商品，但若顾客一次购买 50 件以上，则超过 50 件的部分以 $0.9a$ 元的优惠价出售，试将一次成交的销售收入表示为销售量的函数.

解　用 x 表示一次成交的销售量，R 表示一次成交的销售收入. 于是，当销售量 x 不超过 50 时，销售收入为 $R=ax$；当销售量 x 超过 50 时，销售收入为 $R=50a+0.9a(x-50)$. 因此，一次成交的销售收入 R 是销售量 x 的一个分段函数.

$$R(x)=\begin{cases}ax, & x\leqslant 50;\\ 50a+0.9a(x-50), & x>50.\end{cases}$$

例 17　在一半径为 R 的球内作一内接圆柱体，则圆柱体的体积 V 是其高 h 的函数. 写出该函数表达式，并指出它的定义域.

解　设圆柱半径为 R，高为 h，如图 1－12 所示.

则　$$V=\pi\left[R^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]h,\ h\in(0,\ 2R).$$

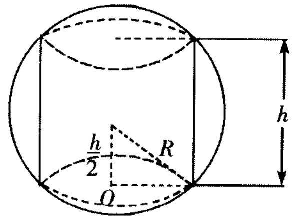

图 1－12

第三节　函数的几何性质

一、奇偶性

定义 1.4　设 $y=f(x)$ 的定义域是以原点为对称的区间 D，对 $x\in D$，即

(1)若对任意 $x\in D$，必有 $-x\in D$，且 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数；

(2)若对任意 $x\in D$，必有 $-x\in D$，且 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数；

(3)若 $f(-x)\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

性质：

(1)奇函数与奇函数之和仍为奇函数；

(2)偶函数与偶函数之和仍为偶函数；

(3)奇函数与奇函数的乘积是偶函数；

(4)偶函数与偶函数的乘积是偶函数；

(5)一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

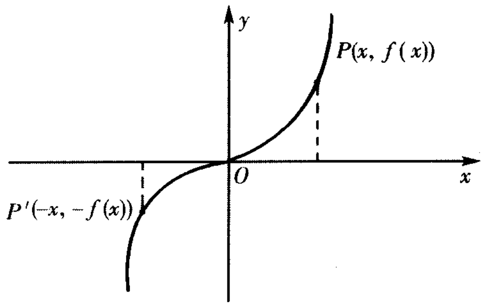

图 1－13

奇函数的图象关于原点对称，即如果点 $P(x, f(x))$ 在函数的图形上，则点 $P'(-x, -f(x))$ 也在此图形上，如图 1－13 所示.

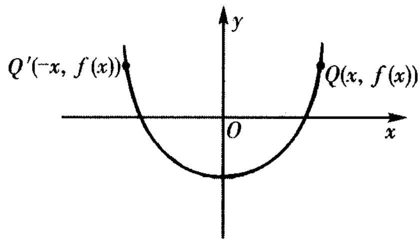

图 1－14

偶函数的图象关于 y 轴对称，即如果点 $Q(x, f(x))$ 在此图形上，则点 $Q'(-x, f(x))$ 也在此图形上，如图 1－14 所示.

例 1　确定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$；

(2) $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}$；

(3) $f(x)=1+\sin 2x$.

解　(1)已知函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a[\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)] \\ &= \log_a(\sqrt{x^2+1}-x) \\ &= \log_a\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+1} \\ &= \log_a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= -\log_a(\sqrt{x^2+1}+x) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

所以
$$f(-x)=-f(x),$$

即 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$ 为奇函数.

(2)已知函数的定义域是 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{\frac{1}{(-x)^2}} = e^{\frac{1}{x^2}} \\ &= f(x), \end{aligned}$$

所以
$$f(-x)=f(x),$$

即$f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}$是偶函数.

(3)已知函数的定义域$(-\infty,+\infty)$,

因为

$$f(-x)=1+\sin(-2x)$$
$$=1-\sin 2x,$$

又　$$f(-x)\neq f(x),$$

且　$$f(-x)\neq -f(x),$$

所以$f(x)=1+\sin 2x$是非奇非偶函数.

二、单调性

定义1.5　设$y=f(x)$为定义在区间D上的函数，x_1，x_2为D中的任意两点.

(1)如果当$x_1<x_2(x_1>x_2)$，恒有$f(x_1)<f(x_2)[f(x_1)>f(x_2)]$，则称$f(x)$为$D$上的单调增加函数，简称为增函数. 如图1-15所示.

(2)如果当$x_1<x_2(x_1>x_2)$，恒有$f(x_1)>f(x_2)[f(x_1)<f(x_2)]$，则称$f(x)$为$D$上的单调减少函数，简称为减函数. 如图1-16所示.

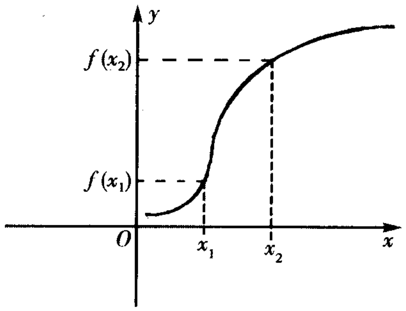

图1-15

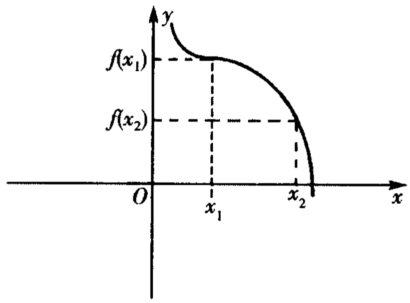

图1-16

单调增函数与单调减函数统称为单调函数.

应该说明的是：函数的单调性与单调区间是密不可分的，例如$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内不是增函数，也不是减函数，但它在$(-\infty,0)$内是减函数，而在$(0,+\infty)$内是增函数.

三、有界性

定义1.6　对函数$f(x)$，$x\in D$，如果存在一个正数M，对于所有的$x\in D$，恒有$|f(x)|\leqslant M$成立，则称函数$f(x)$在D上是有界的，否则称$f(x)$在D上是无界的.

几何意义：

显然，在几何上，有界函数$f(x)$的图形总是介于两条水平的直线$y=m$和$y=M$(如图1-17，见下页)或$y=\pm M$(如图1-18，见下页)之间.