



2008年 李永乐·李正元
考 研 数 学 8

轻轻松松考高分

线性代数·概率论与数理统计篇
——历年试题分类解析

○ 主编 清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社



2008 年李永乐·李正元考研数学⑧

轻轻松松考高分

线性代数·概率论与数理统计篇

——历年试题分类解析

主编 清 华 大 学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

轻轻松松考高分. 线性代数、概率论与数理统计篇:名师历年试题分类解析/李永乐,袁荫棠等编.

—北京:国家行政学院出版社,2003.2

ISBN 978-7-80140-270-7

I. 轻... II. ①李... ②袁... III. ①线性代数-研究生-入学考试-解题 ②概率论-研究生-入学考试-解题 ③数理统计-研究生-入学考试-解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 004646 号

书 名 轻轻松松考高分. 线性代数·概率论与数理统计篇:历年试题分类解析
作 者 李永乐 袁荫棠
责任编辑 李锦慧
出版发行 国家行政学院出版社
(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)
电 话 (010)88517082
经 销 新华书店
印 刷 北京市朝阳印刷厂
版 次 2007 年 2 月北京第 5 版
印 次 2007 年 2 月北京第 1 次印刷
开 本 787 毫米×1092 毫米 16 开
印 张 15.5
字 数 400 千字
书 号 ISBN 978-7-80140-270-7/O·24
定 价 20.00 元

前 言

(一)

对于数学考试而言,试卷本身就是一份量表,它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料。每一道试题,既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势,因此,对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌,便于广大考生了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,而且通过反复做历年试题,发现问题,找出差距,以便广大考生能及时查漏补缺,通过研究历年试题,也便于广大考生明确复习方向,从而从容应考,轻取高分。

(二)

本书汇集了1989年—2007年历届全国硕士研究生入学统考试线性代数、概率论与数理统计试题,而且对所有试题均给出了详细解答,并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的,具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本套书在对历年考研数学线性代数、概率论与数理统计试题逐题解答的基础上,每题都给出了分析或评注,不仅对每题所考知识点或难点进行了分析,而且对各种题型的解法进行了归纳总结,使考生能举一反三,触类旁通;同时通过具体试题,指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误,并点评错因,使考生引以为戒。

本套书把历年考研数学试题依据考试大纲的章节顺序,按试题考查内容分章,这样与考生复习数学的顺序保持一致,便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写:

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例,便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起,并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到:该题型考过什么样的题目,是从哪个角度来命题的,并常与哪些知识点联系起来命题等等,从而掌握考研数学试题的广度和深度,做到复习时目标明确,心中有数。而且把历年同一内容的试题放在一起,我们可以发现近几年的考题中有许多与往年试题类似,因此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生数学考试是不言而喻的。

另外,每种题型后附有**综述**——归纳总结该题型解题思路、方法和技巧,并举例说明。

小结——梳理本章知识结构,归纳本章重要知识点的具体内容及相关结论(公式、定理)。

(三)

本套书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者

建议准备报考研究生的考生在阅读本书时,应先看《数学考试大纲》,以便明确考试的有关要求,接着去认真阅读有关教材和参考书(推荐考生认真阅读由国家行政学院出版社出版、李永乐、李正元、袁荫棠等编写的《考研数学复习全书》(理工、经济类),该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细,各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位,与考研命题思路极其吻合),复习完后,再来看本书的试题,以检验自己的水平。在看本书试题时,应该先自己动手做题,然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么会做错,可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2~3遍,直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

再提一个建议供参考。关于考题重复的问题,需要说明的是:这种重复不仅在理工类或经济类内部,而且也在数学一至四之间重复。近年来多次出现过原来理工类试题拿到经济类中做考题的情况。这就是说,经济类考生也应该了解理工类试题。因此,我们建议:无论理工类考生还是经济类考生,都应认真研读本书。

(四)

参加本书编写的有:清华大学 李永乐、中国人民大学 袁荫棠。

本书在编写、编辑和出版过程中,尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神,高质量、严要求,但由于时间紧、任务重,加上我们水平有限,难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2007年2月

目 录

上篇 线性代数

第一章 行列式	(1)
编者按	(1)
一、数字型行列式的计算	(1)
二、抽象型行列式的计算	(5)
三、行列式 $ A $ 是否为零的判定	(10)
第二章 矩阵	(12)
编者按	(12)
一、矩阵运算	(12)
二、伴随矩阵	(16)
三、可逆矩阵	(20)
四、初等变换	(26)
五、矩阵方程	(29)
六、矩阵的秩	(36)
第三章 向量	(42)
编者按	(42)
一、向量的线性表出	(42)
二、向量组的线性相关问题	(49)
三、向量组的极大线性无关组与秩	(59)
四、向量空间	(61)
第四章 线性方程组	(64)
编者按	(64)
一、齐次方程组有非零解、基础解系、通解等问题	(64)
二、非齐次线性方程组的求解	(74)
三、有解判定及解的结构	(83)

四、公共解与同解	(88)
----------------	------

第五章 特征值与特征向量	(94)
---------------------------	-------------

编者按	(94)
-----------	------

一、特征值、特征向量的概念与计算	(94)
------------------------	------

二、相似矩阵与相似对角化	(102)
--------------------	-------

三、实对称矩阵的特征值与特征向量	(117)
------------------------	-------

第六章 二次型	(124)
----------------------	--------------

编者按	(124)
-----------	-------

一、二次型的概念及其标准形	(124)
---------------------	-------

二、二次型的正定性	(131)
-----------------	-------

三、合同矩阵	(137)
--------------	-------

* 下篇 概率论与数理统计 *

第一章 随机事件和概率	(141)
--------------------------	--------------

编者按	(141)
-----------	-------

一、随机事件的关系与运算	(141)
--------------------	-------

二、古典型概率与几何型概率	(143)
---------------------	-------

三、概率与条件概率的性质和基本公式	(144)
-------------------------	-------

四、事件的独立性与独立重复试验	(151)
-----------------------	-------

第二章 随机变量及其概率分布	(156)
-----------------------------	--------------

编者按	(156)
-----------	-------

一、随机变量的分布函数	(156)
-------------------	-------

二、离散型随机变量的概率分布	(159)
----------------------	-------

三、连续型随机变量的概率密度	(162)
----------------------	-------

四、常见随机变量的概率分布及其应用	(164)
-------------------------	-------

五、随机变量函数的分布	(170)
-------------------	-------

第三章 二维随机变量及其概率分布	(175)
-------------------------------	--------------

编者按	(175)
-----------	-------

一、随机变量的联合分布、边缘分布与条件分布	(175)
-----------------------------	-------

二、随机变量函数的分布	(188)
三、随机变量的独立性与相关性	(199)
四、综合与应用题	(205)
第四章 随机变量的数字特征	(208)
编者按	(208)
第五章 大数定律和中心极限定理	(220)
编者按	(220)
第六章 数理统计的基本概念	(223)
编者按	(223)
第七章 参数估计与假设检验	(227)
编者按	(227)
一、参数的点估计	(227)
二、区间估计与假设检验	(237)

上篇 线性代数

第一章 行列式

编者按

从1987年全国统考以来,行列式的题以填空、选择为主,题量不多,比较而言数学四相对多一些(共14题),偏重于计算,数学一(含96年以前的数学二)有11个题,偏重于简单论证.

对于落到行列式的考题,大致为三种类型,一是数字型行列式的计算,一是抽象型行列式的计算,还有就是行列式值的判定(特别是行列式是否为零的判定.)

在这些考题中不仅有行列式的概念、性质及计算,还涉及到矩阵、向量、方程组、特征值、二次型等知识点.

一、数字型行列式的计算

1. (90,4,4分)* 设 A 为 10×10 矩阵

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

计算行列式 $|A - \lambda E|$, 其中 E 为 10 阶单位矩阵, λ 为常数.

【解】 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$

$$= (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 10^{10}(-1)^{10+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

* 90,4,4分 依次表示:1990年,数学四,本题满分4分,下同.

$$= (-\lambda)(-\lambda)^9 - 10^{10} = \lambda^{10} - 10^{10}.$$

2. (91, 4, 3 分) n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【分析】 按第 1 列展开, 有

$$D = a \begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b \\ & & & & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b & & & & \\ a & b & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & b & \\ & & & a & b \end{vmatrix} = a^n + (-1)^{n+1} b^n.$$

请读者思考本题按第 1 行展开与按第 1 列展开哪一种方法更简便?

3. (96, 1, 3 分)

四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \text{ 的值等于}$$

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$.

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$.

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$.

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$.

【 】

【分析】 这是一个数字型行列式的计算, 由于本题有较多的零, 可以直接展开计算. 若按第一行展开, 有

$$\begin{aligned} D &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3). \end{aligned}$$

所以应选(D).

若熟悉拉普拉斯展开式, 可通过两列互换, 两行互换, 把零元素调至行列式的一角. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix},$$

从而知

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

4. (96, 4, 3 分)

五阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【分析】 对于 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & a & b \\ & c & a & b \\ & & c & a \end{vmatrix}$ 型行列式, 主要用递推法. 对于本题, 注意到第 2 至 4 行的数为相

反数, 故可把第 2 至 5 列均加至第 1 列, 得到

$$\begin{aligned} D_5 &= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} + (-a)(-1)^{5+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

即 $D_5 = D_4 + (-a)(-1)^{5+1}a^4$.

那么 $D_4 = D_3 + (-a)(-1)^{4+1}a^3$,

$D_3 = D_2 + (-a)(-1)^{3+1}a^2$.

把这三个等式相加, 并把 $D_2 = 1 - a + a^2$ 代入, 得

$$D_5 = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5.$$

评注 请读者按第 1 行(列)直接展开, 建立递推关系式, 并体会一下这两种解法的难易差异.

因为主对角线下方是 -1 , 本题也可把第 2 行至第 5 行的倍数加至第 1 行, 把 a_{11} 至 a_{14} 化为 0, 然后对第 1 行展开. 请读者自己完成.

5. (97, 4, 3 分) 设 n 阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】 把第 2, 3, $\dots$, n 各行均加至第 1 行, 则第 1 行为 $n-1$, 提取公因数 $n-1$ 后, 再把第 1 行的 -1 倍加至第 2, 3, $\dots$, n 各行, 可化为上三角行列式. 即

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

评注 除去用行列式性质及展开公式计算外,你能否利用特征值更简单地求出行列式 $|A|$ 的值吗?

6. (99, 2, 3 分)

记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 的根

的个数为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. 【 】

【分析】 问方程 $f(x) = 0$ 有几个根, 也就是问 $f(x)$ 是 x 的几次多项式. 将第 1 列的 -1 倍依次加至其余各列, 有

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)+(4)} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}.$$

由拉普拉斯展开式知 $f(x)$ 是 2 次多项式, 故应选 (B).

评注 由于行列式中各项均含有 x , 若直接展开是繁琐的, 故一定要先恒等变形; 也不要错误地认为 $f(x)$ 一定是 4 次多项式.

7. (00, 4, 3 分) 设 $\alpha = (1, 0, -1)^T$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T$, n 为正整数, 则 $|aE - A^n| =$ _____.

【分析】 因为

$$A = \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} (1 \ 0 \ -1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 而 } \alpha^T\alpha = (1 \ 0 \ -1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2,$$

则

$$A^2 = (\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T) = \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T = 2\alpha\alpha^T = 2A.$$

递推可得

$$A^n = 2^{n-1}A.$$

那么

$$|aE - A^n| = |aE - 2^{n-1}A| = \begin{vmatrix} a - 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & a & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & a - 2^{n-1} \end{vmatrix} = a^2(a - 2^n).$$

评注 若特征值熟练, 由 $r(A) = 1$, 知 A 的特征值为 $2, 0, 0$. 那么, A^n 的特征值是 $2^n, 0, 0$. 从而 $aE - A^n$ 的特征值是 $a - 2^n, a, a$. 故 $|aE - A^n| = (a - 2^n)a^2$.

8. (01, 4, 3 分) 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}, \text{ 则第 4 行各元素余子式之和的值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【分析】 按余子式定义, 即求下列 4 个行列式值之和

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -56 + 0 + 42 - 14 = -28.$$

因为行列式中有较多的零元素,所以用余子式的定义直接求和并不复杂.

如果利用余子式与代数余子式的关系及代数余子式的性质,也可如下计算

$$\begin{aligned}\sum M_{4j} &= -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28.\end{aligned}$$

综 述

对于数字型行列式的计算主要是用按行、按列展开公式,但在展开之前往往先运用行列式性质对其作恒等变形,以期某行或某列有较多的零元素,这时再展开可减轻计算量.同时,也要注意一些特殊公式,如上(下)三角、范德蒙行列式、拉普拉斯展开式的运用.

虽然单独命的计算题并不多,但在特征值问题中有较多 $|\lambda E - A|$ 型行列式的计算,在线性相关、矩阵可逆、 n 个未知数 n 个方程的齐次方程组、二次型的正定等问题中都会涉及到行列式的计算,因此,对行列式的计算要重视,不要因小失大.

二、抽象型行列式的计算

9. (90, 4, 3 分) 设 A 是 n 阶可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则

(A) $|A^*| = |A|^{n-1}.$

(B) $|A^*| = |A|.$

(C) $|A^*| = |A|^n.$

(D) $|A^*| = |A^{-1}|.$

【 式 】

【分析】 对伴随矩阵基本关系式 $AA^* = A^*A = |A|E$ 两端取行列式, 有

$$|A| \cdot |A^*| = ||A|E| = |A|^n |E| = |A|^n.$$

由 A 可逆, $|A| \neq 0$, 故 $|A^*| = |A|^{n-1}$. 因此, 应选(A).

10. (91, 1, 6 分) 设 A 是 n 阶正定阵, E 是 n 阶单位阵, 证明 $A + E$ 的行列式大于 1.

【证法一】 因为 A 是正定阵, 故存在正交矩阵 Q , 使

$$Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, λ_i 是 A 的特征值.

因此 $Q^T (A + E) Q = Q^T A Q + Q^T E Q = \Lambda + E.$

两端取行列式得

$$\begin{aligned}|A + E| &= |Q^T| |A + E| |Q| \\ &= |Q^T (A + E) Q| = |\Lambda + E| = \prod (\lambda_i + 1).\end{aligned}$$

从而 $|A + E| > 1$.

【证法二】 设 A 的 n 个特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 由于 A 是正定矩阵, 故特征值全大于 0.

因为 $A + E$ 的特征值是 $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1$, 它们全大于 1, 根据 $|A| = \prod \lambda_i$, 知

$$|A + E| = \prod (\lambda_i + 1) > 1.$$

11. (92, 3, 3 分) 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 且 $|A| = a, |B| = b, C = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$, 则 $|C| =$ _____.

【分析】 由拉普拉斯展开式, 有

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B| = (-1)^{mn} ab.$$

12. (92, 4, 6 分) 已知实矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足条件:

(1) $a_{ij} = A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式; (2) $a_{11} \neq 0$.

计算行列式 $|A|$.

【解】 因为 $a_{ij} = A_{ij}$, 即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = (A^*)^T,$$

亦即 $A^T = A^*$. 由于 $AA^* = |A|E$, 故 $AA^T = |A|E$. 两边取行列式, 得

$$|A|^2 = |A| \cdot |A^T| = | |A|E | = |A|^3.$$

从而 $|A| = 1$ 或 $|A| = 0$.

由于 $a_{11} \neq 0$, 对 $|A|$ 按第 1 行展开, 有

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 > 0.$$

故必有 $|A| = 1$.

13. (93, 4, 3 分) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是 4 维列向量, 且 4 阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m$, $|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n$, 则 4 阶行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$

(A) $m + n$. (B) $-(m + n)$. (C) $n - m$. (D) $m - n$. 【 】

【分析】 利用行列式的性质, 有

$$\begin{aligned} |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| &= |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1| + |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2| \\ &= -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1| - |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| \\ &= -m + |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n - m. \end{aligned}$$

所以应选 (C).

评注 作为抽象行列式, 本题主要考查行列式的性质.

14. (94, 1, 6 分) 设 A 是 n 阶方阵, 且 $2, 4, \dots, 2n$ 是 A 的 n 个特征值, E 是 n 阶单位阵. 计算行列式 $|A - 3E|$ 的值.

【解法一】 因为矩阵 A 有 n 个不同的特征值, 故可相似对角化, 即有可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2n \end{bmatrix} = A.$$

于是
从而
那么

$$A = PAP^{-1}.$$

$$A - 3E = PAP^{-1} - 3E = P(A - 3E)P^{-1}.$$

$$\begin{aligned} |A - 3E| &= |P| \cdot |A - 3E| \cdot |P^{-1}| = |A - 3E| \\ &= \begin{vmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2n-3 \end{vmatrix} = -[(2n-3)!!]. \end{aligned}$$

【解法二】 因为 A 的特征值是 $2, 4, \dots, 2n$, 故知 $A - 3E$ 的特征值是 $-1, 1, 3, \dots, 2n-3$.

由于 $|A| = \prod \lambda_i$, 所以 $|A - 3E| = (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-3) = -[(2n-3)!!]$.

15. (95, 1, 6 分) 设 A 为 n 阶矩阵, 满足 $AA^T = E$ (E 为 n 阶单位阵, A^T 是 A 的转置矩阵), $|A| < 0$, 求 $|A + E|$.

【分析】 这是一个抽象行列式的计算, 根据已知条件, 应当用矩阵恒等变形来处理.

【解】 因为

$$|A + E| = |A + AA^T| = |A(E + A^T)| = |A| \cdot |(E + A)^T| = |A| |E + A|,$$

所以 $(1 - |A|) |E + A| = 0$.

又因 $|A| < 0, 1 - |A| > 0$, 故 $|E + A| = 0$.

评注 由 $AA^T = E$ 知 $|A|^2 = |A| |A^T| = 1$, 又 $|A| < 0$, 可见 $|A| = -1$. 从而

$$|A + E| = -|A + E|. \Rightarrow |A + E| = 0.$$

注意, $|A + B| \neq |A| + |B|$, 对于 $|A + B|$ 的处理通常是将 $A + B$ 恒等变形转化为乘积形式, 其中单位矩阵的恒等变形是一个重要技巧.

16. (98, 4, 3 分) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, $|A| = 2, |B| = -3$, 则 $|2A^* B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】 $|2A^* B^{-1}| = 2^n |A^* B^{-1}| = 2^n |A^*| |B^{-1}| = 2^n |A|^{n-1} \cdot |B|^{-1} = -\frac{2^{2n-1}}{3}$.

评注 本题用到的公式有

$$|kA| = k^n |A|; \quad |AB| = |A| \cdot |B|; \quad |A^*| = |A|^{n-1}; \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

17. (00, 3, 3 分) 若 4 阶矩阵 A 与 B 相似, 矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则行列式

$|B^{-1} - E| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】 本题已知条件是特征值, 而要求出行列式的值, 因为 $|A| = \prod \lambda_i$, 故应求出 $B^{-1} - E$ 的特征值.

由 $A \sim B$, 知 B 的特征值是 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. 于 B^{-1} 的特征值是 $2, 3, 4, 5$. 那么 $B^{-1} - E$ 的特征值

是 1, 2, 3, 4. 从而 $|B^{-1} - E| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

18. (00, 4, 3 分) 已知 4 阶矩阵 A 相似于 B , A 的特征值为 2, 3, 4, 5, E 为 4 阶单位矩阵, 则 $|B - E| =$ _____.

【分析】 与上题相比, 数学四少考查了一个知识点, 即 B 与 B^{-1} 特征值之间的关系. 而思路方法是一样的.

由 $A \sim B$ 得 B 的特征值为 2, 3, 4, 5. 进而知 $B - E$ 的特征值为 1, 2, 3, 4. 故应填: 24.

若用 $B \sim A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{bmatrix}$, 推出 $B - E \sim A - E$, 进而知 $|B - E| = |A - E|$, 亦可求出行列式的值.

19. (03, 2, 4 分) 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $|B| =$ _____.

【分析】 由已知条件有 $(A^2 - E)B = A + E$, 即 $(A + E)(A - E)B = A + E$.

因为 $A + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 知 $A + E$ 可逆. 故 $B = (A - E)^{-1}$.

而 $|A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$, 故 $|B| = |(A - E)^{-1}| = \frac{1}{|A - E|} = \frac{1}{2}$.

评注 本题考查矩阵运算及行列式的性质与计算, 把矩阵方程综合进来, 请参看第二章相关内容试题.

20. (04, $\frac{1}{2}$, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的

伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则 $|B| =$ _____.

【分析】 由于 $AA^* = A^*A = |A|E$, 易见 $|A| = 3$, 用 A 右乘矩阵方程的两端, 有

$$3AB = 6B + A \Rightarrow 3(A - 2E)B = A \Rightarrow 3^3 |A - 2E| |B| = |A|.$$

又 $|A - 2E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$, 故 $|B| = \frac{1}{9}$.

评注 本题没有必要解出 $B = \frac{1}{3}(A - 2E)^{-1}A$, 注意 $|kA| = k^n |A|$, 不要出错.

21. (05, $\frac{1}{4}$, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3).$$

如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| =$ _____.

【分析】 对矩阵 B 用分块技巧, 有

$$B = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

两边取行列式, 并用行列式乘法公式, 得

$$|B| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2|A| = 2.$$

评注 本题还涉及到范德蒙行列式. 另外, 本题用行列式性质恒等变形也是可行的, 例如

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \quad \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3| \\ &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \alpha_2 + 3\alpha_3 \quad \alpha_2 + 5\alpha_3| \\ &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \alpha_2 + 3\alpha_3 \quad 2\alpha_3| \\ &= 2|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \alpha_2 + 3\alpha_3 \quad \alpha_3| \\ &= 2|\alpha_1 + \alpha_2 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3| = 2|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3|. \end{aligned}$$

22. (06, 2, 4 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则

$|B| =$ _____.

【分析】 由 $BA = B + 2E$ 得 $B(A - E) = 2E$, 两边取行列式, 有

$$|B| \cdot |A - E| = 4.$$

因为 $|A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, 所以 $|B| = 2$.

23. (06, 4, 4 分)

已知 α_1, α_2 为 2 维列向量, 矩阵 $A = (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$, $B = (\alpha_1, \alpha_2)$. 若行列式 $|A| = 6$, 则 $|B| =$ _____.

【分析】 因为 $(2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\text{即 } A = B \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \Rightarrow |A| = -3|B|, \Rightarrow |B| = -2.$$

评注 2005 年刚考过这样的抽象行列式, 今年又考但难度下降许多. 这种题还能怎样解?

综 述

对于抽象型行列式的计算, 可能考查行列式性质的理解、运用 (如第 13 题), 可能涉及矩阵的运算 (如第 12, 16 等题), 也可能用特征值、相似等处理 (如第 10, 14, 17 等题). 这一类题目往往综合性强, 涉及知识点多. 因此, 考生复习时要注意知识的衔接与转换, 如果内在联系把握的好, 解题时的思路就灵活. 这一类题目计算量一般不会太大.