

成人高等教育系列教材
Chengren gaodeng jiaoyu xilie jiaocai

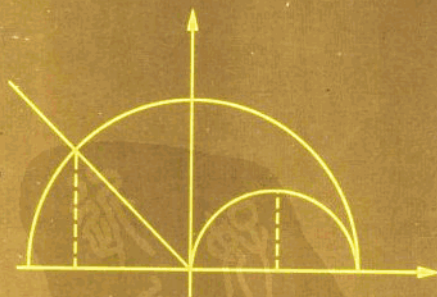


高等数学

GAODENGSHUXUE

(本科使用) 下册

主编 陈凤平 副主编 吴满 曾令武



华南理工大学出版社

“成人高等教育系列教材”编委会

主 任	李元元		
副主任	叶英模	金 军	杨昭茂
委 员	(按姓氏笔画为序)		
	叶英模	李元元	李定安
	杨昭茂	金 军	霍福广

前 言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分。针对成人教育的特点,改革教学内容,编写新教材,对于提高教学质量具有十分重要的意义。

成人本科,尤其是专科起点的本科教育正是当前成人高等教育的热点,但适用教材尚少。作者长期从事各类不同层次高等数学课程的教学,熟悉高等数学课程体系,尝试以微分学与积分学为主线编写这本新教材,力求突出微分与积分这一对高等数学重点,使知识结构更具条理性、系统性;理论阐述更为深刻、完整。

在内容选取上遵循“以应用为目的,以必需、够用为度,少而精”的原则。如方向导数、二重积分、曲面积分、傅立叶级数等,我们把握适度,同时,通过对有代表性的典型例题进行分析和求解,以达到提高基本运算能力的目的。

本书对高等工科、经济、管理各类专业学生适用,也可作为成人高等教育本科毕业生申请学位、报考研究生的复习辅导参考书。

本书由陈凤平主编,吴满、曾令武任副主编。本书凝集了作者及众多常年在华南理工大学高等数学教学第一线老师们的教学经验。

本书的出版得到华南理工大学继续教育学院的大力支持,责任编辑乔丽为本书付出了辛勤劳动,在此向他们一并致谢。

由于本教材在教学内容、体系上有所创新,作为尝试,书中不完善之处,恳请同行专家不吝赐教,也希望得到读者的意见和建议。

编 者

2002年6月于广州

目 录

第五章 微分方程	(1)
第一节 微分方程的基本概念	(2)
习题 5-1	(10)
习题 5-1 答案	(11)
第二节 变量可分离的一阶微分方程	(12)
习题 5-2	(18)
习题 5-2 答案	(19)
第三节 齐次型的一阶微分方程	(20)
习题 5-3	(27)
习题 5-3 答案	(28)
第四节 一阶线性微分方程	(29)
一、线性方程	(29)
二、伯努利方程	(36)
习题 5-4	(40)
习题 5-4 答案	(41)
第五节 全微分方程	(43)
习题 5-5	(48)
习题 5-5 答案	(49)
第六节 可降阶的高阶微分方程	(50)
一、形如 $y^{(n)} = f(x)$ 的方程	(50)
二、形如 $y'' = f(x, y')$ 的方程	(52)
三、形如 $y'' = f(y, y')$ 的方程	(55)
习题 5-6	(57)

习题 5-6 答案	(58)
第七节 二阶线性微分方程解的结构	(59)
一、二阶线性齐次微分方程解的性质	(59)
二、二阶线性非齐次微分方程解的性质	(64)
习题 5-7	(66)
习题 5-7 答案	(68)
第八节 常系数齐次线性微分方程	(68)
一、二阶常系数齐次线性微分方程的解法	(68)
二、 n 阶常系数齐次线性微分方程的解法	(73)
习题 5-8	(75)
习题 5-8 答案	(76)
第九节 二阶常系数非齐次线性微分方程	(76)
一、 $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ 型的方程	(77)
二、 $f(x) = e^{\lambda x}(A\cos ax + B\sin ax)$ 型的方程	(83)
习题 5-9	(87)
习题 5-9 答案	(88)
第十节 微分方程的应用举例	(89)
习题 5-10	(94)
习题 5-10 答案	(96)
 第六章 积分学	 (100)
第一节 定积分概念	(100)
一、定积分问题举例	(100)
二、定积分的定义	(103)
三、定积分的几何意义	(107)
习题 6-1	(109)
习题 6-1 答案	(109)
第二节 定积分的性质	(110)

习题 6-2	(113)
习题 6-2 答案	(115)
第三节 微积分基本定理	(115)
习题 6-3	(122)
习题 6-3 答案	(124)
第四节 定积分的换元法和分部积分法	(125)
一、定积分的换元法	(125)
习题 6-4(1)	(132)
习题 6-4(1) 答案	(134)
二、定积分的分部积分法	(134)
习题 6-4(2)	(138)
习题 6-4(2) 答案	(139)
第五节 广义积分	(139)
一、无穷区间上的广义积分	(140)
二、无界函数的广义积分	(144)
习题 6-5	(149)
习题 6-5 答案	(150)
第六节 定积分的应用	(151)
一、平面图形的面积	(153)
二、立体的体积	(161)
三、平面曲线的弧长	(165)
习题 6-6(1)	(168)
习题 6-6(1) 答案	(171)
四、定积分的物理应用举例	(172)
五、定积分在经济中的应用	(175)
习题 6-6(2)	(178)
习题 6-6(2) 答案	(179)
第七节 重积分的概念与性质	(179)

一、重积分概念的引入——物体的质量	(179)
二、二重积分的几何意义	(181)
三、重积分的存在定理与性质	(182)
习题 6-7	(184)
习题 6-7 答案	(185)
第八节 二重积分的计算	(186)
一、直角坐标下二重积分的计算	(186)
二、极坐标下二重积分的计算	(196)
习题 6-8	(202)
习题 6-8 答案	(206)
第九节 三重积分的计算	(207)
一、直角坐标下三重积分的计算	(207)
二、柱面坐标下三重积分的计算	(213)
三、球面坐标下三重积分的计算	(216)
习题 6-9	(220)
习题 6-9 答案	(222)
第十节 重积分的应用	(223)
一、平面图形的面积	(223)
二、空间形体的体积	(224)
三、空间曲面的面积	(227)
四、质量与质心	(230)
五、转动惯量	(235)
习题 6-10	(237)
习题 6-10 答案	(239)
第十一节 第一型线积分与面积分	(239)
一、第一型曲线积分——对弧长的曲线积分	(240)
习题 6-11(1)	(247)
习题 6-11(1) 答案	(248)

二、第一型曲面积分——对面积的曲面积分	(248)
习题 6-11(2)	(255)
习题 6-11(2) 答案	(256)
第十二节 第二型线积分与面积分	(256)
一、第二型曲线积分——对坐标的曲线积分	(256)
习题 6-12(1)	(266)
习题 6-12(1) 答案	(267)
二、第二型曲面积分——对坐标的曲面积分	(268)
习题 6-12(2)	(277)
习题 6-12(2) 答案	(278)
第十三节 多元函数积分间的联系	(278)
一、格林(Green)公式	(279)
二、平面曲线积分与路径无关的条件	(286)
三、二元函数的全微分求积	(291)
四、高斯(Gauss)公式	(295)
习题 6-13	(299)
习题 6-13 答案	(301)
第七章 无穷级数	(302)
第一节 无穷级数的基本概念	(302)
一、无穷级数	(302)
二、无穷级数的敛、散性	(305)
三、级数收敛的必要条件	(311)
四、收敛级数的基本性质	(313)
习题 7-1	(317)
习题 7-1 答案	(319)
第二节 常数项级数的审敛法	(320)
一、正项级数的审敛法	(320)

二、任意项级数的审敛法	(334)
习题 7-2	(343)
习题 7-2 答案	(345)
第三节 幂级数	(346)
一、函数项级数的概念	(346)
二、幂级数及其收敛性	(348)
三、幂级数的性质	(355)
习题 7-3	(358)
习题 7-3 答案	(359)
第四节 函数的幂级数展开式	(360)
一、泰勒级数	(360)
二、泰勒中值定理	(361)
三、函数的幂级数展开式	(364)
四、幂级数在近似计算中的应用	(372)
习题 7-4	(374)
习题 7-4 答案	(375)
第五节 幂级数的和函数	(377)
习题 7-5	(383)
习题 7-5 答案	(383)
第六节 傅立叶级数	(384)
一、把以 2π 为周期的函数展开成傅立叶级数	(385)
二、把以 $2l$ 为周期的函数展开成傅立叶级数	(397)
习题 7-6	(402)
习题 7-6 答案	(403)
第七节 有限区间上的傅立叶级数	(405)
一、区间 $[-l, l]$ 上的傅立叶级数	(405)
二、区间 $[0, l]$ 上的傅立叶级数	(409)
习题 7-7	(413)
习题 7-7 答案	(314)

第五章 微分方程

高等数学中有两种重要的运算:对给出的一元函数 $y = f(x)$, 讨论因变量对自变量的变化率,即求导数 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ 或微分 $dy = f'(x)dx$ 的运算;对给出的导函数 $f'(x)$,求其原函数的不定积分运算.事实上,它们是一对互逆运算.

通过学习,我们掌握了新的运算方法,这无疑可增强用数学方法解决实际问题的能力.我们知道,寻求变量间的函数关系是数学的一个重要课题,也是解决实际问题的关键,而实际问题往往受本身条件的限制难以直接建立起所需的函数,而比较容易得到含有待求函数及其导数的关系式,这样的关系式就是所谓的微分方程.通过微分方程而得出所需的函数,就是求解微分方程.

建立微分方程需要几何、力学、物理学等各相关学科的知识,但离不开变化率的概念;求解微分方程要应用不定积分法.前面所学知识为我们应用微分方程实际问题提供了有力的保证.本章主要介绍几个特定类型微分方程的求解方法.

第一节 微分方程的基本概念

下面通过两个例子介绍有关微分方程的基本概念,同时初步了解应用微分方程解决问题的过程.

例 1 求一曲线方程. 这条曲线经过原点, 并且它在任一点 $M(x, y)$ 处的切线斜率等于该点横坐标的平方.

解 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 根据导数的几何意义及题设, 可知未知函数应满足

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \quad (5.1)$$

又曲线经过原点, 故未知函数还应满足条件:

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 0 \quad (5.2)$$

为求未知函数 $y = y(x)$, 将方程(5.1)变形为

$$dy = x^2 dx \quad (5.3)$$

将上式两边积分

$$\int dy = \int x^2 dx$$

$$\text{得} \quad y = \frac{x^3}{3} + C \quad (5.4)$$

其中 C 为任意常数.

把条件(5.2)即 $y(0) = 0$ 代入式(5.4)中, 得

$$0 = \frac{1}{3}(0)^3 + C$$

由此定出 $C = 0$, 并回代式(5.4), 因此

$$y = \frac{x^3}{3} \quad (5.5)$$

这就是所求曲线的方程.它是过定点 $(0,0)$ 的一条曲线,而式(5.4)所表示的是由这条曲线沿 y 轴上、下平移而得到的一族曲线.这族曲线在横坐标相同的点处,切线的斜率相等(切线相互平行),都等于横坐标的平方,这正是它们的通性.

例 2 把一物体垂直上抛,开始时刻物体与地面的距离为 h (图 5-1),初速度为 v_0 . 设物体的运动只受重力作用,试求物体的运动方程.

解 把坐标轴垂直向上的方向选择为正,且坐标原点在地面上. 设物体运动在经过时间 t 后,它与地面的距离为 s ,根据牛顿运动定律有

$$F = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

其中 m 为物体的质量, F 为物体所受的力. 因物体只受重力的作用,所以 $F = -mg$ (其中 g 为重力加速度,负号表示重力的方向与坐标轴的正方向相反),因此得

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg$$

即微分方程

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \quad (5.6)$$

此外,由题意,物体运动的位置函数 $s = s(t)$ 还满足下列两个条件:

$$s \Big|_{t=0} = h \quad (\text{初始位置}) \quad (5.7)$$

$$s' \Big|_{t=0} = v_0 \quad (\text{初始速度}) \quad (5.8)$$

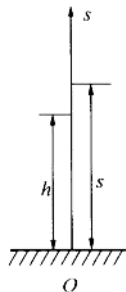


图 5-1

下面求解微分方程(5.6).将方程两边积分一次,得

$$v = \frac{ds}{dt} = \int (-g) dt = -gt + C_1 \quad (5.9)$$

再积分一次,得

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \quad (5.10)$$

这里 C_1, C_2 都是任意常数.

把条件(5.8)代入式(5.9)得

$$C_1 = v_0$$

把条件(5.7)代入式(5.10),得

$$C_2 = h$$

再把 C_1 和 C_2 的值代入式(5.10),可得到

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h \quad (5.11)$$

这就是所求的物体的运动方程.

上面两个例子中,根据实际问题建立起来的未知函数应满足的关系式(5.1)和(5.6)都含有未知函数的导数(或微分),它们都是微分方程.

一般地,凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系方程,叫做微分方程.

未知函数是一元函数的微分方程,叫常微分方程;涉及多元函数,使方程中出现偏导数的微分方程叫做偏微分方程.常微分方程有时也简称方程,本章只讨论常微分方程.

在微分方程中可以不显现出未知函数或自变量,但方程中必定要出现未知函数的导数(或微分),否则就不成为微分方程了.

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶.例如方程(5.1)是一阶微分方程,方程(5.6)是二阶微分方程.

如果把某函数以及它的各阶导数代入微分方程,能使方程成为恒等式,这函数就称为该微分方程的解.例如函数(5.4)和(5.5)都是微分方程(5.1)的解.

如果微分方程的解中含有任意常数且任意常数的个数正好与微分方程的阶数相同,这样的解称为微分方程的通解.如式(5.4)是方程(5.1)的通解,式(5.10)是方程(5.6)的通解.必须注意的是通解中的任意常数应该是相互独立的.例如

$$\begin{aligned}y &= C_1 \sin 2x + C_2 \sin x \cos x \\&= C_1 \sin 2x + \frac{C_2}{2} \sin 2x \\&= \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right) \sin 2x\end{aligned}$$

其中 $C_1 + \frac{C_2}{2}$ 可以合并写成一个任意常数 C ,故此函数本质上只含一个任意常数(而不是两个任意常数).

在微分方程的通解中,按一定的条件确定出任意常数的特定值,从而得到不含任意常数的解,称之为微分方程的特解.如式(5.5)是方程(5.1)的特解,式(5.11)是方程(5.6)的特解.

从特解的定义可知,微分方程的特解必含于通解之内.不包含在微分方程通解之内的解称为奇解,本书将不考虑微分方程的奇解.在本书的例题与习题中,如未指明要求特解的,均指求通解.

正如在例1和例2见到的那样,微分方程的特解是按一定条件,由通解确定任意常数后而得到的.例1中的式(5.2)与例2中的(5.7)及(5.8)式就是确定特解的条件.这种条件用以表明曲线经过的特定或表明物体运动的初始状态,习惯上叫做初始条件.

通常,一阶方程的初始条件是:给出未知函数 $y = y(x)$ 在点 x_0 处的函数值

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0$$

二阶微分方程的初始条件是:给出未知函数 $y = y(x)$ 在某点 x_0 处的函数值及一阶导数值

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0, \quad y' \Big|_{x=x_0} = y_1$$

求一阶微分方程 $y' = f(x, y)$ 满足初始条件 $y \Big|_{x=x_0} = y_0$ 的特解, 也叫做求解一阶微分方程的初值问题, 记作

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y \Big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

其中 x_0, y_0 是给定的值.

类似, 二阶微分方程的初值问题为

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y \Big|_{x=x_0} = y_0, y' \Big|_{x=x_0} = y_1 \end{cases}$$

其中 x_0, y_0, y_1 是给定的值.

一般地, n 阶微分方程表示为

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

用来确定特解的初始条件应该有 n 个:

$$\begin{aligned} y \Big|_{x=x_0} &= y_0 \\ y' \Big|_{x=x_0} &= y_1 \\ y'' \Big|_{x=x_0} &= y_2 \\ &\dots\dots \\ y^{(n-1)} \Big|_{x=x_0} &= y_{n-1} \end{aligned}$$

其中 $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ 都是给定的值.

求解微分方程的初值问题, 就是求出微分方程满足初始条件

的特解.

例3 指出下列微分方程中的自变量、未知函数以及方程的阶数.

$$(1)(y')^2 + y'(y'')^3 + x^2y = 0;$$

$$(2)(\sin t) \cdot x' + x \cos t = 2t \sin^2 t;$$

$$(3)(x+u)dx + (x-u)du = 0.$$

解 要确定微分方程的阶,关键是找出方程中所含未知函数的最高阶导数,其阶数就是该微分方程的阶,而不必考虑它的幂次.

(1)自变量是 x ,未知函数是 $y = y(x)$,出现的未知函数的最高阶导数是 y'' ,所以方程是二阶微分方程.

(2)自变量是 t ,未知函数是 $x = x(t)$,出现未知函数的最高阶导数是 x' ,于是为一阶微分方程.

(3)方程中变量 x 与 u 的地位是平等的,我们可以将方程写成

$$\frac{du}{dx} = \frac{x+u}{u-x}, \quad \text{即 } u' = \frac{x+u}{u-x}$$

把 x 看做自变量, $u = u(x)$ 是关于 x 的函数,方程是一阶的;也可以把方程写成

$$\frac{dx}{du} = \frac{u-x}{x+u}, \quad \text{即 } x' = \frac{u-x}{x+u}$$

把 u 看做自变量, $x = x(u)$ 是关于 u 的函数,方程是一阶的.在此题中,指定哪个变量为自变量且是人为的,并且自变量与因变量是相对的.

例4 验证下列所给各函数是否为微分方程: $y'' + 4y = 4x$ 的解,并指出哪个是通解,哪个是特解?

$$(1)y = \cos 2x - \sin 2x + x;$$

$$(2)y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x;$$

$$(3)y = C \cos 2x + \sin 2x + x.$$

上式中 C, C_1, C_2 为任意常数.

解 (1)由 $y = \cos 2x - \sin 2x + x$ 求得

$$y' = -2\sin 2x - 2\cos 2x + 1$$

$$y'' = -4\cos 2x + 4\sin 2x$$

将 y 及 y'' 代入方程 $y'' + 4y = 4x$, 有

$$-4\cos 2x + 4\sin 2x + 4(\cos 2x - \sin 2x + x) = 4x$$

方程成为恒等式. 故 $y = \cos 2x - \sin 2x + x$ 是所给微分方程的解, 而不含任意常数, 所以是特解.

(2)由 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x$ 可求得

$$y'' = -(4C_1 \cos 2x + 4C_2 \sin 2x)$$

将 y 及 y'' 代入方程 $y'' + 4y = 4x$, 有

$$-(4C_1 \cos 2x + 4C_2 \sin 2x) + 4(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x) = 4x$$

方程成为恒等式, 所以

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x$$

是所给微分方程的解, 又所含任意常数的个数与微分方程的阶数都为 2. 因此

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x$$

是所给二阶微分方程的通解.

(3)由 $y = C \cos 2x + \sin 2x + x$ 求得

$$y'' = -(4C \cos 2x + 4 \sin 2x)$$

将 y 及 y'' 代入方程 $y'' + 4y = 4x$, 有

$$-(4C \cos 2x + 4 \sin 2x) + 4(C \cos 2x + \sin 2x + x) = 4x$$

为恒等式, 因此, $y = C \cos 2x + \sin 2x + x$ 是原方程的解, 函数 y 的表达式中只含一个任意常数, 而微分方程的阶数为 2, 故不是通解, 也不是特解, 只能说它是微分方程的解.

微分方程的解, 亦可用隐函数的形式给出, 这类解称为微分方程的隐式解.

例 5 验证由方程 $y = \ln(xy)$ 所确定的隐函数是二阶微分方程 $(xy - x)y'' + x(y')^2 + (y - 2)y' = 0$ 的解.

证 把方程 $y = \ln(xy)$ 两边对 x 求导, 得