成人高等教育系列教材

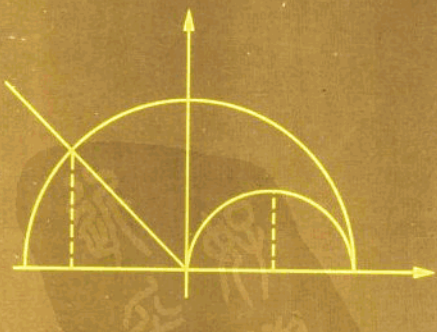
Chengrengaodengjiaoyuxiliejiaocai

高等数学

GAODENGSHUXUE

（本科使用）下册

主编 陈凤平 副主编 吴满 曾令武



华南理工大学出版社

“成人高等教育系列教材”编委会

前　言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分。针对成人教育的特点,改革教学内容,编写新教材,对于提高教学质量具有十分重要的意义。

成人本科,尤其是专科起点的本科教育正是当前成人高等教育的热点,但适用教材尚少。作者长期从事各类不同层次高等数学课程的教学,熟悉高等数学课程体系,尝试以微分学与积分学为主线编写这本新教材,力求突出微分与积分这一对高等数学重点,使知识结构更具条理性、系统性;理论阐述更为深刻、完整。

在内容选取上遵循"以应用为目的,以必需、够用为度,少而精"的原则。如方向导数、二重积分、曲面积分、傅立叶级数等,我们把握适度,同时,通过对有代表性的典型例题进行分析和求解,以达到提高基本运算能力的目的。

本书对高等工科、经济、管理各类专业学生适用,也可作为成人高等教育本科毕业生申请学位、报考研究生的复习辅导参考书。

本书由陈凤平主编,吴满、曾令武任副主编。本书凝集了作者及众多常年在华南理工大学高等数学教学第一线老师们的教学经验。

本书的出版得到华南理工大学继续教育学院的大力支持,责任编辑乔丽为本书付出了辛勤劳动,在此向他们一并致谢。

由于本教材在教学内容、体系上有所创新,作为尝试,书中不完善之处,恳请同行专家不吝赐教,也希望得到读者的意见和建议。

编　者

2002 年 6 月于广州

目　　录

第五章　微分方程

高等数学中有两种重要的运算:对给出的一元函数 $y=f(x)$,讨论因变量对自变量的变化率,即求导数$\frac{dy}{dx}=f'(x)$或微分 $dy=f'(x)dx$ 的运算;对给出的导函数$f'(x)$,求其原函数的不定积分运算.事实上,它们是一对互逆运算.

通过学习,我们掌握了新的运算方法,这无疑可增强用数学方法解决实际问题的能力.我们知道,寻求变量间的函数关系是数学的一个重要课题,也是解决实际问题的关键,而实际问题往往受本身条件的限制难以直接建立起所需的函数,而比较容易得到含有待求函数及其导数的关系式,这样的关系式就是所谓的微分方程.通过微分方程而得出所需的函数,就是求解微分方程.

建立微分方程需要几何、力学、物理学等各相关学科的知识,但离不开变化率的概念;求解微分方程要应用不定积分法.前面所学知识为我们应用微分方程解决实际问题提供了有力的保证.本章主要介绍几个特定类型微分方程的求解方法.

第一节　微分方程的基本概念

下面通过两个例子介绍有关微分方程的基本概念，同时初步了解应用微分方程解决问题的过程.

例 1　求一曲线方程.这条曲线经过原点，并且它在任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率等于该点横坐标的平方.

解　设所求曲线方程为 $y=y(x)$，根据导数的几何意义及题设，可知未知函数应满足

$$\frac{dy}{dx}=x^2 \tag{5.1}$$

又曲线经过原点，故未知函数还应满足条件：

$$\text{当 } x=0 \text{ 时}, \qquad y=0 \tag{5.2}$$

为求未知函数 $y=y(x)$，将方程(5.1)变形为

$$dy=x^2dx \tag{5.3}$$

将上式两边积分

$$\int dy=\int x^2dx$$

得

$$y=\frac{x^3}{3}+C \tag{5.4}$$

其中 C 为任意常数.

把条件(5.2)即 $y(0)=0$ 代入式(5.4)中，得

$$0=\frac{1}{3}(0)^3+C$$

由此定出 $C=0$，并回代式(5.4)，因此

$$y=\frac{x^3}{3} \tag{5.5}$$

这就是所求曲线的方程.它是过定点(0,0)的一条曲线,而式(5.4)所表示的是由这条曲线沿 y 轴上、下平移而得到的一族曲线.这族曲线在横坐标相同的点处,切线的斜率相等(切线相互平行),都等于横坐标的平方,这正是它们的通性.

例 2　把一物体垂直上抛,开始时刻物体与地面的距离为 h(图 5-1),初速度为 v_0.设物体的运动只受重力作用,试求物体的运动方程.

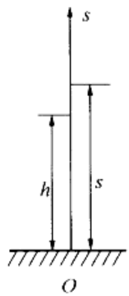


图 5-1

解　把坐标轴垂直向上的方向选择为正,且坐标原点在地面上.设物体运动在经过时间 t 后,它与地面的距离为 s,根据牛顿运动定律有

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

其中 m 为物体的质量,F 为物体所受的力.因物体只受重力的作用,所以 $F=-mg$(其中 g 为重力加速度,负号表示重力的方向与坐标轴的正方向相反),因此得

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg$$

即微分方程

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \tag{5.6}$$

此外,由题意,物体运动的位置函数 $s=s(t)$ 还满足下列两个条件:

$$s\Big|_{t=0} = h \quad (初始位置) \tag{5.7}$$

$$s'\Big|_{t=0} = v_0 \quad (初始速度) \tag{5.8}$$

下面求解微分方程(5.6).将方程两边积分一次,得

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \int(-g)\mathrm{d}t = -gt + C_1 \tag{5.9}$$

再积分一次,得

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \tag{5.10}$$

这里 C_1,C_2 都是任意常数.

把条件(5.8)代入式(5.9)得

$$C_1 = v_0$$

把条件(5.7)代入式(5.10),得

$$C_2 = h$$

再把 C_1 和 C_2 的值回代式(5.10),可得到

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h \tag{5.11}$$

这就是所求的物体的运动方程.

上面两个例子中,根据实际问题建立起来的未知函数应满足的关系式(5.1)和(5.6)都含有未知函数的导数(或微分),它们都是微分方程.

一般地,凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程,叫做微分方程.

未知函数是一元函数的微分方程,叫常微分方程;涉及多元函数,使方程中出现偏导数的微分方程叫做偏微分方程.常微分方程有时也简称方程,本章只讨论常微分方程.

在微分方程中可以不显现出未知函数或自变量,但方程中必定要出现未知函数的导数(或微分),否则就不成为微分方程了.

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶.例如方程(5.1)是一阶微分方程,方程(5.6)是二阶微分方程.

如果把某函数以及它的各阶导数代入微分方程,能使方程成为恒等式,这函数就称为该微分方程的解.例如函数(5.4)和(5.5)都是微分方程(5.1)的解.

如果微分方程的解中含有任意常数且任意常数的个数正好与微分方程的阶数相同,这样的解称为微分方程的通解.如式(5.4)是方程(5.1)的通解,式(5.10)是方程(5.6)的通解.必须注意的是通解中的任意常数应该是相互独立的.例如

$$\begin{aligned} y &= C_1\sin 2x + C_2\sin x\cos x \\ &= C_1\sin 2x + \frac{C_2}{2}\sin 2x \\ &= \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right)\sin 2x \end{aligned}$$

其中 $C_1 + \frac{C_2}{2}$ 可以合并写成一个任意常数 C,故此函数本质上只含一个任意常数(而不是两个任意常数).

在微分方程的通解中,按一定的条件确定出任意常数的特定值,从而得到不含任意常数的解,称之为微分方程的特解.如式(5.5)是方程(5.1)的特解,式(5.11)是方程(5.6)的特解.

从特解的定义可知,微分方程的特解必含于通解之内.不包含在微分方程通解之内的解称为奇解,本书将不考虑微分方程的奇解.在本书的例题与习题中,如未指明要求特解的,均指求通解.

正如在例1和例2见到的那样,微分方程的特解是按一定条件,由通解确定任意常数后而得到的.例1中的式(5.2)与例2中的(5.7)及(5.8)式就是确定特解的条件.这种条件用以表明曲线经过的特定点或表明物体运动的初始状态,习惯上叫做初始条件.

通常,一阶方程的初始条件是:给出未知函数 $y = y(x)$ 在点 x_0 处的函数值

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0$$

二阶微分方程的初始条件是:给出未知函数 $y=y(x)$在某点 x_0 处的函数值及一阶导数值

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\Big|_{x=x_0}=y_1$$

求一阶微分方程 $y'=f(x,y)$满足初始条件 $y\Big|_{x=x_0}=y_0$ 的特解,也叫做求解一阶微分方程的初值问题,记作

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y\Big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$$

其中 x_0,y_0 是给定的值.

类似,二阶微分方程的初值问题为

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y\Big|_{x=x_0}=y_0,y'\Big|_{x=x_0}=y_1 \end{cases}$$

其中 x_0,y_0,y_1 是给定的值.

一般地,n 阶微分方程表示为

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

用来确定特解的初始条件应该有 n 个:

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0$$

$$y'\Big|_{x=x_0}=y_1$$

$$y''\Big|_{x=x_0}=y_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_{n-1}$$

其中 $x_0,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}$都是给定的值.

求解微分方程的初值问题,就是求出微分方程满足初始条件

的特解.

例 3　指出下列微分方程中的自变量、未知函数以及方程的阶数.

(1) $(y')^2+y'(y'')^3+x^2y=0$;

(2) $(\sin t)x'+x\cos t=2t\sin^2 t$;

(3) $(x+u)\mathrm{d}x+(x-u)\mathrm{d}u=0$.

解　要确定微分方程的阶,关键是找出方程中所含未知函数的最高阶导数,其阶数就是该微分方程的阶,而不必考虑它的幂次.

(1)自变量是 x,未知函数是 $y=y(x)$,出现的未知函数的最高阶导数是 y'',所以方程是二阶微分方程.

(2)自变量是 t,未知函数是 $x=x(t)$,出现未知函数的最高阶导数是 x',于是为一阶微分方程.

(3)方程中变量 x 与 u 的地位是平等的,我们可以将方程写成

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{x+u}{u-x},\quad 即\ u'=\frac{x+u}{u-x}$$

把 x 看做自变量,$u=u(x)$是关于 x 的函数,方程是一阶的;也可以把方程写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\frac{u-x}{x+u},\quad 即\ x'=\frac{u-x}{x+u}$$

把 u 看做自变量,$x=x(u)$是关于 u 的函数,方程是一阶的.在此题中,指定哪个变量为自变量且是人为的,并且自变量与因变量是相对的.

例 4　验证下列所给各函数是否为微分方程:$y''+4y=4x$ 的解,并指出哪个是通解,哪个是特解?

(1) $y=\cos 2x-\sin 2x+x$;

(2) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x$;

(3) $y=C\cos 2x+\sin 2x+x$.

上式中 C,C_1,C_2 为任意常数.

解 (1)由 $y=\cos 2x-\sin 2x+x$ 求得

$$y'=-2\sin 2x-2\cos 2x+1$$

$$y''=-4\cos 2x+4\sin 2x$$

将 y 及 y'' 代入方程 $y''+4y=4x$,有

$$-4\cos 2x+4\sin 2x+4(\cos 2x-\sin x+x)=4x$$

方程成为恒等式.故 $y=\cos 2x-\sin 2x+x$ 是所给微分方程的解,而不含任意常数,所以是特解.

(2)由 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x$ 可求得

$$y''=-(4C_1\cos 2x+4C_2\sin 2x)$$

将 y 及 y'' 代入方程 $y''+4y=4x$,有

$$-(4C_1\cos 2x+4C_2\sin 2x)+4(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x)=4x$$

方程成为恒等式,所以

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x$$

是所给微分方程的解,又所含任意常数的个数与微分方程的阶数都为2.因此

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x$$

是所给二阶微分方程的通解.

(3)由 $y=C\cos 2x+\sin 2x+x$ 求得

$$y''=-(4C\cos 2x+4\sin 2x)$$

将 y 及 y'' 代入方程 $y''+4y=4x$,有

$$-(4C\cos 2x+4\sin 2x)+4(C\cos 2x+\sin 2x+x)=4x$$

为恒等式,因此,$y=C\cos 2x+\sin 2x+x$ 是原方程的解,函数 y 的表达式中只含一个任意常数,而微分方程的阶数为2,故不是通解,也不是特解,只能说它是微分方程的解.

微分方程的解,亦可用隐函数的形式给出,这类解称为微分方程的隐式解.

例5 验证由方程 $y=\ln(xy)$ 所确定的隐函数是二阶微分方程 $(xy-x)y''+x(y')^2+(y-2)y'=0$ 的解.

证 把方程 $y=\ln(xy)$ 两边对 x 求导,得