自学辅导丛书

自学平面几何的钥匙（下册）

麦康源　陈朝志　傅基勤　编著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

平面几何里，关于綫段长度和面积大小的度量問題、几何图形的位似和相似問題，自学的人感到很难理解。几何作图題更需要应用很多方面的知識，也是訓练思考能力的有效方法；自學的人在作图問題上也往往束手无策。本书在这两方面有詳細的解释和分析，可以帮助自学的人自己独立地钻研和思考，从而理解并掌握平面几何学的內容。

本书原名自學平面几何的钥匙（高中組），本书最好对照教科书閱讀。

自学輔导丛书

自学平面几何的钥匙（下册）

凌康源 陈朝龙 梅慈勤 編著

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

上海市印刷五厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印張3 28/32 字数86,000

（原上海科普、科技版共印222,000册 1957年12月第1版）

1959年5月新1版 1963年1月第7次印刷

印数145,001—185,000

統一书号：13119·286

定 价：（七）0.28元

目　次

第一章 綫段的度量

一 什么叫度量問題

在初中平几課本❶里，曾把一条綫段放到另一条綫段上去比較，从而作出两条綫段相等和不相等的規定。如果两条綫段不相等，又作出了一条綫段大于或小于另一条綫段的規定。对于角、弧也有同样的处理。初中学生在研究几何图形中綫段和綫段、角和角的关系时，只能做到象証明綫段 AB >綫段 CD，或 $\angle AOB<\angle A'O'B'$。如果要进一步研究綫段 AB 比綫段 CD 大多少，或者 $\angle AOB$ 比 $\angle A'O'B'$ 小多少，就缺乏严密的方法了。为了研究某一几何图形中，一条綫段比另一条綫段大多少或小多少这样一类的問題，我們必須研究度量問題。

首先应当說明一下什么叫几何量。上面說过綫段和綫段、角和角、弧和弧都是可以相互比較大小的。我們把可以相互比較大小的同类的几何图形叫做几何量。綫段、角、弧就是三类不同的几何量。我們在某一类几何量中选擇一个图形做标准（也叫单位），把这个标准和其他同类的图形做比較，然后用一个数来表示比較的結果。例如以尺量竹竿，尺就是事先选擇的标准綫段。我們用数来表示用尺和竹竿比較的結果，象7.5尺，这說明竹竿是尺的七倍半。这一个数叫做量数。因此对某一类几何量的度量問題可以初步理解为：在确定了标准量之

❶ 这里的初中平几課本是指 1956 年人民教育出版社出版的初級中学課本平面几何，下同。

后，如何对其他同类的几何量找出他的量数的問題。表面看来，度量問題，似乎簡单。用尺量布，用量角器量角，誰不会呢。实际上并不如此。度量問題有它自己的理論，例如度量的实行以什么公理为依据，选定了标准量以后，如何对一个同类的其他几何量精确地决定它的量数，量数究竟是什么样的数。这些問題都不是十分容易答复的。高中平几課本❶一开始就介紹了綫段的度量理論。关于角，弧的度量理論，在形式上，和綫段的度量理論十分类似，因此都沒有提及。最后还有多边形面积的度量問題，圓的周长和面积的度量問題。高中平几的全部教材，从头至尾，为度量問題所貫串，因此它的內容，比初中平几教材的內容更丰富多采了。

二　綫段的度量理論

欧几里得公理　根据前面的討論，綫段的度量問題就是研究怎样用单位綫段去度量其他的綫段，和怎样精确地找出一个量数来表示度量的結果。对于綫段的量数，我們应当有下面的理解，(1)相等綫段有相等的量数。(2)如果把一条綫段分成几个部分，那末对应于各个部分綫段的量数之和，等于这些部分綫段的和的量数。在确定綫段的量数的过程中，我們一定要把单位綫段放在被度量的綫段上去做比較。用几何的术語来說：就是在被度量的綫段上从它的某一个端点起連續不断地截取单位綫段。这样截取的結果不外下面两种情形：(1)截了几次，恰巧截尽，就是被度量綫段含有单位綫段的整数倍。(2)截了几次而有剩余，剩余的綫段显然比单位綫段小。古代希腊数学家欧几里得把这种眞实的几何事实編成

❶　这里的高中平几課本是指1955年人民教育出版社出版的高級中学課本平面几何，下同。

一条公理，作为度量問題的公理依据。这一条公理就叫欧几里得公理，它的内容是：在长短不同的两条綫段中，无論較长的綫段是怎样长，較短的綫段是怎样短，我們总可以在較长的綫段上連續截取較短的綫段，并且截到某一次以后，就得出下面的两种情形中的一种：或者没有剩余，或者得到一条短于較短綫段的剩余綫段。

两条綫段的公度 在綫段的度量理論中，綫段的公度的概念十分重要。不明确綫段公度的意义就不能透徹理解綫段量数的性质。如果綫段 AB、CD 各含 MN 的整数倍。我們把綫段 MN 叫做綫段 AB、CD 的公度，例如綫段 $AB=28\cdot MN$，$CD=20\cdot MN$，这里 28，20 都是整数，所以 MN 是 AB，CD 的公度。請讀者注意下面的等式是成立的：$AB=28\cdot MN=56\cdot\frac{MN}{2}=84\cdot\frac{MN}{3}=112\cdot\frac{MN}{4}=\cdots\cdots$，$CD=20\cdot MN=40\cdot\frac{MN}{2}=60\cdot\frac{MN}{3}=80\cdot\frac{MN}{4}=\cdots\cdots$。显然 AB，CD 各含 $\frac{MN}{2}, \frac{MN}{3}, \frac{MN}{4}\cdots\cdots$ 的整数倍，因此 $\frac{MN}{2}, \frac{MN}{3}, \frac{MN}{4}\cdots\cdots$ 都是 AB，CD 的公度。由此可知，只要知道 MN 是 AB，CD 的公度，MN 的任何整数分之一都是 AB，CD 的公度。当然我們还得問有没有大于 MN 的公度呢？請注意下面的等式也是成立的：$AB=28\cdot MN=14\cdot(2\cdot MN)=7\cdot(4\cdot MN)$。$CD=20\cdot MN=10\cdot(2\cdot MN)=5\cdot(4\cdot MN)$。显然 $2\cdot MN$，$4\cdot MN$ 都是 AB，CD 的公度。但是 7，5 是没有公因数的，因此 $4\cdot MN$ 是公度中最大的一个。由上面的討論，可知：两条綫段只要有一个公度，它們就有无数个公度；在这无数个公度中，找不出最小的公度，但是有一条最大的公度。我們把两条綫段的最大的一个公度就称为它們的最大公度。

求两条已知綫段的最大公度的問題。現在我們提出两条定理，作为求已知两綫段最大公度的依据。它們是：

【定理一】 在两条綫段中，如果較长的綫段含有較短的綫段的整数倍而沒有剩余，那末較短的綫段就是这两条綫段的最大公度。

例如，綫段 a（图 1）含有綫段 b 的 3 倍，因为綫段 b 含有它本身的 1 倍，所以綫段 b 是綫段 a 和綫段 b 的公度。其次，綫段 b 不可能含有任何比它自己更长的綫段的整数倍，所以綫段 b 就是綫段 a 和綫段 b 的最大公度。

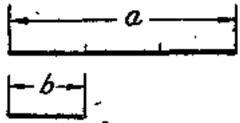

图 1

【定理二】 在两条綫段中，如果較长的綫段含有較短的綫段的整数倍而有剩余，那末这两条綫段的最大公度（如果存在的話）就是較短的綫段和剩余綫段的最大公度。

例如，綫段 a 含有綫段 b 的 3 倍和剩余綫段 r（图 2），那末 $a=b+b+b+r$.

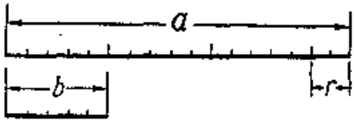

图 2

从这个等式我們可以得出：

（1） 如果綫段 b 和綫段 r 各含有某一条綫段的整数倍而沒有剩余，那末綫段 a 也必定含有这一条綫段的整数倍而沒有剩余。例如，綫段 b 含有某一条綫段的 5 倍，綫段 r 含有这条綫段的 2 倍，綫段 a 就含有这条綫段的 $(5+5+5+2)$ 倍，即 17 倍。

（2） 反过来，如果綫段 a 和綫段 b 各含有某一条綫段的整数倍而沒有剩余，綫段 r 也就含有这条綫段的整数倍而沒有剩余。例如，綫段 a 含有某一条綫段的 17 倍，綫段 b 含有

这条綫段的5倍，那末綫段a中等于$3b$的那一部分含有这条綫段的15倍，因此綫段r就含有这条綫段的(17－15)倍，即2倍。

因此在两組綫段(a和b)，(b和r)中，如果有公度存在，那末所有的公度必定都是相同的，所以它們的最大公度也必定是相同的。

对于最后的結論，我們現在加以补充說明。假定說a,b的最大公度是綫段d，可是d不是綫段b，r的最大公度，那末b，r一定有大于d的公度d'。因为b，r的公度就是a，b的公度，所以d'也是a，b的公度。可見d不是a，b的最大公度。这和d是a，b的最大公度的假定矛盾，因此a，b的最大公度d也是b，r的最大公度。

我們采用著名的輾轉相截法来求已知两綫段的最大公度。設已知两綫段是a，b，且$a>b$，下面就是求a，b两綫段的最大公度的方法。

第一步 用圓規在綫段a上从固定的端点A起，連續截取等于b的綫段。根据欧几里得公理，截取的結果不出下面两种情形中的一种：

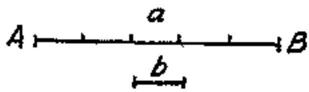

图 3

(i) 在綫段a上，截到某一次，恰好截完而沒有剩余(图3)。由定理一，綫段b本身就是a、b 的最大公度。

(ii) 在截到某一次得到小于b的剩余綫段r_1. 由定理二a，b的最大公度就是b，r_1的最大公度。所以求a，b的最大公度的工作轉換为求b，r_1的最大公度(图4)。我們把这一回綫段

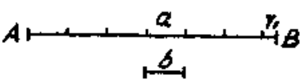

图 4

相截叫做第一回，r_1 是第一回截得的剩余。

第二步　为了求 b, r_1 的最大公度，我們重复了第一步的手續，就是在綫段 b 上，从某一个端点起，連續截取綫段 r_1. 由欧几里得公理，截取的結果又不出下面两种情况的一种：

(i) 截到某一次，恰好截完而沒有剩余。由定理一，r_1 本身就是 b, r_1 的最大公度。由定理二，r_1 又是 a, b 的最大公度。

(ii) 截到某一次而得到小于 r_1 的剩余綫段 r_2. 由定理二，b, r_1 的最大公度就是 r_1, r_2 的最大公度。現在求 b, r_1 最大公度的工作又轉換为求 r_1, r_2 的最大公度。这是輾轉相截的第二回，r_2 是在第二回相截中所得的剩余。

第三步　为了求 r_1, r_2 的最大公度，我們又得重复第一步的手續，就是在綫段 r_1 上，从某一个端点起，連續截取綫段 r_2. 这样的不断继續輾轉相截，由欧几里得公理，我們可能得到的結果不出下面两种情况中的一种：

(i) 輾轉相截继續到第 m 回。在第 m 回的輾轉相截中，在綫段 r_{m-2}（第 $m-2$ 回輾轉相截所得的剩余綫段）上，从某一个端点起連續截取綫段 r_{m-1}（第 $m-1$ 回輾轉相截所得的剩余綫段），截到某一次，恰巧截尽而沒有剩余。由定理一，r_{m-1} 本身就是 r_{m-2}, r_{m-1} 的最大公度。如果把已知綫段 a, b, 和各剩余綫段 $r_1, r_2, r_3 \cdots\cdots r_{m-1}$, 按先后得到的次序排列起来：

$$a,\ b,\ r_1,\ r_2\ r_3 \cdots\cdots r_{m-3},\ r_{m-2},\ r_{m-1}.$$

由定理二，可知 a, b 的最大公度就是 b, r_1 的公度；b, r_1 的最大公度就是 r_1, r_2 的最大公度；r_1, r_2 的最大公度就是 r_2, r_3 的最大公度；……；r_{m-3}, r_{m-2} 的最大公度就是 r_{m-2}, r_{m-1} 的最大公度。現在 r_{m-2}, r_{m-1} 的最大公度就是 r_{m-1}, 所以 a, b 的最大公度就是 r_{m-1}.

(ii) 輾轉相截的过程一直继續下去,每截一回总有剩余。在这种情况下,我們説 a, b 没有任何公度。为什么呢?我們把綫段 a, b 和各回截得的剩余綫段,按大小排列起来:

$$a,\ b,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\cdots\cdots,r_m,\ r_{m+1},\cdots\cdots.$$

在这个排列中,后一条綫段小于前一条綫段。假定 a, b 有公度綫段 d, 那末由定理二 d 也是綫段 b, r_1 的公度。可知 a, b, r_1 各含有 d 的整数倍。同理,可知 r_2, r_3, $\cdots\cdots r_m$, $r_{m+1}\cdots\cdots$ 等所有的剩余綫段都含有 d 的整数倍。但是在排列的每相邻的两条綫段中,(象 r_2, r_3)后面一条总是小于前面的一条(象 $r_3<r_2$),因此后面的一条至少比前面的一条少含一个 d. 这样的逐条少下去,总有一条剩余綫段是 0. 这和輾轉相截一直继續下去,每截一回总有剩余的情况不符,因此"a, b 有公度 d"的假定不合理,也就是 a, b 没有公度。我們把**没有公度的綫段叫做无公度綫段**。

用下面的例子来說明前面的那些理論:

[例1] 在求綫段 a, b 的最大公度的过程中,第一回在 a 上截了 4 个 b 而得剩余 r_1, 第二回在 b 上截了 3 个 r_1 而得剩余 r_2, 第三回在 r_1 上截了 5 个 r_2 而得剩余 r_3, 第四回在 r_2 上截了 2 个 r_3 而恰好截尽; 試求 a, b 各含它們的最大公度 r_3 的倍数。

解: 按題意得: ①: $a=4b+r_1$. ②: $b=3r_1+r_2$.

③: $r_1=5r_2+r_3$. ④: $r_2=2r_3$.

把④式代入③式,得⑤: $r_1=11r_3$. 把④、⑤两式同时代入②,得⑥: $b=35r_3$. 把⑤,⑥两式同时代入①式,得 $a=151r_3$.

$\therefore$ a, b 各含最大公度 r_3 的 151,35 倍。

[例2] 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=\angle C=36°$.

求証: AB, BC 是无公度綫段(图5)。

証明：把 AB，BC 輾轉相截，如果这輾轉相截的过程可以一直继續下去就說明了 AB，BC 是无公度綫段。

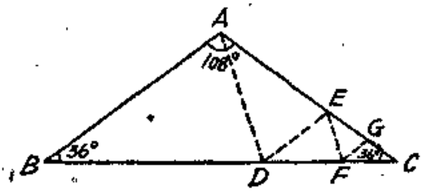

图 5

在 $\triangle ABC$ 中，$\because \angle B = \angle C$，$\therefore AB = AC$；并且 $\angle BAC = 180° - 2 \times 36° = 108°$． $\because \angle BAC > \angle BCA$，$\therefore BC > AB$．因此第一回先在 BC 上截 $BD = AB$，連結 AD．

在 $\triangle ABD$ 中，$\because AB = BD$，$\therefore \angle BAD = \angle ADB$．而

$$\angle ADB = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°．\therefore \angle ADC = 180° - 72° = 108°．$$

在 $\triangle ADC$ 中，$\angle DAC = 180° - (108° + 36°) = 36°$，$\therefore \triangle ADC$ 也是底角等于 36° 的等腰三角形，$\therefore DC = AD$．又因 $\angle ADC > \angle DAC$，$\therefore DC < AC$，也就是 $DC < AB$．$\therefore DC$ 是第一回截得的剩余。

第二回，应当在 AB 上截取 DC．但 $AB = AC$，$\therefore$ 可在 AC 上截取 $AE = DC$．連結 DE．

用同样的方法，可以說明 $EC < DC$，因此 EC 是第二回截得的剩余，同时 $\triangle EDC$ 是底角等于 36° 的等腰三角形。

第三回在 DC 上截 $DF = EC$．用同样的方法，可以說明 $FC < EC$，因此 FC 是第三回截得的剩余，同时 $\triangle EFC$ 是底角等于 36° 的等腰三角形。

由此可知，輾轉相截的过程可以一直继續下去。每截一回，总是得到一个較小的，底角等于 36° 的等腰三角形。因此 AB，BC 是无公度綫段。

綫段的度量 設綫段 l 是长度单位，綫段 a 是被度量的綫段。現在我們来研究怎样用 l 量 a，怎样精确地找出 a 的量数。綫段 l 和 a 的最大公度在这里起重要的作用。

首先假設 l, a 是有公度綫段。这里我們分两种情况来討論。(i) l 本身就是 a, l 的最大公度，显然 a 含有 l 的整数倍。因此在綫段 a 上，从某一端起，連續截取等于 l 的綫段，截了几次(比如 m 次)以后恰好截尽。即 $a=ml$. 在这样的情况下，量数 m 是个整数。(ii) l, a 的最大公度是綫段 d. 按两綫段最大公度的定义，l, a 各含 d 的整数倍。为了明确起見，設 l 含 n 个 d；a 含 m 个 d. 即 $l=nd$，$a=md$（这里的 n, m 是沒有公因数的两个整数）。由上面的等式得 $d=\frac{l}{n}$. $a=m\frac{l}{n}=\frac{m}{n}l$. 由此可知，如果在 a 上，从某一端起，連續截取綫段 d，一定截了 m 次而恰好截尽。在这样的情况下量数 $\frac{m}{n}$ 是一个分数。

我們知道分数可以化为有限小数$\left(象\frac{7}{4}=1.75\right)$或循环小数，$\left(象\frac{16}{9}=1.777\cdots\right)$，整数和分数总称为有理数。因此我們說：当长度单位和被度量綫段是有公度的，那末度量所得的量数是一个整数，或者是一个分数(包括有限小数、循环小数)。总之量数是一个有理数。

假設长度单位 l 和被度量綫段 a 是无公度綫段。那末，用 l 的任何整数分之一 $\left(象\frac{l}{10}, \frac{l}{100}, \frac{l}{1000}, \frac{l}{10000}\cdots\cdots \frac{l}{10^n}, \cdots\cdots\right)$都不能截尽 a. 因为每截一次，总有剩余，因此每次所得量数仅是 a 的量数的近似值。但是在 a 上截取的綫段一次比一次小$\left(象\frac{l}{1000}<\frac{l}{100}<\frac{l}{10}\right)$，因此这样逐次所得的

各个近似値，也一个比一个的逼近 a 的量数了。我們用下面的具体例子来說明这个方法。

(1) 在图 6 中，l 是长度单位，a 是被度量綫段。先在綫段 a 上，連續截取等于 l 的綫段。現在截了一次，就得剩余 CB，当然 $CB<l$. 显然 a 比一个 l 大，可是分为两个 l 又不够。因此 $l<a<2l$，可見 a 的量数在 1 和 2 之間。

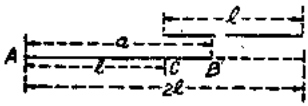

图 6

(2) 現在在 a 上，連續截取等于 $\frac{l}{10}$ 的綫段（图 7），截了 13 次而得剩余 C_1B，当然 $C_1B<\frac{l}{10}$. 可見 a 分为 13 个 $\frac{l}{10}$ 而有余，分为 14 个 $\frac{l}{10}$ 却又不够。因此 $13\cdot\frac{l}{10}<a<14\cdot\frac{l}{10}$；就是 $1.3l<a<1.4l$. 可見 a 的量数在 1.3 和 1.4 之間。又因 a 和 $1.3l$ 之差与 $1.4l$ 和 a 之差都小于 l 的 $\frac{1}{10}$，所以我們說 1.3 和 1.4 分別是精确到 $\frac{1}{10}$ 的，a 的量数的不足和过剩近似値。

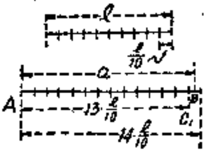

图 7

(3) 現在在 a 上，連續截取等于 $\frac{l}{100}$ 的綫段$\Big($因为 $\frac{l}{100}$ 太小，不易用图表出，所以不画图了。讀者可以根据图 7 想象出截取的情形$\Big)$。假定截了 135 次而得剩余 C_2B，当然 $C_2B<\frac{l}{100}$. 可見 a 分为 135 个 $\frac{l}{100}$ 有余，分为 136 个 $\frac{l}{100}$ 却又不够。因此 $135\cdot\frac{l}{100}<a<136\cdot\frac{l}{100}$；就是 $1.35l<a<1.36l$. 可見 a 的量数在 1.35 和 1.36 之間。又因 a 和 $1.35l$ 的差与

$1.36l$ 和 a 的差都小于 l 的 $\frac{1}{100}$，所以我們說 1.35 和 1.36 分别是精确到 $\frac{1}{100}$ 的，a 的量数的不足和过剩近似值。

(4) 現在在 a 上，連續截取等于 $\frac{l}{1000}$ 的綫段。假定截了 1358 次而得剩余 C_3B，当然 $C_3B<\frac{l}{1000}$. 可見 a 分为 1358 个 $\frac{l}{1000}$ 而有余，分为 1359 个 $\frac{l}{1000}$ 却又不够。因此 $1358\cdot\frac{l}{1000}<a<1359\cdot\frac{l}{1000}$，就是 $1.358l<a<1.359l$. 可見 a 的量数在 1.358 和 1.359 之間。又因 a 和 $1.358l$ 的差与 $1.359l$ 和 a 的差都小于 l 的 $\frac{1}{1000}$，所以我們說 1.358 和 1.359 分别是精确到 $\frac{1}{1000}$ 的，a 的量数的不足和过剩近似值。

(5) 一般讲，在 a 上，連續截取等于 $\frac{l}{10^n}$ 的綫段，假定截了 m 次（m 是一个整数），而得剩余 C_nB，当然 $C_nB<\frac{l}{10^n}$. 可見 a 分为 m 个 $\frac{l}{10^n}$ 而有余，分为 $(m+1)$ 个 $\frac{l}{10^n}$ 却又不够。因此 $m\cdot\frac{l}{10^n}<a<(m+1)\cdot\frac{l}{10^n}$；就是 $\frac{m}{10^n}\cdot l<a<\frac{m+1}{10^n}l$. 可見 a 的量数在 $\frac{m}{10^n}$ 和 $\frac{m+1}{10^n}$ 之間。又因 a 和 $\frac{m}{10^n}l$ 的差与 $\frac{m+1}{10^n}\cdot l$ 和 a 的差都小于 l 的 $\frac{1}{10^n}$，所以我們說 $\frac{m}{10^n}$ 和 $\frac{m+1}{10^n}$ 分别是精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的，a 的量数的不足和过剩近似值。

把綫段 a 的量数的不足和过剩近似値依照它們的精确度排列起来：

$$1,\ 1.3,\ 1.35,\ 1.358,\cdots\cdots$$
$$2,\ 1.4,\ 1.36,\ 1.359,\cdots\cdots$$

容易看出精确度越高，不足近似値逐步增加而过剩近似値逐次减少，因此两个同精确度的过剩近似値与不足近似値的差越来越小。换句話說，在不断提高精确度的过程中，它們越来越接近。

同时两个同精确度的不足与过剩近似値的数字只有末一位不同(象1.358，1.359)或者末了几位不同(如果1.345999，1.346000分别是精确到$\frac{1}{10^6}$的，某綫段量数的不足和过剩近似値，那末它們末四位的数字就不同了)，如果在綫段a上，把截取$l,\frac{l}{10},\frac{l}{10^2},\frac{l}{10^3},\cdots\cdots\frac{l}{10^n},\cdots\cdots$的过程无限地继續下去，那末$a$的不足近似値逐次增加而成为一个无限小数。$a$的过剩近似値逐次减少，也成为一个无限小数。这时考虑一个无限小数的末一位或末几位就沒有什么意义了。因此我們就这两个无限小数有相同的数字，或者說它們就是同一个无限小数。这个无限小数不可能是循环的（因为所有的循环小数都可以化为分数也就表示a与l是有公度的綫段了）。我們把一个无限不循环小数叫做一个无理数。所以当a和l是无公度綫段时，a的量数是一个无理数。

代数学里把有理数和无理数总称实数，因此我們最后的結論是：在确定了长度单位以后，对应于每一条綫段，总是存在着一个实数作为它的量数。

如果某一綫段的量数是无理数，那末只能用它的近似値来表示它的长度，象在每边都是一尺的正方形中，它的对角綫的长度的不足近似値是1.414尺，它的精确度是$\frac{1}{1000}$尺。

用同一长度单位去度量两条綫段就得两个量数。这两个量数之比，定义为这两条綫段之比。例如用尺去量綫段AB,CD分别得量数5和3，那末$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{3}$.如果改用寸去量$AB$,$CD$,那末所得的量数必然分别是50和30，因而$\frac{AB}{CD}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3}$.可見两綫段之比不因长度单位的改变而改变。

如果綫段a, b的比等于綫段c, d的比即$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末綫段a, b, c, d叫做成比例的綫段，a, d叫做比例的外項，b, c叫做比例的內項，d叫做a, b, c的第四比例項。

如果綫段a, b之比等于綫段b, c之比，即$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，那末綫段b叫做綫段a, c的比例中項。

两綫段的比的概念和四条綫段成比例的概念是十分重要的。我們明确了这些概念以后才有条件来进一步研究几何图形的性質。

习　　題

1. 哪样的綫段叫做有公度綫段？哪样的綫段叫做无公度綫段？怎样証明正方形的对角綫和一边是无公度綫段（只举出証明要点）？除了正方形的对角綫和一边外，再举出一些无公度綫段的例子，如正方形的对角綫和它的周长等。
2. 为什么两綫段有公度时，就一定有无数个公度？在这无数个公度中，为什么沒有最小的一个，但必定有最大的一个？
3. 先作两条不相等的綫段，試用輾轉相截法，求它們的比。
4. 点M分綫段AB成$AM:MB=1:2$，求$AM:AB$和$MB:AB$.
5. 点K分綫段AB成$m:n$；求$AK:AB$和$KB:AB$.
6. 作一个等边三角形和它的高；用輾轉相截法求它的一边与它的高的比(精确到0.01)。