蹇人宜　安恒斌　著

解析函数空间上的算子理论导引

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书主要讨论解析函数空间上的算子理论，为青年学者进入这一研究领域提供一个初级平台. 本书主要介绍了算子理论中经常用到的涉及算子矩阵的一些结果，如 Douglas 准则, Cholesky 因子分解定理等; 本书较为详细地介绍了 $\mathcal{H}^2$ 空间及其上的算子理论的 deBranges-Rovnyank 方法; 本书还介绍了 Bergman 空间及其上的算子的基本理论，特别是关于 Toeplitz 型算子的紧性的讨论，介绍了研究再生核空间上的算子紧性的强有力的工具—— Berezin 变换; 书中还包含一些最近的研究成果.

本书读者对象为数学类各专业高年级学生、研究生、教师及有关专业的科技工作者.

图书在版编目(CIP)数据

解析函数空间上的算子理论导引/蹇人宜，安恒斌著. —北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-018095-7

I. 解… II. ①蹇… ②安… III. 解析函数-函数空间-算子 IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 115491 号

责任编辑：范庆奎 贾瑞娜 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：安春生 / 封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 1 月第一次印刷 印张：15 1/2
印数：1—3 500 字数：354 000

定价：38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

前　言

函数空间上的算子理论是算子理论中十分活跃并引起广泛关注的分支之一，这是因为算子理论中许多深层次的问题都可以模型化为具体的函数空间上的、由具有某些特殊性质的函数所诱导出的算子的相应问题. 人们通过对这些“具体”算子的研究来揭示“抽象”算子的内在性质; 确切地说, 就是利用诱导出算子的那个函数的分析性质来刻画该算子在算子理论意义下的性质. 解析函数空间上的算子理论的研究, 是近几十年来算子理论研究的成功例子之一, 特别是 Bergman 空间上的若干类型算子的讨论在近 20 年来十分活跃, 并产生了一些新的工具, 获得了许多深刻的结果. 本人之所以选择这一方向作为研究生学习和研究的方向之一, 就是因为对这些问题的研究除了需要综合运用代数、泛函分析、拓扑和函数论的相关知识外, 也有一个虽起点不高, 但却可以进入当前国际上的研究前沿的好处, 显然这对培养研究生的研究能力是有所裨益的.

我和我的学生安恒斌博士合著的这本书, 定位为既是专著, 又是研究生的教材. 基于这种理念, 我们力图做到以下几点：一是自包含的, 尽可能地把能进入前沿研究的相关知识收录在内. 读者读了这本书, 即可进入研究工作. 二是起点尽可能的低. 凡学好了本科的分析、代数和函数论的读者, 即可不困难地读下去. 三是篇幅不宜过大, 因而内容有所取舍. 针对硕士阶段学生的基础, 我们仅讨论单复变解析函数的空间. 四是要能反映当前研究的现状, 所以有相当一部分内容用于介绍最新的研究成果. 最后, 由于本书有“教材”性质, 论证力求做到详尽, 并配以少量的习题, 这些习题的一部分是本书内容的补充.

我们虽有上述良好的愿望, 但由于解析函数空间, 特别是 $\mathcal{H}^2$ 和 Bergman 空间上的算子理论的内涵十分丰富, 文献又浩如烟海, 岂能囊括在这区区二百多页的小书中? 我们不过是把这一研究领域必备的一些方法性的知识加以介绍, 起一个抛砖引玉的作用而已; 当然, 由于受我们自身研究兴趣的限制, 加之我们知识的谫陋, 挂一漏万的地方很多, 期望专家、读者不吝赐教. 倘若这本小书能对青年学子有所帮助, 那真是我们最大的荣幸.

本书共有 7 章及附录. 第 1 章简要地介绍了本书的工作平台：Hilbert 空间的基本理论；第 2 章介绍了本书其余部分所需要的算子理论的预备知识. 前两章的内容是经典的, 大多数的“泛函分析”教材都会包括它们, 已熟悉这些内容的读者可以跳过去, 直接从第 3 章开始. 第 3 章介绍算子理论中经常用到的一些涉及算子矩阵的结果, 如文献上经常引用的 Douglas 准则、Cholesky 因子分解定理, 以及本书后面所涉及的补子空间的概念. 第 4 章和第 5 章介绍 $\mathcal{H}^2$ 上的算子理论的 deBranges-Rovnyank 方法. deBranges 与 Rovnyank 在对压缩算子的研究中, 引入了一个与其

他函数模型不同的模型, 有独到之处, 其关键性的想法是补子空间的概念, 这是正交补概念的推广. 他们在 20 世纪 60 年代中期利用这一方法展开对 $\mathcal{H}^2$ 上的乘法算子的研究, 但没有广泛地引起其他学者的兴趣. 到 80 年代中期, 在 deBranges 解决了著名的 Bieberbarch 猜想后, 这一方法才被诸多学者重新认识. 由于国内找不到他们的专著*Square Summable Power Series*一书, 所以我们在这两章中较为详细地介绍了他们的方法. 最后两章则介绍了 Bergman 空间上的算子的基本理论. 虽然早在 50 年代, 已初步建立了再生核空间 (特别是 Bergman 空间) 的理论框架, 并将其结果广泛地用于复分析的研究, 但对于其上的算子理论的研究则是在 80 年代末期才进入黄金时代. 从那时起到眼下, 包括华人数学家在内的许多数学工作者, 发表了大量的研究论文, 也有专著出现. 第 6 章专门介绍了再生核空间的解析结构, 第 7 章介绍了研究 Bergman 空间上的算子的基本方法和工具, 特别是用 Berezin 变换这一工具来讨论算子的紧性. 这两章中含有我们的一些研究成果. 最后的附录则简要地罗列了本书所需要的代数和拓扑的一些结果.

我们的这一研究课题, 获宁夏回族自治区自然科学基金的资助, 本书的出版又得到北方民族大学 (原西北第二民族学院) 出版基金的资助, 没有这些资助, 这本书恐怕不可能呈现在读者面前. 阳明珠教授和李炳仁教授审阅了部分书稿, 提出了许多中肯的建议; 他们又热情地推荐出版, 我们在此对这两位先生的鼓励和支持表示衷心感谢. 我的研究生鲍建仁和张晓亮对打印稿部分章节做了认真仔细的校订, 感谢他们为本书的出版所付出的辛勤工作.

在本书付梓之际, 不由想起许许多多教育和帮助过我的人. 已故陈寿轩先生, 一位自学成才的数学教育家, 受他的影响, 我才走上了研习数学之路; 已故贵州大学原校长陈希文, 一位青年时代即投身中华民族解放事业的老革命, 以学者的勇气和政治家的智慧, 排除极 “左” 路线的干扰, 为我提供了求学的机会; 已故的蔡仲武教授和健在的谭鑫、杨世藩两位教授, 在我求学期间给予我许多特别的帮助, 为我的学习提供了很好的条件; 我的算子理论知识是从严绍宗教授那里学到的, 并且他一直鼓励和帮助我; 国内泛函分析界的林有浩教授、王声望教授、陈文塬教授、阳明珠教授和张奠宙教授等前辈经常鼓励和帮助我, 给我很多指点; 蒙李炳仁教授邀请, 我有幸在 1995 年秋季访问了中国科学院数学研究所, 本书的部分内容就是这一期间的研究成果; 我还在与定光桂教授、杜鸿科教授、周家云教授、黄春朝教授和孙大清教授等先生的交流中获得不少教益; 1991～1992 学年度, 在访问美国 Iowa 大学期间, 与 R. Curto 教授有过卓有成效的合作, 本书中的部分内容曾与他交流过. 在此我要对上面提及和未提及的帮助过我的师友致以深深的感谢. 最后, 我还要感谢我身后的两位女性: 先母王芳和妻子罗唐珍. 多年来她们默默地支持我的科研工作, 为我营造了一个良好的工作环境.

蹇人宜
2006 年 4 月

目　　录

第 1 章　Hilbert 空间的基本理论

这一章提供本书其余部分的工作载体和一般框架. 它分为两个部分：第一部分，Hilbert 空间的几何，它给出了今后所需的若干最基本的概念和事实；第二部分给出了本书所需的有关算子论的基本结果.

1.1　Hilbert 空间的几何

设 $\mathcal{H}$ 为一复线性空间, 函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 叫作 $\mathcal{H}$ 上的一个内积, 是指它满足：

(1) $\langle x,x\rangle\geqslant 0, \forall\, x\in\mathcal{H}$, 且 $\langle x,x\rangle=0\Longleftrightarrow x=0$;

(2) $\langle x_1+\alpha x_2,y\rangle=\langle x_1,y\rangle+\alpha\langle x_2,y\rangle, \forall\,\alpha\in\mathbb{C}, \forall\, x_1,x_2,y\in\mathcal{H}$;

(3) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}, \forall\, x,y\in\mathcal{H}$.

对子 $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 叫作内积空间. 从现在起, 我们总认为函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是已知的, 而把此空间记为 $\mathcal{H}$.

由 $\|x\|:=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ 所定义的实函数具有以下性质：

(1) $\|x\|\geqslant 0, \forall\, x\in\mathcal{H}$, 且 $\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0$;

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|, \forall\,\alpha\in\mathbb{C}, \forall\, x\in\mathcal{H}$.

一般地, 如 $\mathcal{X}$ 是 (实或) 复线性空间, 函数 $p:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ 叫作 $\mathcal{X}$ 上的半范, 是指：

(1) $p(x)\geqslant 0, \forall\, x\in\mathcal{X}$;

(2) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x), \forall\,\alpha\in\mathbb{C}, \forall\, x\in\mathcal{X}$;

(3) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y), \forall\, x,y\in\mathcal{X}$.

如果加上 $p(x)=0\Longleftrightarrow x=0$, 则 p 叫作范数. 下面我们要指出上述关于 $\mathcal{H}$ 上定义的 $\|\cdot\|$ 是范数, 而最重要之处是证明 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|, \forall\, x,y\in\mathcal{H}$. 我们将在引进一些基本概念之后再做此事.

两个向量 $x,y\in\mathcal{H}$ 叫作正交的 (记号 $x\perp y$) 是指 $\langle x,y\rangle=0$; 给定一个集合 $\mathcal{M}\subset\mathcal{H}$, x 正交于 $\mathcal{M}$(记号 $x\perp\mathcal{M}$), 是指 $\langle x,m\rangle=0, \forall\, m\in\mathcal{M}$. 集合 $\{x_\alpha\}\subset\mathcal{H}$ 叫作一个正交集是指当 $\alpha\neq\beta$ 时, $\langle x_\alpha,x_\beta\rangle=0$. 向量 x 叫作规范的 (或叫单位向量), 如果 $\|x\|=1$. $\{e_\alpha\}\subset\mathcal{H}$ 叫作一个标准正交集, 如果

$$\langle e_\alpha,e_\beta\rangle=\begin{cases}1, & \alpha=\beta,\\ 0, & \alpha\neq\beta.\end{cases}$$

另外, 集合 $\{e_\alpha\} \subset \mathcal{H}$ 所生成的线性子空间的闭包用记号 $\overline{\text{span}\{e_\alpha\}}$ 来表示.

定理 1.1.1 (勾股定理)　设 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathcal{H}$ 中的有限正交集, 则

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

证明

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$ ∎

定理 1.1.2 (Cauchy-Schwarz 不等式)　$\forall x, y \in \mathcal{H}$, $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.

证明　如 $y = 0$, 结论是显然的; 假定 $y \neq 0$, 令 $e = y/\|y\|$, 将 x 写成

$$x = \langle x, e \rangle e + (x - \langle x, e \rangle e).$$

注意到 $(x - \langle x, e \rangle e) \perp e$, 故由勾股定理有

$$\|x\|^2 = \|\langle x, e \rangle e\|^2 + \|x - \langle x, e \rangle e\|^2 \geqslant \|\langle x, e \rangle e\|^2 = |\langle x, e \rangle|^2,$$

于是 $|\langle x, e \rangle| \leqslant \|x\|$. 再将 $e = y/\|y\|$ 代入即获得所需的不等式. ∎

定理 1.1.3 (三角不等式)　$\forall x, y \in \mathcal{H}$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

证明

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\text{Re}\langle x, y \rangle \\
&\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \\
&\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

故定理所述不等式成立. ∎

由上述定理以及前面提到 $\|\cdot\|$ 的两个性质, 知 $\|\cdot\|$ 确为 $\mathcal{H}$ 上的范数. 这个范数使我们可以在 $\mathcal{H}$ 上定义一个度量拓扑, 即定义

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

序列 $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ 叫作收敛于 $x \in \mathcal{H}$, 是指

$$\rho(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

$\mathcal{H}$ 叫作完备的, 如 $\mathcal{H}$ 中的每个 Cauchy 序列在 $\mathcal{H}$ 中收敛, 这就意味着如 $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ 满足 $\|x_n - x_m\| \to 0\ (n, m \to \infty)$, 则存在 $x \in \mathcal{H}$, 使得 $\|x_n - x\| \to 0\ (n \to \infty)$. 完备的内积空间叫作 Hilbert 空间. 子集 $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ 叫作一个线性流形或子空间, 是指当 $x, y \in \mathcal{H}$ 时, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 均有 $\alpha x + \beta y \in \mathcal{M}$; 一个闭的线性流形叫作闭子空间. 于是一个 Hilbert 空间的闭子空间自身也是一个 Hilbert 空间. 本书中我们总是假定 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间.

定理 1.1.4 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是两个变量的连续函数, 且 $\|\cdot\|$ 是连续函数.

证明 设 $\{x_n\}$ 收敛于 x, $\{y_n\}$ 收敛于 y, 则

$$\begin{aligned}|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| &= |\langle x, y\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \\ &\leqslant |\langle x, y - y_n\rangle| + |\langle x - x_n, y_n\rangle| \\ &\leqslant \|x\|\|y - y_n\| + \|y_n\|\|x - x_n\|.\end{aligned}$$

由于 $\|y_n\| - \|y\| \leqslant \|y - y_n\|$, 故 $\{\|y_n\|\}$ 收敛于 $\|y\|$, 因而 $\{\|y_n\|\}$ 是有界的, 从而得到 $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle\ (n \to \infty)$. 后一结果是显然的. ∎

推论 1.1.5 如 $y \in \mathcal{H}$, 则 $\{x : \langle x, y\rangle = 0\}$ 是闭子空间.

前面我们用内积的语言定义了范数, 反之, 通过计算可以从范数回复到内积, 即有下述定理.

定理 1.1.6 (极化恒等式) $\forall x, y \in \mathcal{H}$,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \|x + \mathrm{i}^k y\|^2,$$

这里 i 是虚数单位.

同样通过计算可以获得下述的平行四边形法则:

定理 1.1.7 (平行四边形法则) $\forall x, y \in \mathcal{H}$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

如 $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ 是一个线性映射, 则称之为 $\mathcal{H}$ 上的一个线性泛函. 以下的任务就是用内积的语言来刻画连续线性泛函. 我们用关于 $\mathcal{H}$ 中凸集的一个结果来开始.

定理 1.1.8 设 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个闭凸子集, (所谓一个集合 $\mathcal{K}$ 是凸的是指, $\forall x, y \in \mathcal{K}$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \mathcal{K}$) 并且 $x \notin \mathcal{K}$, 则存在唯一的向量 $k \in \mathcal{K}$, 使得 $\forall k' \in \mathcal{K}$, $\|x - k\| \leqslant \|x - k'\|$.

证明 令 $d = \inf\{\|x - k\| : k \in \mathcal{K}\}$, 即向量 x 到 $\mathcal{K}$ 的距离, 则存在 $\{k_n\} \subset \mathcal{K}$, 使得 $\lim_{n\to\infty} \|x - k_n\| = d$. 由平行四边形法则,

$$2\left(\|x - k_n\|^2 + \|x - k_m\|^2\right) = 4\left\|x - \frac{k_n + k_m}{2}\right\|^2 + \|k_n - k_m\|^2,$$

即

$$\|k_n - k_m\|^2 = 2\left(\|x-k_n\|^2 + \|x-k_m\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{k_n+k_m}{2}\right\|^2.$$

因为 $\mathcal{K}$ 是凸的, $\frac{k_n+k_m}{2} \in \mathcal{K}$, 从而 $\left\|x - \frac{k_n+k_m}{2}\right\|^2 \geqslant d^2$. 于是

$$0 \leqslant \|k_n - k_m\|^2 \leqslant 2(\|x-k_n\|^2 + \|x-k_m\|^2) - 4d^2.$$

当 $m,n\to\infty$ 时, 上式右边趋于零, 因此 $\{k_n\}$ 是 Cauchy 列. 由于 $\mathcal{K}$ 是闭的, 故存在向量 $k\in\mathcal{K}$, 使得 $\lim_{n\to\infty} k_n = k$. 再由范数之连续性, $\|x-k\|=d$.

为了证明唯一性, 假定 k' 是 $\mathcal{K}$ 中使 $\|x-k'\|=d$ 的另一向量, 则

$$\begin{aligned}0 \leqslant \|k-k'\|^2 &= 2\left(\|x-k\|^2 + \|x-k'\|^2\right) - 4\left\|x-\frac{k+k'}{2}\right\|^2\\ &= 4d^2 - 4\left\|x-\frac{k+k'}{2}\right\|^2\\ &\leqslant 0,\end{aligned}$$

从而只能有 $k=k'$. ∎

对于给定的集合 $\mathcal{S}\subset\mathcal{H}$, 令

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{\perp} &= \{y\in\mathcal{H} : \langle y,x\rangle = 0, \forall x\in\mathcal{S}\}\\ &= \bigcap_{x\in\mathcal{S}} \{y\in\mathcal{H} : \langle y,x\rangle = 0\}.\end{aligned}$$

从推论 1.1.5 知, $\mathcal{S}^{\perp}$ 是闭子空间. 如 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间, 那么 $\mathcal{M}^{\perp}$ 叫作 $\mathcal{M}$ 的正交补.

定理 1.1.9　如 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{H}$ 的闭子空间, f 为 $\mathcal{H}$ 中的任一向量, 则存在唯一的向量 $g\in\mathcal{M}$, $h\in\mathcal{M}^{\perp}$, 使得 $f=g+h$.

证明　设 $g\in\mathcal{M}$ 是依上一定理的意义下最接近于 f 的向量, 并令 $h=f-g$. 下面我们来指出 $h\perp\mathcal{M}$. 任取 $g'\in\mathcal{M}$, $g'\neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\|f-g\|^2 &\leqslant \|f-(g+g')\|^2 = \|(f-g)-g'\|^2\\ &= \|f-g\|^2 + \|g'\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle f-g, g'\rangle.\end{aligned}$$

g' 可以用 $\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}m$ 来代替, 其中 $m=\frac{g'}{\|g'\|}$, $\rho>0$, 并且选取 θ, 使得

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\langle f-g, m\rangle = |\langle f-g, m\rangle|.$$

于是有

$$0 \leqslant \rho^2 - 2\rho|\langle f-g, m\rangle|.$$

两边除以 $\rho > 0$, 并使 ρ 趋于零, 得出 $0 \leqslant -|\langle f-g, m\rangle|$. 这蕴涵了 $\langle f-g, m\rangle = 0$, 这样 $f-g \perp g'$. 由于 g' 是 $\mathcal{M}$ 中的任一向量, 故 $f-g \perp \mathcal{M}$. ∎

现在我们可以称 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}^{\perp}$ 的正交直和, 并记为 $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$. 下面我们利用这一事实来导出关于 Hilbert 空间的连续线性泛函的 Riesz 表示定理.

对于任意固定的一个向量 $g \in \mathcal{H}$, 由等式 $\varphi_g(f) := \langle f, g\rangle, \forall f \in \mathcal{H}$ 定义的泛函显然是线性的. 从 $|\varphi_g(f)| \leqslant \|f\|\|g\|$, 易知 φ_g 是连续的. 下述定理说的则是 $\mathcal{H}$ 上的每个连续线性泛函都具有这个形式.

定理 1.1.10 (Riesz 表示定理) *设 φ 为 $\mathcal{H}$ 上的一个连续线性泛函, 则存在唯一的 $g \in \mathcal{H}$, 使得*

$$\varphi(f) = \langle f, g\rangle, \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

证明 设 $\mathcal{K}$ 为 φ 的核, 即

$$\mathcal{K} = \ker\varphi = \{f \in \mathcal{H} : \varphi(f) = 0\}.$$

因为 φ 是连续的, 故 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间. 如 $\mathcal{K} = \mathcal{H}$, 令 $g = 0$ 即可.

如 $\mathcal{K} \neq \mathcal{H}$, 设 h 为 $\mathcal{K}^{\perp}$ 中一个单位向量. 因 $h \notin \mathcal{K}$, $\varphi(h) \neq 0$. 对于 $f \in \mathcal{H}$, 向量 $f - \dfrac{\varphi(f)}{\varphi(h)} \in \mathcal{K}$, 因而

$$\begin{aligned}
\varphi(f) = \varphi(f)\langle h, h\rangle &= \left\langle \frac{\varphi(f)}{\varphi(h)} h, \overline{\varphi(h)} h \right\rangle \\
&= \left\langle f - \frac{\varphi(f)}{\varphi(h)} h, \overline{\varphi(h)} h \right\rangle + \left\langle \frac{\varphi(f)}{\varphi(h)} h, \overline{\varphi(h)} h \right\rangle \\
&= \langle f, \overline{\varphi(h)} h\rangle.
\end{aligned}$$

于是令 $g = \overline{\varphi(h)} h$ 即可.

至于唯一性, 设 $\langle f, g_1\rangle = \langle f, g_2\rangle, \forall f \in \mathcal{H}$, 特别有 $\langle g_1 - g_2, g_1 - g_2\rangle = 0$, 故 $g_1 = g_2$. ∎

在线性代数中, 一个向量空间由它的代数维数所决定 (依同构之意义). 如果用一个适当的不同维数定义, 这个结论对 Hilbert 空间也是对的. 使用将要定义的这个概念, 所有的 Hilbert 空间均可以特征化. 我们限于考虑所谓的**可分**的 Hilbert 空间, 即该空间含有可数的稠密子集.

$\mathcal{H}$ 中的一个标准正交集 $\{e_\alpha\}$ 叫作 $\mathcal{H}$ 的标准正交基, 如果包含它的最小闭子空间是 $\mathcal{H}$, 即 $\mathcal{H} = \overline{\text{span}\{e_\alpha\}}$.

定理 1.1.11　$\mathcal{H}$ 是可分的充要条件是它有可数标准正交基.

证明　假定 $\mathcal{H}$ 有可数标准正交基 $\{e_n\}_{i=1}^{\infty}$, 并令

$$\mathcal{M}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i : n\geqslant 1, \mathrm{Re}\alpha_i, \mathrm{Im}\alpha_i\in\mathbb{Q}\right\},$$

则不难看出 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{H}$ 的可数稠子集.

反之, 如果 $\mathcal{H}$ 可分, 且 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 的可数稠子集, 用线性代数中的 Schmidt 程序可以从 $\{x_i\}$ 出发构造一个标准正交基 $\{e_i\}$. 则包含 $\{e_i\}$ 的最小闭子空间与包含 $\{x_i\}$ 的最小闭子空间是一致的, 后者是 $\mathcal{H}$, 因而 $\mathcal{H}$ 是包含 $\{e_i\}$ 的最小闭子空间. ■

定理 1.1.12 (Bessel 不等式)　如 $\{e_i\}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的任一标准正交集, $x\in\mathcal{H}$, 则

$$\|x\|^2\geqslant\sum|\langle x,e_i\rangle|^2.$$

证明　如 $\{e_i\}$ 是有限的, 含有 n 个元素, 则

$$x=\left(x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i.$$

易知 $x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$ 正交于每个 e_i, 于是由勾股定理有

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|^2+\left\|\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|^2\\&\geqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2.\end{aligned}$$

如 $\{e_i\}$ 是无限的, 于上式中令 $n\to\infty$, 即得所需结论. ■

定理 1.1.13　设 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个标准正交集, 则下面陈述等价:

(1) $\{e_i\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基;

(2) $\forall i$, $\langle x,e_i\rangle=0$ 必蕴涵 $x=0$;

(3) (Parseval 恒等式)　$\forall x\in\mathcal{H}$,

$$\|x\|^2=\sum_i|\langle x,e_i\rangle|^2.$$

证明　假定 (2) 真, 由 Bessel 不等式, $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2<\infty$. 因而 $\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$ 在 $\mathcal{H}$ 中收敛. 因为 $x-\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$ 与每个 e_i 正交, 故 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$. 简单的计算就导出 Parseval 恒等式. 假定 (3) 成立, 且 $x\perp e_i,\forall i$, 则必有 $x=0$. 以上证明了 (2) 和 (3) 的等价性. 再设 (2) 成立, 如 $\{e_i\}$ 不是标准正交基, 那么必存在 $\mathcal{H}$ 的一个

包含 $\{e_i\}$ 的真子空间 $\mathcal{M}$. 任取非零向量 $x \in \mathcal{M}^{\perp}$, 则对所有的 i, $\langle x, e_i\rangle = 0$, 故应有 $x = 0$, 是为矛盾. 反之设 (1) 成立, 如存在非零向量 x, 使对所有的 i, 有 $\langle x, e_i\rangle = 0$. 设 $\mathcal{M} = \{x\}^{\perp}$, 那么 $\mathcal{M}$ 含有 $\{e_i\}$ 但不是 $\mathcal{H}$, 也导致矛盾. ∎

推论 1.1.14 $\mathcal{H}$ 的两个标准正交基有相同的基数.

证明 设 $\{e_i\}$ 和 $\{f_i\}$ 是标准正交基. 如它们同时是无穷集, 那么由于 $\mathcal{H}$ 是可分的, 它们同为可数集.

如 $\{e_i\}$ 是具有 n 个元素的有限集, 则由 Parseval 恒等式,

$$\begin{aligned} n = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 &= \sum_{i}\sum_{j} |\langle e_i, f_j\rangle|^2 \\ &= \sum_{i}\sum_{j} |\langle f_j, e_i\rangle|^2 = \sum_{j} \|f_j\|^2. \end{aligned}$$

由于对所有的 j, $\|f_j\| = 1$, 故 $\{f_i\}$ 有 n 个元素. ∎

$\mathcal{H}$ 的维数就是它的任意标准正交基的基数. 由上述推论可见这个维数的定义是妥帖的. 我们称两个 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是同构的, 如果存在从 $\mathcal{H}_1$ 到 $\mathcal{H}_2$ 的一个保范的连续线性变换 Φ (即 $\|\Phi g\| = \|g\|, \forall g \in \mathcal{H}_1$).

定理 1.1.15 两个 Hilbert 空间同构的充要条件是它们有相同的维数.

证明 设 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 有相同的维数, $\{e_i\}$ 和 $\{f_i\}$ 分别是它们的基, 下标 i 的集合是相同的. 定义 $\Phi : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, 使得对于 $g \in \mathcal{H}_1$, $\Phi(g) = \sum_i \langle g, e_i\rangle f_i$. 依据 Parseval 恒等式, $\sum_i |\langle g, e_i\rangle|^2 = \|g\|^2$. 从而 $\Phi(g)$ 定义妥帖且

$$\|\Phi(g)\|^2 = \sum_{i} |\langle g, e_i\rangle|^2 = \|g\|^2.$$

显然 Φ 是线性连续的. 余下的需要证明 Φ 为满射. 由于 $\Phi(e_i) = f_i$, 故 Φ 的值域含有 $\{f_i\}$, 易证 Φ 的值域是闭的 (读者可以从 Φ 的保范性以及空间的完备性出发证明此事), 从而 Φ 是满的. 由于

$$\langle g, g\rangle = \|g\|^2 = \|\Phi(g)\|^2 = \langle \Phi(g), \Phi(g)\rangle, \quad \forall g \in \mathcal{H}_1,$$

再从极化恒等式就可以得知 $\langle \Phi(g), \Phi(h)\rangle = \langle g, h\rangle$, $\forall g, h \in \mathcal{H}_1$. 条件的必要性证明留给读者完成. ∎

例 1.1.16 以下给出一些 Hilbert 空间的例子. 从以上的讨论可以看出, 对于给定的维数, 它们所对应的 Hilbert 空间是唯一的, 仅仅可能有标准正交基的变换而已.

(a) 设 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n = \{x : x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \xi_i \in \mathbb{C}\}$. 在 $\mathbb{C}^n$ 中用下式定义内积:

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i,$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{C}^n$. 内积的性质是易于验证的, 而与之关联的范数是通常的 Euclid 范数 $\|x\|_2=(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}$. 至于完备性, 设 $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的 Cauchy 列. 因为 $|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(m)}|\leqslant\|x_k-x_m\|$, 故对于 $1\leqslant i\leqslant n$, $\{\xi_i^{(k)}\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的 Cauchy 列. 设 $\xi_i=\lim_{k\to\infty}\xi_i^{(k)}$, 并记 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 则 $x\in\mathbb{C}^n$, 且 $\lim_{k\to\infty}x_k=x$, 这样 $\mathbb{C}^n$ 是一个 Hilbert 空间. 如 $e_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)$, 易知 $\{e_k\}_{k=1}^n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个标准正交基, 并且在同构意义下, $\mathbb{C}^n$ 是唯一的 n 维复 Hilbert 空间.

(b) 设 l_+^2 是定义于 $\mathbb{Z}^+$ 上的复函数 φ, 并使得 $\sum_{n=0}^\infty|\varphi(n)|^2<\infty$ 的全体, 则 l_+^2 是一个复线性空间, 这是因为

$$|(\varphi+\psi)(n)|^2\leqslant2|\varphi(n)|^2+2|\psi(n)|^2.$$

定义 $\langle\varphi,\psi\rangle=\sum_{n=0}^\infty\varphi(n)\overline{\psi(n)}$. 我们首先证明, 在级数收敛的意义下, 这个定义是有意义的. 对于 $N\in\mathbb{Z}^+$,

$$\Phi_N=(|\varphi(0)|,|\varphi(1)|,\cdots,|\varphi(N)|)$$

与

$$\Psi_N=(|\psi(0)|,|\psi(1)|,\cdots,|\psi(N)|)$$

均在 $\mathbb{C}^{N+1}$ 中, 应用 Schwarz 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N|\varphi(n)\overline{\psi(n)}|&=|\langle\Phi_N,\Psi_N\rangle|\leqslant\|\Phi_N\|\|\Psi_N\|\\&=\left(\sum_{n=0}^N|\varphi(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^N|\psi(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\|\varphi\|\|\psi\|.\end{aligned}$$

这样级数 $\sum_{n=0}^\infty\varphi(n)\overline{\psi(n)}$ 绝对收敛, 并且不难验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是内积.

现来验证 l_+^2 是完备的. 设 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty\subset l_+^2$ 是 Cauchy 列, 则 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$,

$$|\varphi_k(n)-\varphi_j(n)|\leqslant\|\varphi_k-\varphi_j\|,$$

因而对于每个 n, $\{\varphi_k(n)\}_{k=1}^\infty$ 是 $\mathbb{C}$ 中的 Cauchy 列, 定义 $\mathbb{Z}^+$ 上的函数如下:

$$\varphi(n)=\lim_{k\to\infty}\varphi_k(n).$$

现来证明 $\varphi\in l_+^2$ 并有 $\lim_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi$. 因为 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ 是 Cauchy 列, 故存在正整数

K, 使得 $\forall k > K$, $\|\varphi_k - \varphi_K\| \leqslant 1$. 这样, 对于任意的 $N \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{N}|\varphi(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant \left(\sum_{n=0}^{N}|\varphi(n)-\varphi_K(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{N}|\varphi_K(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}|\varphi_k(n)-\varphi_K(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_K(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \limsup_{k\to\infty}\|\varphi_k-\varphi_K\|_2 + \|\varphi_K\|_2\\ &\leqslant 1 + \|\varphi_K\|_2,\end{aligned}$$

于是 $\varphi \in l_+^2$. 又给定 $\varepsilon > 0$, 选取 M, 使得对于 $k, j \geqslant M$ 以及任意的 N, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}|\varphi(n)-\varphi_k(n)|^2 &= \lim_{j\to\infty}\sum_{n=0}^{N}|\varphi_j(n)-\varphi_k(n)|^2\\ &\leqslant \limsup_{j\to\infty}\|\varphi_j-\varphi_k\|^2\\ &\leqslant \varepsilon^2.\end{aligned}$$

由于 N 是任意的, $\|\varphi - \varphi_K\| \leqslant \varepsilon$, 故 l_+^2 为 Hilbert 空间.

(c) $L^2[0,2\pi]$ 表示 $[0,2\pi]$ 上 Lebesgue 平方可积复函数的全体所形成的线性空间, 并在其上定义内积为: $\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$. 仿前例可证明 $L^2[0,2\pi]$ 是 Hilbert 空间, 并且 $\{z^k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} : k = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 构成它的一个标准正交基. 利用这个标准正交基, 读者不难看出 $L^2[0,2\pi]$ 同构于 l^2, 其中

$$l^2 := \left\{(\cdots, a_{-k}, \cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots) \mid a_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2 < \infty\right\}.$$

由此可进一步看到 $L^2[0,2\pi]$ 同构于单位圆 $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ 上由 $\{z^k : k = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ 生成的 Hilbert 空间. 这样一来, 每个 $f(z) \in L^2(\partial\mathbb{D})$ 可以唯一地表示成 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, 并且 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$.

对于给定的任意两个同一数域上的线性空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$, 我们可以定义一个新的线性空间 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$, 其元素是 Cartesian 积 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ 中的元素, 其代数运算是坐标式的, 即如 $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ 的元素定义为 $\{x \oplus y : x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}$, 则 $(x_1 \oplus y_1) + (x_2 \oplus y_2) = (x_1 + x_2) \oplus (y_1 + y_2)$, $\alpha(x \oplus y) = (\alpha x) \oplus (\alpha y)$.

如果 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是两个 Hilbert 空间, 在 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K} = \{h \oplus k : h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}\}$ 上定义内积

$$\langle h_1 + k_1, h_2 + k_2\rangle := \langle h_1, h_2\rangle + \langle k_1, k_2\rangle,$$

不难证明上述公式定义了 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ 上的内积, 并且依此内积 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ 仍为 Hilbert 空间. 它叫作 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{K}$ 之直和.

如果有一个由 Hilbert 空间构成的序列 $\{\mathcal{H}_i\}$, 如何定义 $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\cdots$, 并且这个直和是否仍然完备, 是值得注意的问题. 我们先来陈述并证明一个命题.

命题 1.1.17　如 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\cdots$, 均为 Hilbert 空间,

$$\mathcal{H}:=\left\{(h_n)_{n=1}^{\infty}:h_n\in\mathcal{H}_n,\forall n,\text{且}\sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|^2<\infty\right\}.$$

对于 $h=(h_n)\in\mathcal{H}$ 及 $g=(g_n)\in\mathcal{H}$, 定义

$$\langle h,g\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle h_n,g_n\rangle,$$

则 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathcal{H}$ 上的内积, 关于此内积的范数为 $\|h\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 且装备此内积的 $\mathcal{H}$ 是一个 Hilbert 空间.

证明　如 $h=(h_n)$, $g=(g_n)\in\mathcal{H}$, 则由 Schwarz 不等式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle h_n,g_n\rangle|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|\|g_n\|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\langle h_n,g_n\rangle$ 绝对收敛. 其余的证明留给读者完成. ∎

如 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2,\cdots$ 是给定的 Hilbert 空间列, 则命题 1.1.17 中的空间 $\mathcal{H}$ 叫作 $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2,\cdots$ 的直和, 记为 $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\cdots$ 或 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$.

1.2　基本的算子理论

设 $\mathcal{H}$ 是可分的复 Hilbert 空间, T 是 $\mathcal{H}$ 上的一个线性变换, T 称为有界的, 如果存在常数 $M>0$, 使得对所有的 $f\in\mathcal{H}$, 均有 $\|Tf\|\leqslant M\|f\|$.

有界性和连续性的关系如下述定理所说.

定理 1.2.1　下面陈述等价:

(1) T 有界;

(2) T 是连续的;

(3) T 在 0 处连续.

证明　(1)⇒(2): 如序列 $\{f_i\}\subset\mathcal{H}$ 收敛于 f, 则 $\lim_{i\to\infty}\|f_i-f\|=0$. 这样

$$\lim_{i\to\infty}\|Tf_i-Tf\|=\lim_{i\to\infty}\|T(f_i-f)\|\leqslant\lim_{i\to\infty}M\|f_i-f\|=0,$$

故 T 是连续的.

(2)⇒(3): 是显然的.

(3)⇒(1): 因 T 在 0 处连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得 $\|f\| < \delta$ 蕴涵 $\|Tf\| < 1$. 于是对于 $\mathcal{H}$ 中的 $g \neq 0$, 我们有

$$\|Tg\| = \frac{2\|g\|}{\delta}\left\|T\left(\frac{\delta}{2\|g\|}g\right)\right\| \leqslant \frac{2}{\delta}\|g\|.$$

显然当 $g = 0$ 时上式亦成立, 因此 T 是有界的. ∎

$\mathcal{H}$ 上的有界线性变换又叫作有界算子. 其全体记为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. 这样, 对于每个线性变换 T, 我们可以定义其范数 $\|T\| := \sup_{\|f\|\neq 0} \|Tf\|/\|f\|$. 显然 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 必须且只需 $\|T\|$ 是有限的. 我们记 $\mathcal{R}(T) = T(\mathcal{H}) = \{Tx : x \in \mathcal{H}\}$ 为 T 的值域, $\ker(T) = \{x : Tx = 0\}$ 为 T 的核 (零空间).

命题 1.2.2 如 T 为 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子, 则存在 $\mathcal{H}$ 上唯一的有界线性算子 S, 使得 $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Sg\rangle, \forall f, g \in \mathcal{H}$.

证明 固定非零向量 $g \in \mathcal{H}$, 考虑由等式 $\varphi(f) = \langle Tf, g\rangle$ 所定义的泛函 φ. 不难证明 φ 是非零有界线性的, 于是由 Riesz 表示定理 (定理 1.1.10), 存在唯一的非零向量 $h \in \mathcal{H}$, 使得 $\varphi(f) = \langle f, h\rangle, \forall f \in \mathcal{H}$. 定义 $Sg = h$, 则 S 是线性的, 并且 $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Sg\rangle, \forall f, g \in \mathcal{H}$. 取 $f = Sg$, 可以得到

$$\|Sg\|^2 = \langle Sg, Sg\rangle = \langle TSg, g\rangle \leqslant \|T\|\|Sg\|\|g\|, \qquad \forall g \in \mathcal{H}.$$

由于 $Sg = h$, 故 $\|Sg\| \leqslant \|T\|\|g\|$. 此式在 $g = 0$ 时亦成立, 因而 S 是有界线性算子.

S 是唯一的, 因为如还有 S_0 满足 $\langle Tf, g\rangle = \langle f, S_0 g\rangle, \forall f, g \in \mathcal{H}$, 则 $\langle f, (S - S_0)g\rangle = 0, \forall f \in \mathcal{H}$, 这必导出 $Sg = S_0 g = 0, \forall g \in \mathcal{H}$. ∎

上述定理中由有界线性算子 T 派生出的唯一的有界算子 S 叫作 T 的伴随, 常记为 T^*. 这样 $\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle, \forall f, g \in \mathcal{H}$. 下述命题提供了 T 的伴随 T^* 的一些性质. 在此我们说 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{H}$ 上可逆, 是指存在 $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 使得 $STg = TSg = g$, $\forall g \in \mathcal{H}$. S 叫作 T 的逆, 记为 T^{-1}. 以下 I 表示恒等算子: $Ig = g, \forall g \in \mathcal{H}$.

命题 1.2.3 如 $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 则:

(1) $T^{**} = (T^*)^* = T$;

(2) $\|T\| = \|T^*\|$;

(3) $(\alpha S + \beta T)^* = \bar{\alpha}S^* + \bar{\beta}T^*$, 且 $(ST)^* = T^*S^*, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(4) $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ 对任何可逆算子 T;

(5) $\|T\|^2 = \|T^*T\|$;

(6) $\ker T^* = \mathcal{R}(T)^{\perp}$.

证明 (1) 如 $f, g \in \mathcal{H}$, 则

$$\langle f, T^{**}g\rangle = \langle T^*f, g\rangle = \overline{\langle g, T^*f\rangle} = \overline{\langle Tg, f\rangle} = \langle f, Tg\rangle.$$