



读考研书 找人大社

2008年考研 数学 经典讲义(理工类)

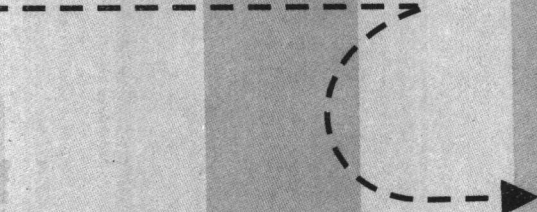
主编 黄先开 曹显兵 简怀玉

● 一线名师授课底本 ● 经典讲解全新奉上

全面解析大纲考试内容与考试要求，清晰明确，一目了然
总结重要公式与结论，帮助考生常记不忘
归纳典型题型讲解内容，例题分析、详解、评注环环相扣
每讲配精编习题，有针对性地演练、温习



中国人民大学出版社



2008 年考研数学 经典讲义(理工类)

► 主 编 黄先开 曹显兵 简怀玉

正版
查询及
服务
程序



← 刮 开 涂 层



← 获取 20 位数字编码



← 上 www.1kao.net 注册



← 登录增值服务进免费课堂

2008

图书在版编目(CIP)数据

2008 年考研数学经典讲义(理工类)/黄先开等主编. 2 版

北京:中国人民大学出版社,2007

ISBN 978-7-300-07506-8

I. 2...

II. 黄...

III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料

IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 016898 号

2008 年考研数学经典讲义(理工类)

主 编 黄先开 曹显兵 简怀玉

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号 邮政编码 100080

电 话 010-62511242(总编室) 010-62511398(质管部)

010-82501766(邮购部) 010-62514148(门市部)

010-62515195(发行公司) 010-62515275(盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.net> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京鑫霸印务有限公司

规 格 210mm×285mm 16 开本 版 次 2006 年 7 月第 1 版

2007 年 2 月第 2 版

印 张 41.25 印 次 2007 年 2 月第 1 次印刷

字 数 1 290 000 定 价 49.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前言

本书是作者根据最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编著的一本系统复习考研数学的参考书。它是以作者多年考研辅导讲稿为基础，结合作者对历年考题的研究、命题趋势以及数学的内在规律倾心编写而成的，目的是帮助广大考生在较短时间内系统复习好考研数学内容，取得优异成绩，并为今后研究生学习阶段打下坚实的数学基础，让数学伴随同学们走向人生的辉煌。

本书编写特点如下：

一、考试内容提要——对照最直接

明确考试内容与要求，才能有的放矢。本书在每章的第一节对最新考研大纲要求的基本概念、基本原理和基本方法都做了详尽的讲解，并指出注意事项。作者认为这对于考前进行全面、系统的复习是非常必要的。

二、重要公式与结论（补充注释与重要结论）——总结最完善

针对每一章中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论，特别是对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结。目的在于希望考生通过系统复习后，一见到此类问题，就能立刻联想到考题实际期望考查的是哪一方面的知识点，从而使考生站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题，达到认识和理解的新境界。考生是否具备了这种能力，对考研能否取得成功和获得高分是至关重要的。

三、典型题型与例题分析——题型最丰富

对数学课程来说，题目是无穷的，但题型是有限的。作者通过精心编制和设计许多新题型，使得本书几乎囊括了考研数学所涉及的所有题型，并逐一进行分析，给出了解题方法和规律。另外，借助于许多重要经典例题的评注，本书能够帮助同学们更好地把握典型例题的典型处理方法和各种可能的延伸，从而使同学们能够举一反三、触类旁通。

四、习题精选与答案——选题最典型

对于真正掌握一门课程内容并通过相关考试来说，做一定数量的习题是必不可少的。为此，作者按照填空题、选择题和计算证明题的顺序对应各种题型选编了相当数量的习题，供读者模拟练习之用，希望读者尽可能独立地完成习题。

五、本书带“*”的内容，数学二考生不作要求

在成书过程中，作者参考了众多著作和教材，由于篇幅所限不能一一列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于作者水平所限，书中一定还存在许多不足之处，敬请广大读者、同行专家批评指正。

作者

2007年2月于北京

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限与连续 3

§1 考试内容提要	3
§2 重要公式与结论	15
§3 典型题型与例题分析	17
题型一 函数的概念	17
题型二 函数、反函数及其性质	18
题型三 求函数极限	20
题型四 求数列极限	27
题型五 求解含参变量的极限	33
题型六 已知极限,求待定参数、函数值、 导数及函数	34
题型七 无穷小比较	36
题型八 判断函数的连续性与间断点的 类型	37
题型九 综合题	39
习题精选一	41
习题精选一答案	44

第二章 导数与微分 45

§1 考试内容提要	45
§2 重要公式与结论	52
§3 典型题型与例题分析	53
题型一 利用导数定义解题	53
题型二 导数在几何上的应用	58
题型三 变限积分求导	60
题型四 利用导数公式与运算法则 求导	64
题型五 综合题	68
习题精选二	69
习题精选二答案	72

第三章 微分中值定理与导数的应用 74

§1 考试内容提要	74
-----------------	----

§2 典型题型与例题分析 81

题型一 证明存在 ξ ,使 $f(\xi) = 0$	81
题型二 证明存在 ξ ,使 $f^{(n)}(\xi) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)	84
题型三 证明存在 ξ ,使 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi), \dots) = 0$	87
题型四 直接用拉格朗日中值定理或 柯西中值定理证明	90
题型五 双介值问题,要证存在 ξ, η 使 $G(f'(\xi), f'(\eta), \dots) = 0$	91
题型六 证明存在 ξ ,使得 $f^{(n)}(\xi) = k(k \neq 0)$	93
题型七 有关介值的不等式证明	94
题型八 隐含介值问题	94
题型九 不等式的证明	97
题型十 中值定理的综合应用	107
题型十一 利用导数证明函数恒 等式	109
题型十二 利用导数判别函数的 单调性	109
题型十三 利用导数研究函数的极值与 最值	110
题型十四 函数作图	111
题型十五 求曲率与曲率半径	113
习题精选三	113
习题精选三答案或提示	115

第四章 一元函数积分学 117

§1 考试内容提要	117
§2 重要公式与结论	135
§3 典型题型与例题分析	136
题型一 计算不定积分	136
题型二 不定积分综合题	140
题型三 有关定积分的概念与性质的	

问题	144
题型四 利用基本方法(牛顿-莱布尼茨 公式,换元积分法,分部积分法) 计算定积分	146
题型五 对称区间上的积分	150
题型六 涉及变限积分的问题	151
题型七 定积分循环计算法	155
题型八 几类特殊问题	155
题型九 广义积分的计算	159
题型十 定积分等式的证明	162
题型十一 定积分不等式的证明	164
题型十二 定积分综合题	167
题型十三 定积分的综合应用	168
习题精选四	176
习题精选四答案或提示	180
* 第五章 向量代数与空间解析 几何	183
§1 考试内容提要	183
§2 典型题型与例题分析	187
题型一 与向量代数有关的计算 问题	187
题型二 求平面与直线方程	187
题型三 讨论平面与直线的位置 关系	189
题型四 求对称点、投影点及投影 曲线	191
题型五 综合题	192
习题精选五	192
习题精选五答案	192
第六章 多元函数微分学	193
§1 考试内容提要	193
§2 典型题型与例题分析	200
题型一 基本概念题	200
题型二 求复合函数的偏导数或 全微分	203
题型三 求隐函数的偏导数或 全微分	205
题型四 已知偏导数,反求函数 关系	208
题型五 多元函数的极值	210
* 题型六 求多元函数的梯度或 方向导数	215

* 题型七 多元函数微分学的几何 应用	215
习题精选六	217
习题精选六答案	218

第七章 多元函数积分学

§1 考试内容提要	220
§2 重要公式与结论	226
§3 典型题型与例题分析	227
题型一 二重积分的基本计算方法	227
题型二 利用重积分的对称性简化 计算	229
题型三 交换积分次序	231
题型四 几类特殊重积分的计算	232
* 题型五 直角坐标系下计算三重 积分	235
* 题型六 利用“先二后一”法(适用于 旋转体)	235
* 题型七 利用柱面坐标(适用于含柱体 的情形)	235
* 题型八 利用球面坐标(适用于含球面 的情形)	236
* 题型九 综合题	236
习题精选七	239
习题精选七答案或提示	241

* 第八章 曲线、曲面积分

§1 考试内容提要	242
§2 重要公式与结论	248
§3 典型题型与例题分析	249
题型一 对弧长的曲线积分的计算 方法	249
题型二 对坐标轴的曲线积分的 计算方法	251
题型三 对面积的曲面积分的计算 方法	255
题型四 对坐标的曲面积分的计算 方法	256
题型五 综合题	260
题型六 求向量场的散度或旋度	262
习题精选八	262
习题精选八答案	265

* 第九章 无穷级数

§1 考试内容提要	267
-----------------	-----

§ 2 重要公式与结论	274
§ 3 典型题型与例题分析	275
题型一 判定常数项级数的收敛性	275
题型二 求函数项级数的收敛域、幂级数的收敛半径和收敛区间	278
题型三 求常数项级数的和及函数项级数的和函数	281
题型四 幂级数的展开	282
题型五 傅里叶级数的展开	283
题型六 综合题	285
习题精选九	286
习题精选九答案	288
第十章 常微分方程	289
§ 1 考试内容提要	289

§ 2 基本方法	297
§ 3 典型题型与例题分析	298
题型一 可化为一阶线性方程的求解	298
题型二 可化为变量分离方程的求解	300
题型三 可降阶的高阶方程	302
题型四 高阶线性方程和可化为二阶常系数线性方程的求解	303
题型五 综合题与应用题	304
习题精选十	309
习题精选十答案	310

第二部分 线性代数

第一章 行列式	315
§ 1 考试内容提要	315
§ 2 难点、疑点解析及重要公式与结论	318
§ 3 典型题型与例题分析	320
题型一 利用行列式的性质与行(列)展开定理计算行列式	320
题型二 按行(列)展开公式求代数余子式	322
题型三 利用多项式分解因式计算行列式	323
题型四 抽象行列式的计算或证明	323
题型五 n 阶行列式的计算	325
题型六 利用特征值计算行列式	328
题型七 综合题	329
习题精选一	330
习题精选一答案	331
第二章 矩阵	335
§ 1 考试内容提要	335
§ 2 难点、疑点解析及重要公式与结论	342
§ 3 典型题型与例题分析	345
题型一 求数值型矩阵的逆矩阵	345
题型二 A 为抽象矩阵, 讨论 A 的	

可逆性	347
题型三 考查矩阵运算的特殊性	349
题型四 解矩阵方程	351
题型五 利用伴随矩阵 A^* 进行计算或证明	353
题型六 有关初等矩阵的问题	355
题型七 求矩阵的秩	356
习题精选二	358
习题精选二答案	360
第三章 向量	364
§ 1 考试内容提要	364
§ 2 难点、疑点解析及重要公式与结论	373
§ 3 典型题型与例题分析	375
题型一 判定向量组的线性相关性	375
题型二 把一个向量用一组向量线性表示	380
题型三 求向量组的秩	385
题型四 有关矩阵秩的命题	387
* 题型五 有关向量空间的基本概念题	388
题型六 综合题	389
习题精选三	391
习题精选三答案	393

第四章 线性方程组 395

§1 考试内容提要 395

§2 难点、疑点解析及重要公式与
结论 399

§3 典型题型与例题分析 401

题型一 基本概念题(解的判定、性质、
结构) 401题型二 含有参数的线性方程组的
求解 403

题型三 抽象线性方程组求解 410

题型四 讨论两个方程组的公共解 412

题型五 讨论两个方程组解之间的
关系 414题型六 已知方程组的解,反求系数矩阵
或系数矩阵中的参数 416

题型七 有关基础解系的讨论 417

题型八 有关 $AB = 0$ 的应用 420

题型九 综合题 421

习题精选四 426

习题精选四答案 428

第五章 特征值与特征向量 431

§1 考试内容提要 431

§2 难点、疑点解析及重要公式与
结论 436

§3 典型题型与例题分析 438

题型一 数值型矩阵特征值、特征

向量的计算 438

题型二 计算抽象矩阵的特征值 440

题型三 特征值、特征向量的
逆问题 443

题型四 矩形相似与对角化的讨论 446

题型五 有关实对称矩阵的命题 451

题型六 特征值、特征向量与相似
矩阵的应用问题 453题型七 有关特征值、特征向量的
证明问题 457

题型八 综合题 459

习题精选五 462

习题精选五答案 464

第六章 二次型 466

§1 考试内容提要 466

§2 难点、疑点解析及重要公式与
结论 471

§3 典型题型与例题分析 472

题型一 基本概念题(二次型的矩阵、
秩、正负惯性指数) 472

题型二 化二次型为标准形 473

题型三 有关正定二次型(正定矩阵)
命题的证明 478

题型四 综合题 482

习题精选六 484

习题精选六答案 485

*** 第三部分 概率论与数理统计****第一章 随机事件与概率** 489

§1 考试内容提要 489

§2 补充注释与重要结论 493

§3 典型题型与例题分析 496

题型一 事件的表示和运算 496

题型二 有关概率基本性质的命题 497

题型三 古典概型与几何概型的概率
计算 499

题型四 事件独立性的命题 502

题型五 条件概率与积事件概率的
计算 504

题型六 全概率公式和贝叶斯公式

概型 508

题型七 伯努利试验 510

题型八 综合题 511

习题精选一 514

习题精选一答案 516

第二章 随机变量及其分布 518

§1 考试内容提要 518

§2 补充注释与重要结论 521

§3 典型题型与例题分析 523

题型一 有关随机变量与分布的基本
概念题 523

题型二 求随机变量的分布律与

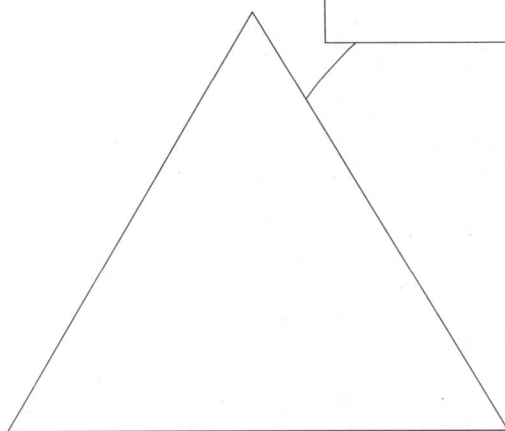
分布函数	526	§ 2 典型题型与例题分析	601
题型三 已知事件发生的概率,反求 事件中的未知参数	532	题型一 有关切比雪夫不等式的 命题	601
题型四 利用常见分布求相关事件的 概率	533	题型二 有关大数定律的命题	602
题型五 求随机变量函数的分布	535	题型三 有关中心极限定理的命题	604
题型六 综合题	539	题型四 综合题	607
习题精选二	541	习题精选五	608
习题精选二答案	544	习题精选五答案	609
第三章 多维随机变量及其分布	546	第六章 数理统计的基本概念	610
§ 1 考试内容提要	546	§ 1 考试内容提要	610
§ 2 补充注释与重要结论	551	§ 2 补充注释与重要结论	615
§ 3 典型题型与例题分析	552	§ 3 典型题型与例题分析	616
题型一 联合分布、边缘分布与条件 分布的计算	552	题型一 求样本容量 n , 或与样本均值 $\bar{X}$ 和 样本方差 S^2 有关的概率	616
题型二 已知部分分布律或边缘分布, 求联合分布律或相关参数	558	题型二 求统计量的数字特征	617
题型三 利用已知分布求相关事件的 概率	559	题型三 求统计量的分布	619
题型四 随机变量函数的分布	561	习题精选六	620
题型五 随机变量的独立性的讨论	567	习题精选六答案	622
题型六 综合题	568	第七章 参数估计	623
习题精选三	568	§ 1 考试内容提要	623
习题精选三答案	571	§ 2 补充注释与重要结论	626
第四章 随机变量的数字特征	573	§ 3 典型题型与例题分析	626
§ 1 考试内容提要	573	题型一 求矩法估计和最大似然 估计	626
§ 2 补充注释与重要结论	576	题型二 估计量评选标准的讨论	632
§ 3 典型题型与例题分析	577	题型三 参数的区间估计	636
题型一 期望和方差的计算	577	题型四 综合题	637
题型二 随机变量函数的数学期望与 方差	580	习题精选七	638
题型三 有关协方差、相关系数、独立性 与相关性的命题	587	习题精选七答案	640
题型四 有关数字特征的应用题	591	第八章 假设检验	641
题型五 综合题	594	§ 1 考试内容提要	641
习题精选四	596	§ 2 补充注释与重要结论	642
习题精选四答案	597	§ 3 典型题型与例题分析	643
第五章 大数定律和中心极限定理	599	题型一 正态总体未知参数的 假设检验	643
§ 1 考试内容提要	599	题型二 有关两类错误的命题	644
		习题精选八	645
		习题精选八答案	646

第一部分 **PART ONE**

高等数学

PART

ONE



第一章 函数、极限与连续

§ 1 考试内容提要

一 函数

1. 函数的概念及表示法

设 x 和 y 是两个变量(均在实数 $\mathbf{R}$ 内取值), D 是一个给定的非空数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 按照一定的法则, 变量 y 总有一个确定的值和它对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, 其中 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量, 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域. 表示法有: 公式法、表格法、图形法等.

要注意函数定义中的两个要素:

- (1) 定义域 D : 它表示 x 的取值范围.
- (2) 对应法则 f : 它表示给定 x 值, 求 y 值的方法.

因此: ① 对于两个给定的函数, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时, 才能说它们是相同的函数, 否则它们就是不同的函数. ② 求函数 f 的定义域, 就是求使 y 的取值和运算有意义的自变量 x 的取值范围.

【例 1.1】 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$.

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x - 1}$.

【详解】 (1) 不相同. 因为两个函数的定义域不同, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(2) 相同. 因为两个函数的定义域相同, 都为全体实数, 而且对应法则相同.

【例 1.2】 已知 $f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 试求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

【详解】 由于 $1 - x^2 = f[\varphi(x)] = \sin \varphi(x)$, 故 $\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$. 于是 $-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$, 即 $0 \leq x^2 \leq 2$. 所以函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

2. 函数的性态 —— 有界性, 单调性, 周期性, 奇偶性

(I) 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在正数 M , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在 I 上无界. 如果存在正数 M_1 , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $f(x) \leq M_1$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有上界; 如果存在正数 M_2 , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $f(x) \geq M_2$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有下界. 易知函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界.

(1) 几个常见的有界函数.

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 有

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, |\arctan x| < \frac{\pi}{2}, |\operatorname{arccot} x| < \pi (\text{或 } 0 < \operatorname{arccot} x < \pi).$$

在区间 $[-1, 1]$ 上, 有 $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \leq \pi (\text{或 } 0 \leq \arccos x \leq \pi).$

注: ① 函数 $y = f(x)$ 有界或无界是相对于某个区间而言的, 例如 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界, 但在区间 $[\frac{1}{8}, 1]$ 上是有界的.

② 区分无界函数和无穷大: 在某一变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷大, 则存在对应的区间使 $f(x)$ 无界; 但是若 $f(x)$ 在某个区间上无界, 则 $f(x)$ 不一定为无穷大. 例如 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界, 但它的函数值在 $x \rightarrow 0^+$ 时并不是无穷大.

③ 若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界, 则 $f(x)$ 的导函数和原函数在区间 I 上不一定有界. 例如 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 但其导函数 $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1]$ 上是无界的; $y = 1 + \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 但其原函数 $F(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是无界的.

(2) 判别方法:

方法一 直接法: 定义本身就是判定 $f(x)$ 是否有界的一种有效方法, 即对 $f(x)$, 若存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M$, 则 $f(x)$ 有界, 否则无界.

方法二 间接法: ① 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界. ② 若 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 有界.

【例 1.3】 $x \rightarrow 0$ 时, $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 是

- (A) 无穷大. (B) 无穷小. (C) 非无穷大且在 $(0, 1]$ 上无界. (D) 在 $(0, 1]$ 上有界.

【 】

【详解】 取 $x = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 有 $y = 2n\pi \sin 2n\pi = 0$.

取 $x = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 时, 有 $y = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$.

故函数是无界且非无穷大量, 即选(C).

【例 1.4】 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在以下哪个区间有界?

- (A) $(-1, 0)$. (B) $(0, 1)$. (C) $(1, 2)$. (D) $(2, 3)$.

【 】

【详解】 本题要讨论的是开区间的有界性. 易知 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, 在 $(-1, 0)$ 连续, 且在 $x = -1$ 的右极限、 $x = 0$ 的左极限为

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \frac{-\sin 3}{2 \cdot 9} = -\frac{\sin 3}{18},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 2}{4}.$$

故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 有界, 选(A).

另外, 也可由

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty,$$

排除(B), (C), 以及由

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty,$$

排除(D),从而选(A).

(II) 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或单调减小)的.

判别方法:

方法一 利用定义: 设 $x_1 > x_2$, 计算 $f(x_1) - f(x_2)$, 若它大于零, 则单调增加; 若它小于零, 则单调减小.

方法二 利用导数: 对可导函数 $y = f(x)$, 若 $y' > 0$, 则 y 单调增加; 若 $y' < 0$, 则 y 单调减小.

注: 单调函数的导函数和原函数都不一定仍为单调函数. 例如 $y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加, 而其导函数 $y' = 1$ 与原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内都不单调.

(III) 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的常数 T , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$ 且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

判别方法:

方法一 利用定义: 计算 $f(x+T) = \dots = f(x)$, 则 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数.

方法二 间接法: 利用常见周期函数的周期进行判别和计算. 例如, 由 $\sin x, \cos x$ 的周期为 2π , 推知 $|\sin x|, |\cos x|, \sin 2x, \cos 2x$ 的周期为 π ; 由 $\tan x, \cot x$ 的周期为 π , 推知 $|\tan x|, |\cot x|$ 的周期为 $\pi, \tan \frac{x}{2}, \cot \frac{x}{2}$ 的周期为 2π .

注: 若 $f(x)$ 是可导的周期函数, 则它的导函数仍是周期函数, 且周期不变, 但它的原函数不一定仍为周期函数. 例如 $f(x) = 1 + \sin x$ 是周期为 2π 的函数, 其导函数 $f'(x) = \cos x$ 仍是周期为 2π 的函数, 但其原函数 $F(x) = x - \cos x$ 不是周期函数.

(IV) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$ [或 $-f(x)$], 则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数). 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于坐标原点对称.

判别方法:

方法一 利用定义: 通过计算 $f(-x) = \dots = f(x)$ (或 $-f(x)$), 则 $f(x)$ 是偶(奇)函数.

方法二 利用运算性质:

奇函数 $\pm$ 奇函数 = 奇函数 偶函数 $\pm$ 偶函数 = 偶函数

奇函数 $\times$ 偶函数 = 奇函数 偶函数 $\times$ 偶函数 = 偶函数 奇函数 $\times$ 奇函数 = 偶函数

方法三 利用导函数与原函数奇偶性:

可导的奇函数的导函数是偶函数, 例如 $(x^3)' = 3x^2$.

可导的偶函数的导函数是奇函数, 例如 $(x^2)' = 2x$.

连续的奇函数的任何一个原函数都是偶函数, 例如 $f(x) = \sin x, F(x) = -\cos x + C$.

连续的偶函数的原函数中只有一个是奇函数, 例如 $f(x) = \cos x$, 其全体原函数 $F(x) = \int \cos x dx = \sin x + C$ 中只有 $\sin x (C = 0)$ 是奇函数.

注: ① 若函数的定义域关于原点不对称, 则此函数既不是奇函数, 也不是偶函数.

② 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 则 $f(x)$ 一定可以表示成奇函数与偶函数的和. 事实上,

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

式中前者为奇函数,后者为偶函数.

3. 复合函数

设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 为两个函数,若 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域有非空交集,则由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 可复合而成复合函数 $y = f[\varphi(x)]$, u 称为中间变量.

4. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 若对 $\forall y \in W$, $\exists$ 唯一确定的 $x \in D$, 满足 $y = f(x)$, 则得到 x 是 y 的函数, 记为 $x = \varphi(y)$, 称为 $y = f(x)$ 的反函数. 习惯上将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

注: ① 单调函数存在反函数.

② 反函数 $y = f^{-1}(x)$ 与函数 $y = f(x)$ 有相同的单调性.

③ 函数 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图像重合, 但与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

5. 隐函数

设有关系式 $F(x, y) = 0$, 若对 $\forall x \in D$, 存在唯一确定的 y 满足 $F(x, y) = 0$ 与 x 相对应, 由此确定的 y 与 x 的函数关系 $y = y(x)$ 称为由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数.

6. 基本初等函数与初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数, 即 $y = x^a$; $y = a^x (a > 1, a \neq 1)$; $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$; $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$; $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.

初等函数: 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合运算所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数. 注意下面四个恒等式:

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x, & \arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2}, \\ \arctan x + \operatorname{arccot} x &= \frac{\pi}{2}, & \arctan x + \arctan \frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

7. 分段函数

在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数, 称为分段函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 2x + e^x, & x > 1, \\ 2, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln(1-x), & x < -1 \end{cases}$$

就是一个分段函数, -1 和 1 常称为函数的分段点.

注: ① 分段函数的复合, 分段函数在分段点的极限、连续性、可导性, 以及分段函数的不定积分与定积分都是考试的重点和难点, 必须引起考生足够的重视.

② 分段函数一般不是初等函数.

【例 1.5】 判别下列函数的奇偶性:

$$(1) y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$$(2) \text{Dirichlet 函数 } D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$(4) F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ 其中 } a \text{ 为常数, } f(x) \text{ 为可积的奇函数.}$$

【详解】(1) 因为 $y = \operatorname{sgn}(-x) = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases} = -\operatorname{sgn}x$, 故 $\operatorname{sgn}x$ 为奇函数.

(2) 因为 $D(-x) = D(x)$, 故 $D(x)$ 为偶函数.

(3) 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \ln \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

$$\begin{aligned} (4) \quad F(-x) &= \int_a^{-x} f(t) dt \stackrel{t=-u}{=} -\int_a^x f(-u) du = \int_a^x f(u) du \\ &= \int_a^x f(u) du + \int_a^x f(u) du = 0 + \int_a^x f(u) du \\ &= \int_a^x f(u) du = F(x), \end{aligned}$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

【例 1.6】 设 $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

【详解】 $f(f(x)) = \begin{cases} 4-f^2(x), & |f(x)| \leq 2, \\ 0, & |f(x)| > 2. \end{cases}$

进一步, 由下列不等式确定 x 的取值范围, 从而可得 $f(x)$ 的表达式, 再代入上面式子:

(1) 由 $|f(x)| \leq 2$ 有 $\begin{cases} |4-x^2| \leq 2, \\ |x| \leq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |0| \leq 2, \\ |x| > 2, \end{cases}$ 即 $\sqrt{2} \leq |x| \leq 2$ 或 $|x| > 2$.

(2) 由 $|f(x)| > 2$ 有 $\begin{cases} |4-x^2| > 2, \\ |x| \leq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} |0| > 2, \\ |x| > 2, \end{cases}$ 即 $|x| < \sqrt{2}$.

故
$$f(f(x)) = \begin{cases} 4, & |x| > 2, \\ 4 - (4-x^2)^2, & \sqrt{2} \leq |x| \leq 2, \\ 0, & |x| < \sqrt{2}. \end{cases}$$

注: 求这种分段函数的复合要“由里往外”逐层进行分析与计算.

二 极限

1. 极限的定义

(1) 数列极限.

对于数列 $\{x_n\}$, 常数 a , 若对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(2) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限.

若存在常数 A , 对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$, $\exists$ 正数 X , 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

(3) 当 $x \rightarrow x_0$ 时 (x_0 为有限值) 函数 $f(x)$ 的极限.

若存在常数 A , 对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

(4) 当 $x \rightarrow x_0$ 时(x_0 为有限值) 函数 $f(x)$ 的左、右极限.

若存在常数 A , 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 恒成立, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0^+$ 时的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 或 $f(x_0 + 0) = A$, 或 $f(x_0^+) = A$.

若存在常数 A , 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 恒成立, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0^-$ 时的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, 或 $f(x_0 - 0) = A$, 或 $f(x_0^-) = A$.

【例 1.7】 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的左、右极限均存在, 则下列等式中不正确的是

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(-x)$. (B) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
 (C) $\lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. (D) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. **【 】**

【详解】 由左、右极限的定义可知(A), (B) 与(C) 三个等式的两边都是函数 $f(x)$ 的右极限, 故等式正确. 而(D) 式的左端表示 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的极限, 它不一定存在, 故(D) 不正确, 应选(D).

2. 数列极限的基本性质

定理 1.1 (极限的唯一性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一.

定理 1.2 (收敛数列的有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界, 即存在常数 $M > 0$, 使得对 $\forall n$, 有 $|x_n| \leq M$.

定理 1.3 (收敛数列的保号性) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么 $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

推论 1.1 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 且 $a > b$, 那么 $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > y_n$.

推论 1.2 如果 $\exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 那么 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

定理 1.4 (收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a .

3. 函数极限的基本性质

定理 1.5 (极限的唯一性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 那么 $A = B$.

定理 1.6 (函数极限的局部有界性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界, 即存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

定理 1.7 (函数极限的局部保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$). 如果在 x_0 的某空心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

定理 1.8 (函数极限与数列极限的关系) 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足 $x_n \neq x_0$, 那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

【例 1.8】 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$, 则函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处

- (A) 可导, 且 $f'(a) \neq 0$. (B) 可导且取得极大值.
 (C) 不可导但取得极小值. (D) 不可导且不取极值. **【 】**

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)} \cdot \frac{1}{x - a} = -1$, 又 $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$, 故

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} \cdot (x - a) = 0,$$

即 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导且 $f'(a) = 0$.

又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$, 由极限的局部保号性得 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} < 0$,