读考研书 找人大社

2008年考研

数学

经典讲义(理工类)

主编 黄先开 曹显兵 简怀玉

一线名师授课底本　经典讲解全新奉上

全面解析大纲考试内容与考试要求，清晰明确，一目了然

总结重要公式与结论，帮助考生常记不忘

归纳典型题型讲解内容，例题分析、详解、评注环环相扣

每讲配精编习题，有针对性地演练、温习

中国人民大学出版社

2008年考研数学经典讲义(理工类)

▶ 主　编　黄先开　曹显兵　简怀玉

2008

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2008年考研数学经典讲义(理工类)/黄先开等主编.2版
北京:中国人民大学出版社,2007
ISBN 978-7-300-07506-8

Ⅰ.2…
Ⅱ.黄…
Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第016898号

2008年考研数学经典讲义(理工类)
主　编　黄先开　曹显兵　简怀玉

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242(总编室)		010－62511398(质管部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.net(中国1考网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京鑫霸印务有限公司		
规　格	210mm×285mm　16开本	版　次	2006年7月第1版
			2007年2月第2版
印　张	41.25	印　次	2007年2月第1次印刷
字　数	1 290 000	定　价	49.00元

前言

本书是作者根据最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编著的一本系统复习考研数学的参考书。它是以作者多年考研辅导讲稿为基础，结合作者对历年考题的研究、命题趋势以及数学的内在规律倾心编写而成的，目的是帮助广大考生在较短时间内系统复习好考研数学内容，取得优异成绩，并为今后研究生学习阶段打下坚实的数学基础，让数学伴随同学们走向人生的辉煌。

本书编写特点如下：

一、考试内容提要——对照最直接

明确考试内容与要求，才能有的放矢。本书在每章的第一节对最新考研大纲要求的基本概念、基本原理和基本方法都做了详尽的讲解，并指出注意事项。作者认为这对于考前进行全面、系统的复习是非常必要的。

二、重要公式与结论（补充注释与重要结论）——总结最完善

针对每一章中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论，特别是对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结。目的在于希望考生通过系统复习后，一见到此类问题，就能立刻联想到考题实际期望考查的是哪一方面的知识点，从而使考生站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题，达到认识和理解的新境界。考生是否具备了这种能力，对考研能否取得成功和获得高分是至关重要的。

三、典型题型与例题分析——题型最丰富

对数学课程来说，题目是无穷的，但题型是有限的。作者通过精心编制和设计许多新题型，使得本书几乎囊括了考研数学所涉及的所有题型，并逐一进行分析，给出了解题方法和规律。另外，借助于许多重要经典例题的评注，本书能够帮助同学们更好地把握典型例题的典型处理方法和各种可能的延伸，从而使同学们能够举一反三、触类旁通。

四、习题精选与答案——选题最典型

对于真正掌握一门课程内容并通过相关考试来说，做一定数量的习题是必不可少的。为此，作者按照填空题、选择题和计算证明题的顺序对应各种题型选编了相当数量的习题，供读者模拟练习之用，希望读者尽可能独立地完成习题。

五、本书带“*”的内容，数学二考生不作要求

在成书过程中，作者参考了众多著作和教材，由于篇幅所限不能一一列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于作者水平所限，书中一定还存在许多不足之处，敬请广大读者、同行专家批评指正。

作者

2007 年 2 月于北京

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

*第三部分　概率论与数理统计

PART ONE

第一部分 PART ONE

高等数学

第一章 函数、极限与连续

§1 考试内容提要

一 函数

1. 函数的概念及表示法

设x和y是两个变量(均在实数$\mathbf{R}$内取值),D是一个给定的非空数集,如果对于每个数$x\in D$,按照一定的法则,变量y总有一个确定的值和它对应,则称变量y是变量x的函数,记作$y=f(x)$,其中D叫做函数$y=f(x)$的定义域,x叫做自变量,y叫做因变量,函数值$f(x)$的全体所构成的集合称为函数f的值域.表示法有:公式法、表格法、图形法等.

要注意函数定义中的两个要素:

(1) 定义域D:它表示x的取值范围.

(2) 对应法则f:它表示给定x值,求y值的方法.

因此:① 对于两个给定的函数,当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时,才能说它们是相同的函数,否则它们就是不同的函数.② 求函数f的定义域,就是求使y的取值和运算有意义的自变量x的取值范围.

【例 1.1】 下列各题中,函数$f(x)$和$g(x)$是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\lg x^2,g(x)=2\lg x$.

(2)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

【详解】 (1) 不相同.因为两个函数的定义域不同,$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

(2) 相同.因为两个函数的定义域相同,都为全体实数,而且对应法则相同.

【例 1.2】 已知$f(x)=\sin x,f[\varphi(x)]=1-x^2$,试求函数$\varphi(x)$的定义域.

【详解】 由于$1-x^2=f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$,故$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$.于是$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$,即$0\leqslant x^2\leqslant 2$.所以函数$\varphi(x)$的定义域为$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

2. 函数的性态——有界性,单调性,周期性,奇偶性

(Ⅰ)有界性

设函数$y=f(x)$在区间I上有定义,如果存在正数M,对于任意$x\in I$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$y=f(x)$在区间I上有界;如果这样的M不存在,则称函数$y=f(x)$在I上无界.如果存在正数M_1,对于任意$x\in I$,恒有$f(x)\leqslant M_1$,则称函数$y=f(x)$在区间I上有上界;如果存在正数M_2,对于任意$x\in I$,恒有$f(x)\geqslant M_2$,则称函数$y=f(x)$在区间I上有下界.易知函数$f(x)$在区间I上有界的充分必要条件是它在I上既有上界又有下界.

(1) 几个常见的有界函数.

在区间$(-\infty,+\infty)$上,有

$$|\sin x|\leqslant 1,\ |\cos x|\leqslant 1,\ |\arctan x|<\frac{\pi}{2},\ |\operatorname{arccot} x|<\pi(\text{或 } 0<\operatorname{arccot} x<\pi).$$

在区间$[-1,1]$上，有$|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2}$，$|\arccos x|\leqslant\pi$（或$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$）.

注：① 函数$y=f(x)$有界或无界是相对于某个区间而言的，例如$y=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$内无界，但在区间$\left[\frac{1}{8},1\right]$上是有界的.

② 区分无界函数和无穷大：在某一变化过程中，若$f(x)$为无穷大，则存在对应的区间使$f(x)$无界；但是若$f(x)$在某个区间上无界，则$f(x)$不一定为无穷大. 例如$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在区间$(0,1]$上无界，但它的函数值在$x\to 0^+$时并不是无穷大.

③ 若函数$y=f(x)$在区间I上有界，则$f(x)$的导函数和原函数在区间I上不一定有界. 例如$y=\sqrt{x}$在$[0,1]$上有界，但其导函数$y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$在$(0,1]$上是无界的；$y=1+\cos x$在$(-\infty,+\infty)$上有界，但其原函数$F(x)=x+\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上是无界的.

(2) 判别方法：

方法一　直接法：定义本身就是判定$f(x)$是否有界的一种有效方法，即对$f(x)$，若存在$M>0$，使得$|f(x)|\leqslant M$，则$f(x)$有界，否则无界.

方法二　间接法：① 若$f(x)$在$[a,b]$连续，则$f(x)$在$[a,b]$有界. ② 若$f(x)$在(a,b)连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在，则$f(x)$在$(a,b)$有界.

【例 1.3】　$x\to 0$时，$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$是

(A) 无穷大.　　(B) 无穷小.　　(C) 非无穷大且在$(0,1]$上无界.　　(D) 在$(0,1]$上有界.

【　】

【详解】　取$x=\frac{1}{2n\pi}\to 0(n\to\infty)$，有$y=2n\pi\sin 2n\pi=0$.

取$x=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0(n\to\infty)$时，有$y=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to\infty$.

故函数是无界且非无穷大量，即选(C).

【例 1.4】　$f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在以下哪个区间有界？

(A)$(-1,0)$.　　(B)$(0,1)$.　　(C)$(1,2)$.　　(D)$(2,3)$.　　【　】

【详解】　本题要讨论的是开区间的有界性. 易知$f(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$，在$(-1,0)$连续，且在$x=-1$的右极限、$x=0$的左极限为

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin 3}{2\cdot 9}=-\frac{\sin 3}{18},$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4}.$$

故$f(x)$在$(-1,0)$有界，选(A).

另外，也可由

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,$$

排除(B)，(C)，以及由

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,$$

排除(D)，从而选(A).

(Ⅱ)单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或单调减小)的.

判别方法：

方法一　利用定义：设 $x_1>x_2$，计算 $f(x_1)-f(x_2)$，若它大于零，则单调增加；若它小于零，则单调减小.

方法二　利用导数：对可导函数 $y=f(x)$，若 $y'>0$，则 y 单调增加；若 $y'<0$，则 y 单调减小.

注：单调函数的导函数和原函数都不一定仍为单调函数. 例如 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，而其导函数 $y'=1$ 与原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内都不单调.

(Ⅲ)周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的常数 T，使得对于任一 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

判别方法：

方法一　利用定义：计算 $f(x+T)=\cdots=f(x)$，则 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数.

方法二　间接法：利用常见周期函数的周期进行判别和计算. 例如，由 $\sin x,\cos x$ 的周期为 2π，推知 $|\sin x|,|\cos x|,\sin 2x,\cos 2x$ 的周期为 π；由 $\tan x,\cot x$ 的周期为 π，推知 $|\tan x|,|\cot x|$ 的周期为 π，$\tan\frac{x}{2}$，$\cot\frac{x}{2}$ 的周期为 2π.

注：若 $f(x)$ 是可导的周期函数，则它的导函数仍是周期函数，且周期不变，但它的原函数不一定仍为周期函数. 例如 $f(x)=1+\sin x$ 是周期为 2π 的函数，其导函数 $f'(x)=\cos x$ 仍是周期为 2π 的函数，但其原函数 $F(x)=x-\cos x$ 不是周期函数.

(Ⅳ)奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)[\text{或}-f(x)]$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数). 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称.

判别方法：

方法一　利用定义：通过计算 $f(-x)=\cdots=f(x)(-f(x))$，则 $f(x)$ 是偶(奇)函数.

方法二　利用运算性质：

奇函数 ± 奇函数 = 奇函数　　偶函数 ± 偶函数 = 偶函数

奇函数 × 偶函数 = 奇函数　　偶函数 × 偶函数 = 偶函数　　奇函数 × 奇函数 = 偶函数

方法三　利用导函数与原函数奇偶性：

可导的奇函数的导函数是偶函数，例如 $(x^3)'=3x^2$.

可导的偶函数的导函数是奇函数，例如 $(x^2)'=2x$.

连续的奇函数的任何一个原函数都是偶函数，例如 $f(x)=\sin x$，$F(x)=-\cos x+C$.

连续的偶函数的原函数中只有一个是奇函数，例如 $f(x)=\cos x$，其全体原函数 $F(x)=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$ 中只有 $\sin x(C=0)$ 是奇函数.

注：① 若函数的定义域关于原点不对称，则此函数既不是奇函数，也不是偶函数.

② 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，则 $f(x)$ 一定可以表示成奇函数与偶函数的和. 事实上，

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

式中前者为奇函数，后者为偶函数.

3. 复合函数

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 为两个函数，若 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域有非空交集，则由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 可复合而成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若对 $\forall y\in W$，$\exists$ 唯一确定的 $x\in D$，满足 $y=f(x)$，则得到 x 是 y 的函数，记为 $x=\varphi(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数. 习惯上将 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

注:① 单调函数存在反函数.

② 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 有相同的单调性.

③ 函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图像重合，但与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

5. 隐函数

设有关系式 $F(x,y)=0$，若对 $\forall x\in D$，存在唯一确定的 y 满足 $F(x,y)=0$ 与 x 相对应，由此确定的 y 与 x 的函数关系 $y=y(x)$ 称为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数.

6. 基本初等函数与初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，即 $y=x^{a}$；$y=a^{x}(a>1,a\neq 1)$；$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$；$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$；$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.

初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合运算所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数. 注意下面四个恒等式：

$$a^{\log_a x}=x,\qquad \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2},\qquad \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

7. 分段函数

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}2x+e^{x}, & x>1,\\ 2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \ln(1-x), & x<-1\end{cases}$$

就是一个分段函数，-1 和 1 常称为函数的分段点.

注:① 分段函数的复合，分段函数在分段点的极限、连续性、可导性，以及分段函数的不定积分与定积分都是考试的重点和难点，必须引起考生足够的重视.

② 分段函数一般不是初等函数.

【例 1.5】 判别下列函数的奇偶性：

(1) $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(2) Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

(4) $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，其中 a 为常数，$f(x)$ 为可积的奇函数.

【详解】 (1) 因为 $y=\operatorname{sgn}(-x)=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x<0\end{cases}=-\operatorname{sgn}x$,故 $\operatorname{sgn}x$ 为奇函数.

(2) 因为 $D(-x)=D(x)$,故 $D(x)$ 为偶函数.

(3) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),\end{aligned}$$

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

(4)

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_a^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}-\int_{-a}^{x}f(-u)\mathrm{d}u=\int_{-a}^{x}f(u)\mathrm{d}u\\&=\int_{-a}^{a}f(u)\mathrm{d}u+\int_a^x f(u)\mathrm{d}u=0+\int_a^x f(u)\mathrm{d}u\\&=\int_a^x f(u)\mathrm{d}u=F(x),\end{aligned}$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

【例 1.6】 设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

【详解】 $f(f(x))=\begin{cases}4-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 2,\\ 0, & |f(x)|>2.\end{cases}$

进一步,由下列不等式确定 x 的取值范围,从而可得 $f(x)$ 的表达式,再代入上面式子:

(1) 由 $|f(x)|\leqslant 2$ 有 $\begin{cases}|4-x^2|\leqslant 2,\\ |x|\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|0|\leqslant 2,\\ |x|>2,\end{cases}$ 即 $\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2$ 或 $|x|>2$.

(2) 由 $|f(x)|>2$ 有 $\begin{cases}|4-x^2|>2,\\ |x|\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|0|>2,\\ |x|>2,\end{cases}$ 即 $|x|<\sqrt{2}$.

故

$$f(f(x))=\begin{cases}4, & |x|>2,\\ 4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|<\sqrt{2}.\end{cases}$$

注:求这种分段函数的复合要"由里往外"逐层进行分析与计算.

(二) 极限

1. 极限的定义

(1) 数列极限.

对于数列 $\{x_n\}$,常数 a,若对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$,$\exists$ 正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限,或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2) 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限.

若存在常数 A,对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$,$\exists$ 正数 X,当 $|x|>X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(3) 当 $x\to x_0$ 时(x_0 为有限值)函数 $f(x)$ 的极限.

若存在常数 A,对于任意给定的正数 $\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(4) 当 $x \to x_0$ 时(x_0 为有限值) 函数 $f(x)$ 的左、右极限.

若存在常数 A,对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$,$\exists\, \delta > 0$,当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立,则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0^+$ 时的右极限,记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$,或 $f(x_0 + 0) = A$,或 $f(x_0^+) = A$.

若存在常数 A,对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$,$\exists\, \delta > 0$,当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立,则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$ 时的左极限,记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$,或 $f(x_0 - 0) = A$,或 $f(x_0^-) = A$.

【例 1.7】 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的左、右极限均存在,则下列等式中不正确的是

(A) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(-x)$.　　(B) $\lim\limits_{x \to 0} f(x^2) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

(C) $\lim\limits_{x \to 0} f(|x|) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.　　(D) $\lim\limits_{x \to 0} f(x^3) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.　　【　】

【详解】 由左、右极限的定义可知(A),(B) 与(C) 三个等式的两边都是函数 $f(x)$ 的右极限,故等式正确. 而(D) 式的左端表示 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的极限,它不一定存在,故(D) 不正确,应选(D).

2. 数列极限的基本性质

定理 1.1(极限的唯一性) 如果数列$\{x_n\}$ 收敛,那么它的极限唯一.

定理 1.2(收敛数列的有界性) 如果数列$\{x_n\}$ 收敛,那么数列$\{x_n\}$ 一定有界,即存在常数 $M > 0$,使得对 $\forall\, n$,有 $|x_n| \leqslant M$.

定理 1.3(收敛数列的保号性) 如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$,且 $a > 0$(或 $a < 0$),那么 $\exists$ 正整数 N,当 $n > N$ 时,都有 $x_n > 0$(或 $x_n < 0$).

推论 1.1 如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$,$\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$,且 $a > b$,那么 $\exists$ 正整数 N,当 $n > N$ 时,都有 $x_n > y_n$.

推论 1.2 如果 $\exists$ 正整数 N,当 $n > N$ 时,都有 $x_n \geqslant 0$(或 $x_n \leqslant 0$),且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$,那么 $a \geqslant 0$(或 $a \leqslant 0$).

定理 1.4(收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列$\{x_n\}$ 收敛于 a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是 a.

3. 函数极限的基本性质

定理 1.5(极限的唯一性) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$,那么 $A = B$.

定理 1.6(函数极限的局部有界性) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,那么 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域 $U_0(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界,即存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x)| \leqslant M$.

定理 1.7(函数极限的局部保号性) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,而且 $A > 0$(或 $A < 0$),那么存在常数 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$). 如果在 x_0 的某空心邻域内 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$),而且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,那么 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

定理 1.8(函数极限与数列极限的关系) 如果极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 存在,$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列,且满足 $x_n \neq x_0$,那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$ 必收敛,且 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

【例 1.8】 设 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$,则函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处

(A) 可导,且 $f'(a) \neq 0$.　　(B) 可导且取得极大值.

(C) 不可导但取得极小值.　　(D) 不可导且不取极值.　　【　】

【详解】 因为 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)} \cdot \dfrac{1}{x - a} = -1$,又 $\lim\limits_{x \to a}(x - a) = 0$,故

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} \cdot (x - a) = 0,$$

即 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导且 $f'(a) = 0$.

又 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$,由极限的局部保号性得 $\exists\, \delta > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,有 $\dfrac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} < 0$,