1995年
成人高考强化综合复习

（文史财经类通用）

张庆峰
郝　军　主编

中国国际广播出版社

1995年
成人高考强化综合复习

（文史财经类通用）

张庆峰
郝　军　主编

中国国际广播出版社

(京)新登字 096 号

1995 年成人高考强化综合复习

(文史财经通用)

张庆峰　郝军　主编

中国国际广播出版社出版

新华书店总店北京发行所发行

北京外国语大学印刷厂印刷

787×1092mm 16 开 400 千字 14 印张

1994 年 12 月第一版 1994 年 12 月第一版一次印刷

ISBN 7—5078—1171—9/G·617

定价：13.60 元

前　言

本书根据1995年成人高考复习考试大纲的要求，参照近几年成人高考的特点精心编写。该书针对成人高考重点内容，通过电脑多次梳理和调整，强化了“冲刺”功能，有利于考生在较短的时间内（四个月）掌握应考全部知识。

参加编写的老师有多年成人高考教学经验，包括成人高考出题和阅卷老师。本书分两册，文科册有语文、政治、数学、历史、地理五科，理科册有语文、政治、数学、物理、化学五科。每科均有方法介绍及几套试题和答案。这是一本很适合参加成人高考和其他类似考试的考生用书，相信一定能成为广大考生的良师益友。

编者：张仲德　张庆峰　郑宝凤　卢芬盛　裴松年　张家毅　戴　萍
荣　项　金志刚　张振华　陈韶光　李　凯　任　农　郝　军

目　　录

第一部分　知识要点

说明：(1)下列内容中，不标任何符号的属于理工类和文史类财经类考生共同复习内容；

(2)凡标有"▲"号的为理工类考生附加复习的内容。

一　数、式、方程和方程组

(一)数及其有关概念简述

1. 自然数(又称正整数)，即象 1，2，3，4，5，……等数。自然数个数是无限的，最小自然数是 1，无最大的自然数。切记，0 不是自然数。

有理数，整数(正、负整数和零)和分数(正、负分数)统称为有理数。因为有限小数和无限循环小数都可以化成分数，所以，也可以说整数、有限小数和无限循环小数都是有理数。

无理数，无限不循环小数叫无理数。如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、π、Lg2、……等都是无理数。

实数，有理数和无理数统称为实数。文史财经类考生的试题都是在实数范围内出，而理工农医类的试题要扩大到复数范围内，至于复数的内容将在后面单独给出。

2. 三个重要的非负数(正数和零总称为非负数)。

(1)绝对值非负，即$|a|\geqslant 0$。

(2)实数和偶次幂非负，即$a^{2n}\geqslant 0$(这里，a 为实数，n 为自然数)。

(3)算术根非负，即$\sqrt[n]{a}\geqslant 0$(这里，$a\geqslant 0$，n 为大于 1 的自然数)。

算术平方根与绝对值有如下关系：$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & 当 a\geqslant 0 \\ -a & 当 a<0 \end{cases}$

3. 数轴　规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。数轴上的点与实数是一一对应的。因此数轴的建立第一次开辟了数形结合的途径。

(二)代数式有关概念简述

1. 代数式和代数式的值。用运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)把数和表示数的字母连结而成的式子叫代数式，单独的一个数或者一个字母也是代数式。用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫代数式的值。如代数式$\frac{2X-3Y}{5X^2+y}$当 $x=2$，$y=-3$ 时的值是$\frac{2\times 2-3(-3)}{5\times 2^2+(-3)}=\frac{13}{17}$。

2. 代数式分类如下：

$$代数式\begin{cases} 有理式\begin{cases} 整式\begin{cases} 单项式 \\ 多项式 \end{cases} \\ 分式 \end{cases} \\ 无理式 \end{cases}$$

如-5，$3x^2$，$2x^2-3y+2$ 等是整式，而-5，$3x^2$ 是单项式，$2x^2-3y+2$ 是多项式；

$\frac{3x}{4x-2y}$，$\frac{2}{x}$是分式，但$\frac{2}{3}$不是分式，而是整式；$\sqrt{2x+1}$，$\frac{3X}{\sqrt{x-y}}$等是无理式，但$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{5}$不是无理式，而是根式

注意，无理式也是根式，但根式不一定是无理式。

在根式中要弄清最简根式(尤其是最简根式)，同类根式，同次根式几个概念。

3. 正整数指数幂的运算法则和乘法公式

(1)$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$(这里，m，n 为自然数，以下同)

$a^m\div a^n=a^{m-n}$($a\neq 0$，$m>n$ 且为自然数)

$(a^m)^n=a^{mn}$；$(ab)^n=a^n\cdot b^n$；

$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}$($b\neq 0$)

(2)平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

完全平方公式$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

完全立方公式$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

立方和与立方差公式$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

(三)方程和方程组的解法

1. 方程的解法

(1)一元一次方程：一般地，通过同解变形(去分母，去括号，移项，合并同类项，方程两边同除以未知数系数)化成 $x=C$。

(2)一元二次方程：$ax^2+bx+c=0$($a\neq 0$)解法很多，但常用十字相乘法和求根公式法，求根公式是：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(3)分式方程：分母中含有未知数的方程，叫做分式方程。其一般解法是：将方程两边同乘以方

程中诸分母的最低公倍式，化成整式方程来解。解分式方程时，有可能产生增根，因此，一定要验根。

(4)无理方程：被开方数含有未知数的方程叫无理方程。其一般解法是：方程两边都乘方相同的次数，化成有理方程来解，解无理方程时，有可能产生增根，因此一定要验根。

2. 方程组的解法

(1)二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

常用代入消元法和加减消元法(简称代入法和加减法)来解。

(2)二元二次方程组

当属于第一类型(即由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成)时，通常用代入法来解。当属于第二类型(即由两个二元二次方程组成)时，由于可能化成高次方程，解法很复杂，因此，我们只能解某些简单的方程组。

一般地说，通过代入、加减等手段达到"消元、降次"之目的，是解方程组的基本思想。

3. 一元二次方程根的判别式和根与系数的关系(韦达定理)。

对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

(1) $\triangle=b^2-4ac$ 叫做根的判别式，它的符号确定了方程根的三种情况：

a，b，c 为实数，当 $\triangle>0$ 时，方程有两个不相等的实根；

当 $\triangle=0$ 时，方程有两个相等的实根；

当 $\triangle<0$ 时，方程无实根。

以上结论，反之也正确。

注意，若 a，b，c 不全为实数，以上结论不正确。

(2)若方程两根为 x_1, x_2，则有

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$；$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

称为韦达定理，它反映了一元二次方程的根与系数之间的关系。注意，根的判别式和韦达定理是十分重要的内容。

二　不等式和不等式组

(一)不等式及其性质

用不等号($>,<,\geqslant,\leqslant,\neq$)连接两个解析式所成的式子，叫做不等式。

不等式的性质有：

1. 对称性：若 $a>b$，则 $b<a$
2. 传递性：若 $a>b, b>c$ 则 $a>c$
3. 若 $a>b$，则 $a+c>b+c$
4. 若 $a>b, c>0$，则 $ac>bc$
   若 $a>b, c<0$，则 $ac<bc$
5. 若 $a>b, c>d$，则 $a+c>b+d$
6. 若 $a>b>0, c>d>0$，则 $ac>bd$
7. 若 $a>b>0$，则 $a^n>b^n(n\in N$ 且 $n>1)$
8. 若 $a>b>0$，则 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\,(n\in N$，且 $n>1)$

以上八条性质中，前四条是最基本的，文科考生只需掌握前四条。

▲对理工类考生，在证明不等式时，还常用到下面几个重要的不等式：

(1)若 $a, b\in R^+$，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取等号)

(2)若 $a, b\in R^+$，则 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取等号)

(二)不等式和不等式组的解法

1. 一元一次不等式的解法与一元一次方程相类似，通过去分母，去括号，移项，合并同类项，方程两边同除以未知数的系数等步骤得出解，但要注意不等式两边同乘以(或除以)负数时，要改变不等号的方向。

2. 一元一次不等式组：由几个一元一次不等式联立在一起，叫一元一次不等式组。它的解集是不等式组中诸不等式解集的交集(即表示在同一数轴上的公共部分)。

3. 一元二次不等式：含有一个未知数且未知数的最高次数是二次的不等式，叫做一元二次不等式。

一元二次不等式总可以化成下面的情况：

$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$

解法(1)当 $\triangle>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 两相异实根为 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$，则

$ax^2+bx+c>0(a<0)$的解为

$x<x_1$ 或 $x>x_2$　$ax^2+bx+c<0(a>0)$的解为 $x_1<x<x_2$

口诀："大于取两边，小于取中间"。

(2)当$\Delta\leqslant 0$时，利用二次函数图象或配方法求解。

4. 不等式$\frac{ax+b}{cx+d}>0$(或<0)的解法：

(1)转化为一元一次不等式组来解：

$\frac{ax+b}{cx+d}>0$ 与不等式组 $\begin{cases}ax+b>0\\cx+d>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}ax+b<0\\cx+d<0\end{cases}$ 同解；

$\frac{ax+b}{cx+d}<0$ 与不等式组 $\begin{cases}ax+b>0\\cx+d<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}ax+b<0\\cx+d>0\end{cases}$ 同解；

(2)转化为一元二次不等式来解：

$\frac{ax+b}{cx+d}>0$ 与不等式$(ax+b)(cx+d)>0$同解

$\frac{ax+b}{cx+d}<0$ 与不等式$(ax+b)(cx+d)<0$同解

5. 不等式$|x|>a$，$|x|<a(a>0)$的解法

$|x|>a$ 的解为 $x<-a$ 或 $x>a$

$|x|<a$ 的解为 $-a<x<a$.

口诀："大于取两边，小于取中间"。

(三)用区间表示不等式：

了解下列区间符号：开区间(a,b)；闭区间$[a,b]$；半开半闭区间$(a,b]$，$[a,b)$；区间$[a,+\infty)$；$(a,+\infty)$；$(-\infty,b)$；$(-\infty,b]$，$(-\infty,+\infty)$所表示的实数集。

三 集合

(一)有关集合的一些概念

1. 集合和元素：

集合是数学中不加以定义的基本概念之一。它可以理解为具有某种属性的一些确定的对象所组成的全体。集合又简称为集。组成集合的每一个对象叫做集合的元素，简称为元。一般用英文大写字母A，B，C，……表示集合，用小写字母a，b，c，……表示元素。

集合中元素具有下列性质：确定性、互异性和无序性。

注意：不含任何元素的集合叫做空集，用$\varnothing$表示。不要错误地认为由元素0组成的集合是空集。

2. 以数为元素的集合叫数集，常见数集有：

(1)自然数集——用N表示；

(2)整数集——用Z表示；

(3)有理数集——用Q表示，而Q^+，Q^-分别表示正、负有理数集；

(4)实数集——用R表示；而R^+，R^-分别表示正、负实数集。

▲(5)复数集——用C表示。

(二)集合的表示方法：

1. 列举法——把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，如"小于10的质数"这个集合可表示为$\{2,3,5,7\}$

2. 描述法——把集合中元素的共同属性写在大括号内表示集合的方法。如"不大于5的自然数"这个集合写成$\{x|x\leqslant 5,x\in N\}$

(三)元素、集合间的关系

1. 元素和集合之间的关系：如果元素a是集合A的元素，记为$a\in A$，若元素b不是集合A的元素，记为$b\notin A$。

2. 集合和集合的关系："包含"与"相等"的关系。

(1)子集——如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，则集合A叫做集合B的子集，记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。

根据定义，显然有$A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$。

(2)真子集——A是B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，则集合A叫做集合B的真子集，记为$A\subset B$或$B\supset A$。

注意：$\varnothing\subset A$是错误的，但若A不是空集则$\varnothing\subset A$是正确的。

(3)等集——若对集合A和B，$A\subseteq B$且$B\subseteq A$同时成立，则称A和B是相等的集合，并记为$A=B$。

(四)集合之间的运算

1. 交集——由集合A和集合B的所有共同元素所组成的集合，叫做A和B的交集，记为$A\cap B$。

由定义可得$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$。

2. 并集——由集合A和集合B的所有元素合并在一起所组成的集合，叫做A与B的并集，记为$A\cup B$。

由定义可得：$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$。

3. 补集——给定某个集合I(称之为全集)，

如果$A\subseteq I$，则由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在I中的补集，记为$\overline{A}$，由定义可得$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$。

四　指数和对数

（一）指数及其运算

1. 符号$a^b=N$叫指数式，其中a叫做底数，b叫做幂指数，简称为指数，N叫做幂。

2. 指数概念：

（1）正整数指数幂：$a^n=a\cdot\underbrace{a\cdots\cdots a}_{n\text{个}}(n\in N)$。

（2）零整数幂：$a^0=1(a\neq0)$。

（3）负整指数幂：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(a\neq0,n\in N)$。

（4）分数指数幂：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a\geqslant0)$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}(a>0)$$

这里，$m,n\in N$，且$n>1$。

3. 指数的运算法则：

（1）$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$；

（2）$(a^x)^y=a^{xy}$；

（3）$(ab)^x=a^xb^x$。

以上$a>0,b>0,x\in R,y\in R$。

（二）对数及其运算：

1. 对数式及其与指数式的互化。

指数式$a^b=N(a>0$，且$a\neq1)$若改写成$b=\log_aN$，则称此式为对数式。此时b叫做以a为底N的对数，a叫做对数的底数，N叫做真数。

当$a>0$且$a\neq1$时，指数式和对数式是完全等价的，仅仅是表示形式不同，因此，根据需要它可以由一种形式转化为另一形式。

以10为底的对数叫常用对数，通常将$\log_{10}N$写成$\lg N$。

对数有下面性质：

（1）零和负数无对数，即真数必须大于零；

（2）底的对数等于1，即$\log_aa=1$；

（3）1的对数等于0，即$\log_a1=0$；

（4）$a^{\log_aN}=N$，此式叫做对数恒等式。

2. 对数运算法则：

（1）$\log_a(MN)=\log_aM+\log_aN$

（2）$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$

（3）$\log_aM^n=n\log_aM$

（4）$\log_a\sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_aM$

以上各式中，$M>0,N>0,a>0$且$a\neq1$。

3. 对数换底公式

$\log_aN=\dfrac{\log_bN}{\log_ba}$

推论：

（1）$\log_ab=\dfrac{1}{\log_ba}$

（2）$\log_{a^n}b^n=\log_ab$

4. 常用对数的性质：

（1）$\lg1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个}0}=\lg10^n=n$

$\lg\underbrace{0\cdot00\cdots0}_{n\text{个}0}1=\lg10^{-n}=-n$

（2）真数较大时，对数也较大。

五　函数

（一）函数的一些概念

1. 定义：在某个变化过程中有两个变量x，y。如果对于x在某一范围内的每一确定的值，按照某个对应法则，y都有唯一确定的值与之对应，那么y就是x的函数，x叫做自变量，y是x的函数，并记为$y=f(x)$。

2. 函数的定义域：自变量x的取值范围叫做函数的定义域。函数定义域是非常重要的一个概念，要十分重视。

对于用解析法表示的一个纯数学函数，确定定义域有以下几种情况：

（1）解析式为整式，定义域为$x\in R$；

（2）解析式为分式，分母不能为零；

（3）解析式含偶次根式，被开方数非负；

（4）解析式含指数和对数，要注意底数，真数应满足的条件。

如遇实际问题和几何问题，还必须考虑实际意义。

3. 函数值和值域：与自变量x_0相对应的因变量的值y_0，称为当$x=x_0$时的函数值，并记为$y_0=f(x_0)$。

函数值的全体组成的集合叫函数的值域。

函数的定义域、值域、对应法则构成函数的三要素。

4. 函数的图象：在平面直角坐标系中，全体点$(x,f(x))$的集合所形成的图形，叫函数$y=f(x)$的图象。

画图象的基本方法是描点法，描点法的步骤是：(1)求定义域；(2)列表；(3)在平面直角坐标系中描点，连线。

▲5. 反函数，如果对于函数$y=f(x)$的每一确定的值$y_0=f(x_0)$，自变量都有唯一确定的值x_0与之对应，那么，就可得到一个以y为自变量，以对应的x值为函数值的函数，这个函数叫做原来函数的反函数，记为$x=f^{-1}(y)$，由于习惯上用x表示自变量，y表示函数，所以把函数$y=f(x)$的反函数记为$y=f^{-1}(x)$。

函数$y=f(x)$的定义域和值域分别是反函数$y=f^{-1}(x)$的值域和定义域。

函数$y=f(x)$和$y=f^{-1}(x)$的图象关于第一、三象限的角平分线(即直线$y=x$)对称。

(二)函数的性质：

1. 函数的奇偶性：对函数$y=f(x)$，如果对于定义域内任一个x，都有$f(-x)=f(x)$，则函数$f(x)$叫做偶函数；如果对于定义域内任何一个x，都有$f(-x)=-f(x)$，则函数$f(x)$叫做奇函数。奇函数的图象关于原点对称，而偶函数的图象关于y轴对称。

按奇偶性，函数可分为奇函数，偶函数，非奇非偶函数，又奇又偶函数四大类。

2. 函数的单调性：设函数$y=f(x)$，如果对于给定区间上的任意两个自变量的值x_1,x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$y=f(x)$在此给定区间上为增函数；而当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$y=f(x)$在此给定区间上为减函数。增函数和减函数统称为(严格)单调函数，一个区间上的函数是单调的，则这个区间叫做函数的单调区间。

从图象上看，增函数的图象(从左到右)是上升的，而减函数的图象则是下降的。

(三)一些特殊函数：

1. 正比例函数：函数$y=kx(k\neq0)$叫做正比例函数，其图象是过原点和点$(1,k)$的一条直线，当$k>0$时，图象在第一、三象限；当$k<0$时，图象在第二、四象限。

性质：(1)是奇函数；

(2)当$k>0$时，函数是增函数；当$k<0$时，函数是减函数。

2. 反比例函数：函数$y=\frac{K}{X}(K\neq0)$叫做反比例函数，其图象是等轴双曲线。当$k>0$时，双曲线的两支分别在第一、三象限；当$k<0$时，双曲线的两支分别在第二、四象限。

性质：(1)是奇函数；

(2)当$k>0$时，函数在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上是减函数；当$k<0$时，函数在区间$(0,+\infty)$上是增函数。

3. 一次函数：函数$y=kx+b(k,b$为常数，且$k\neq0)$叫做一次函数。当$b=0$时，一次函数就是正比例函数，因此，正比例函数是特殊的一次函数。一次函数的图象是经过点$(0,b)$且平行于直线$y=kx$的一条直线。

性质：(1)当$b\neq0$时为非奇非偶函数；

(2)当$k>0$时，函数为增函数；而当$k<0$时，函数为减函数。

4. 二次函数：(首先注意，二次函数是最重要的一种特殊函数)。

函数$y=ax^2+bx+c$(其中a,b,c为常数，且$a\neq0$)，叫做二次函数。二次函数的图象是抛物线，当$a>0$时，抛物线开口向上，而当$a<0$时，抛物线开口向下。

性质：(1)顶点坐标为$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$，对称轴方程为$x=-\frac{b}{2a}$；

(2)当$a>0$时，函数有最小值；而当$a<0$时，函数有最大值；

(3)当$a>0$时，在区间$(-\infty,-\frac{b}{2a})$上为减函数，而在区间$(-\frac{b}{2a},+\infty)$上为增函数；

而当$a<0$时，函数的增减性与$a>0$时刚好相反。

(4)$\triangle=b^2-4ac$，当$\triangle>0$时，抛物线与x轴相交；$\triangle=0$时，抛物线与x轴相切；$\triangle<0$时，抛物线与x轴无公共点。

5. 幂函数：函数$y=x^\alpha$(α为常数)叫幂函数，

函数的图象和定义域随 α 的不同而改变。

性质：(1)当 $\alpha>0$ 时，图象过原点和(1,1)点；在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数；

(2)当 $\alpha<0$ 时，图象过(1,1)点，在区间 $(0,+\infty)$ 上为减函数。

6. 指数函数和对数函数：

函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 叫指数函数；

函数 $\log_a x(a>0,a\neq1)$ 叫对数函数。

指数函数和对数函数互为反函数。

指数函数图象是通过点(0,1)在 x 轴上方的曲线；而对数函数图象是通过点(1,0)在 y 轴右方的曲线。当底 a 相同时，指数函数和对数函数图象关于直线 $y=x$ 对称。

指数函数的性质：(1)定义域 $x\in R$；

(2)函数的值域为 $y\in R^+$；

(3)当 $a>1$ 时，函数为增函数，而当 $0<a<1$ 时，函数为减函数。

对数函数的性质：(1)定义域 $x\in R^+$；

(2)函数值域为 $y\in R$；(3)当 $a>1$ 时，函数为增函数，当 $0<a<1$ 时，函数为减函数。

六　数列

(一)数列的有关概念：

1. 按照一定的次序排列的一列数叫做数列，数列中的每一个数叫做数列的项。第一项叫首项，第 n 项又叫通项。

一般地常用 $a_1,a_2,a_3,\cdots a_n\cdots$ 表示数列，也可简写成数列 $\{a_n\}$。

2. 数列的通项公式：如果一个数列的通项 a_n 与项数 n 之间的关系能够用一个公式来表示，则称这个公式是数列的通项公式。

对数列来说，通项公式是十分重要的，有了通项公式就可以写出数列的任意一项，但要注意并非所有数列都有通项公式，例如，所有质数组成的数列却没有通项公式。

3. 数列的前 n 项和：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，叫数列的前 n 项和。数列的前 n 项和 S_n 与数列的通项 a_n 有下列的关系：

$$a_n=\begin{cases}S_1 \\ S_n-S_{n-1} & (n\in N 且 n\geqslant2)\end{cases}$$

(二)特殊数列：

1. 等差数列：(1)定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，而这个常数叫做公差，通常用 d 表示。

用式子表示等差数列，即 $a_{n+1}-a_n=d(n\in N)$

等差数列可写成 $a_1,a_1+d,a_1+2d,\cdots$

(2)通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$

(3)等差中项：若 x,a,y 成等差数列，则 a 叫做 x,y 的等差中项，并且 $a=\frac{x+y}{2}$

(4)前 n 项和公式：

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}$$

(5)等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $m+n=k+l$，则有 $a_m+a_n=a_k+a_l$。

等差数列中主要有五个量，a_1,d,n,a_n,S_n，其中 a_1,d 是最重要的。这五个量中，任意知道三个量都可求出其余的两个量。

2. 等比数列：(1)定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫做等比数列，而这个常数叫做公比，通常用 q 表示，显然 $q\neq0$。

用式子表示等比数列，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\quad(n\in N)$

等比数列可写成 $a_1,a_1q,a_1q^2,\cdots$

(2)通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$

(3)等比中项：若 x,G,y 成等比数列，则 G 叫做 x,y 的等比中项，并且 $G^2=xy$

(4)前 n 项和公式：

当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，

当 $q\neq1$ 时，$s_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a^nq}{1-q}$

(5)等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $m+n=k+l$，则有 $a_m\cdot a_m=a_k\cdot a_l$

等比数列中主要有五个量，a_1,q,n,a_n,s_n，其中 a_1,q 是最重要的。这五个量中，任意知道三个量都可求出其余的两个量。

注意：一个不是零的常数列既是等差数列（公差为 0）又是等比数列（公比为 1），但数列 0,0,0,…0…是等差数列，而非等比数列

▲七　排列、组合、二项式定理

（一）两个基本原理：

1. 加法原理：做一件事，完成它可有有 n 类办法，第一类办法中又有 m_1 种方法，第二类办法中有 m_2 种方法，……，第 n 类办法中有 m_n 种方法，那么完成这件事共有：

$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$

种不同的方法。

加法原理讲的是分类，类与类之间彼此独立，每一类办法都可完成这一事件，所以加法原理又称为“类”法原理。

2. 乘法原理：完成一件事需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事共有：

$N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots m_n$

种不同的方法。

乘法原理讲的是分步，步与步之间相互关连又相互依存，任何一步都不能完成这一事件，只有完成各步，才能完成这一事件，乘法原理又称为“步”法原理。

两个基本原理体现了排列、组合问题的基本思想，对解决排列、组合问题非常重要。在处理实际问题中一定要分清是“类”还是“步”，做到不重不漏。

（二）排列

1. 定义：从 n 个不同的元素中，任取 m 个（$m\leqslant n,m,n\in N$）元素，按照一定的次序排成一列，叫做从 n 个不同元素取出 m 个元素的一个排列。当 $m=n$ 时，叫做全排列。

2. 排列数：从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，记为 P_n^m，全排列数为 p_n^n。

3. 排列数公式：

$P_n^n=n!\ =1\times2\times3\cdots(n-1)n$

$n!$ 表示自然数 1 到 n 的连乘积，叫做n 的阶乘，并规定 $0!\ =1$。

$p_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

（三）组合：

1. 定义：从 n 个不同的元素中，任取 $m(m\leqslant n,m,n\in N)$ 元素，并成一组，叫做从 n 个元素中取出 m 个元素的一个组合。

排列、组合最本质的区别是排列是有顺序的，而组合是无顺序的。

2. 组合数：从 n 个不同元素中，任取 m 个（$m\leqslant n$）元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，并记为 C_n^m.

3. 组合数公式：

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m^m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}$$

规定：$C_n^0=1$

4. 组合数的两个性质：

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$

当 $m>\dfrac{n}{2}$ 时，用此性质计算较简便。

(2) $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$

（四）二项式定理

1. 公式 $(a+b)^n=c_n^0a^n+c_n^1a^{n-1}b+\cdots+c_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+c_n^nb^n(n\in N)$ 所表示的定理叫做二项式定理。

等式右边的多项式（共 $n+1$）项叫做二项展开式。其中 $C_n^0,C_n^1,C_n^2,\cdots C_n^n$ 叫做二项式系数。

2. 通项公式：$(a+b)^n$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项叫做通项，且 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$ 叫通项公式，利用这个公式可写出展开式中的任何一项。

3. 二项展开式的性质：

(1) 在二项展开式中，与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等；

(2) 如果二项式的幂指数为偶数，那么中间一项的二项式系数最大。如果幂指数为奇数，那么中间两项的二项式系数相等且最大。

注意：展开式中某一项的系数与这一项的二项式系数是两个不同的概念。

▲八　复数

（一）复数的概念

1. 虚数单位 i，具有以下性质：

(1) $i^2=-1$；

(2) i 可与实数进行四则运算，进行四则运算

时，原有的加、乘运算律仍然成立；

(3)$n\in Z$ 时，$i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i$

2. 复数的定义：形如 $a+bi(a,b\in R)$ 的数叫复数，a 叫实部，b 叫虚部。

当 $b=0$ 时，复数就是实数；

当 $b\neq 0$ 时，复数叫做虚数；

当 $b\neq 0$ 而 $a=0$ 时，复数叫纯虚数。

3. 两个复数，当且仅当它们的实部相等，虚部也相等时，这两个复数相等。

4. 共轭复数：实部相等而虚部互为相反数的两个复数叫做互为共轭复数，复数 $z=a+bi$ 的共轭复数为 $\bar{Z}=a-bi$。

任何实数与它自已共轭，叫自共轭。

当 $b\neq 0$ 时，共轭复数又叫共轭虚数，但共轭虚数与共轭复数是两个有关系但又区别的概念。

(二)复数的表示方法：

1. 代数形式：$a+bi$

2. 几何表示：

(1)用复平面内的点 $Z(a,b)$ 表示 $a+bi$；

(2)用复平面内以原点 O 为起点，$Z(a,b)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示。

3. 三角形式：$r(\cos\theta+i\sin\theta)$

其中 $r=|OZ|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ 叫做复数 $a+bi$ 的模(也叫绝对值)，θ 表示实轴正方向到向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所成的角，叫复数的辐角，如果 $0\leqslant\theta<2\pi$，则 θ 为辐角的主值，用 $\arg Z$ 字表示。

将代数形式化为三角形式非常重要，其中 a，b, r, θ 的关系由下列公式确定：

$$\begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta=\dfrac{a}{r} \\ \sin\theta=\dfrac{b}{r} \end{cases}$$

(三)复数的运算

1. 代数形式的运算：

(1)$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$

(2)$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$

(3)由 $(a+bi)\div(c+di)=\dfrac{a+bi}{c+di}$

分子分母同乘以分母的共轭虚数，转化为乘法来计算。分子分母同乘以分母的共轭虚数，可使分母变为实数，这个过程叫分母实数化。这与无理数运算中分母有理化何其相似。

(4)$(a+bi)^n$ 可利用二项式定理展开，但比较麻烦，所以乘方是化成复数三角形式以后再运算。

熟记下列结果对某些乘方运算将带来方便

$(1+i)^2=2i \quad (1-i)^2=-2i$

$\dfrac{1+i}{1-i}=i \quad \dfrac{1-i}{1+i}=-i$

$(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)^3=1$

$(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)^2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,

$(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)^2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

2. 三角形式的运算：

以下运算中 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,

$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ 均是复数的三角形式。

(1)$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

(2)$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

(3)$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(4)$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 次方根有 n 个，它们是 $\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n})$

$(k=0,1,2\cdots n-1)$

(四)复数与一元二次方程

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

1. 当 a，b，c 都是实数时：

(1)当 $\triangle=b^2-4ac<0$ 时，方程有一对共轭虚根：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}i}{2a}$

(2)当 $\triangle<0$ 时，两根为 x_1, x_2，

$|x_1-x_2|\neq\sqrt{(x_1-x_2)^2}$

2. 当 a，b，c 中至少有一虚数时：

(1)求根公式和韦达定理依然成立；

(2)$\triangle=b^2-4ac$ 也失去作用；

(3)方程两根为 x_1 和 x_2，$|x_1-x_2|\neq\sqrt{(x_1-x_2)^2}$

九　三角函数及其有关概念

(一)角的概念及其度量：

1. 角的概念的推广：在平面几何中角被看成

是由一点出发的两条射线所组成的图形。用这种静止的观点来研究三角知识是不够的，因此，用运动的观点，角被看成是平面内的一条射线绕着它的端点旋转而生成的图形，按逆时针方向旋转所成的角叫正角，而按顺时针方向旋转所成的角叫负角。

若将角 α 的顶点置于平面直角坐标系中的原点，而始边与 x 轴正向重合，若角的终边落在象限内，则称这种角为象限角(落在第几象限，则叫第几象限的角)，若角的终边落在坐标轴上，则这种角叫轴线角。

由角的概念得出，终边相同的角有无数个，统称为终边相同的角。

2. 两种度量角大小的制度：

(1)角度制：周角的$\frac{1}{360}$称为 1 度的角，$1°=60', 1'=60''$。

(2)弧度制：等于半径的圆弧所对的园心角叫 1 弧度角，用"弧度"为单位来度量角的制度叫弧度制，但"弧度"二字经常不写。

(3)两种制度的互化：

只须牢牢记住 $180°=\pi$(弧度)很容易推出 $1°=\frac{\pi}{180}$(弧度)　1(弧度)$=(\frac{180}{\pi})°\approx 57.3°$

对于一些特殊角，$30°=\frac{\pi}{6}, 45°=\frac{\pi}{4}, 60°=\frac{\pi}{3}, 90°=\frac{\pi}{2}$，以及他们整数倍的特殊角都要会熟练地互化。

所有与 α 终边相同的角，边同 α 在内可表示为 $k \cdot 360°+\alpha$。

或 $2k\pi+\alpha$(以上 $k \in Z$)

(二)任意角的三角函数

1. 定义：设 α 是任意大小的角，在角 α 终边上任取一点 P，其坐标为(x，y)，它到原点 O 的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，则规定：

正弦函数　$\sin\alpha=\frac{y}{r}$

余弦函数　$\cos\alpha=\frac{x}{r}$

正切函数　$\sin\alpha=\frac{y}{x}$

余切函数　$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$

正割函数　$\sec\alpha=\frac{r}{x}$

余割函数　$\csc\alpha=\frac{r}{y}$

统称为三角函数。

2. 符号

(1)看象限：第一象限，六个函数值皆为正；第二象限，正弦、余割为正，其余为负；第三象限，正，余切为正，其余为负；第四象限，余弦、正切为正，其余为负。

(2)看函数：正弦和余割函数，第一、二象限为正，第三、四象限为负；余弦和正割函数，第一、四象限为正，第二、三象限为负；正、余切函数，第一、三象限为正，第二、四象限为负。

3. 特殊角函数值：

下列两表中的特殊角三角函数值，是三角计算的基础，也是其余数学内容的基础，对今后的学习至关重要，因此，必须牢牢地记住：

表 1：

函数 角α 值 函数	$30°(\frac{\pi}{6})$	$45°(\frac{\pi}{6})$	$60°(\frac{\pi}{6})$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

表 2

函数 角α 值 函数	0°(0)	90°($\frac{\pi}{2}$)	180°(π)	270°($\frac{3\pi}{2}$)	360°(2π)
$\sin\alpha$	0	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	0	−1	0	1
$tg\alpha$	0	不存在	0	不存在	0
$ctg\alpha$	不存在	0	不存在	0	不存在

正余割的特殊函数值，不要求记忆，但要求能根据三角函数之间求出来。

（三）同角函数关系：

1. 倒数关系：$\sin\alpha\csc\alpha=1$

$\cos\alpha\sec\alpha=1$

$tg\alpha ctg\alpha=1$

2. 商数关系：$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3. 平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$tg^2\alpha+1=\sec^2\alpha$

$ctg^2\alpha+1=\csc^2\alpha$

注意了解公式的实质，以及灵活地使用公式是进行三角函数计算和变形的关键。

（四）诱导公式：

诱导公式比较多，如果死记硬背难以记住，若按下列口诀记忆，则容易记住。

1. 第一类：包括$-\alpha$，$180°\pm\alpha$，$360°-\alpha$，$k\cdot360°+\alpha$　$(k\in Z)$

口诀为："函数名不变，符号看象限"

2. 第二类：包括$90°\pm\alpha$，$270°\pm\alpha$，

口诀为："函数名改变，符号看象限"

说明：(1)口诀中的第一名讲的是函数名称变还是不变，第二类中将函数改变成相应的余函数（正弦和余弦，正切和余切，正割和余割互为余函数）。(2)口诀中的第二句讲的是α角的函数前是否加"−"号：其法则为视α为锐角，由以上各角所在象限及原来函数值的符号来决定。

利用以上诱导公式，可以将任意角三角函数化成0°～90°间角的三角函数，然后由特殊角函数值或查表求值。一般情况下，尽量使用第一类公式。

十　三角函数式的变换

本章内容是三角中至关重要的内容，公式较多，不但要牢记公式，而且要知道公式的来龙去脉，这样才能牢牢记住公式，并能灵活地应用。

1. 两角和与差公式：

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\alpha\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}$

2. 二倍角公式：

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$tg2\alpha=\frac{2\alpha}{1-tg^2\alpha}$

以上公式中，用$tg\alpha$表示$\sin2\alpha$，$\cos2\alpha$，$tg2\alpha$的公式又叫万能公式。

3. 半角公式：

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

注意：(1)运用半角公式时，根号前面的正负号由$\frac{\alpha}{2}$的象限来确定；

(2)利用倒数关系可得到 $\text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$的公式。

4. 降幂公式：

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$$

这组公式就是二倍角公式的变形，但应用非常广泛，由左到右是降幂，而由右到左则是升幂。

5. 和积互化公式

(1)和差化积公式：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(2)积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

以上两组公式一般只从左到右边，公式比较复杂，注意两组公式的区别与联系，从系数，函数和角度三方面来记忆。

十一　三角函数的图象和性质

(一)正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数的图象

利用描点法画 $y=\sin x, y=\cos x, y=\text{tg}x, y=\text{ctg}x$ 的图象如下：

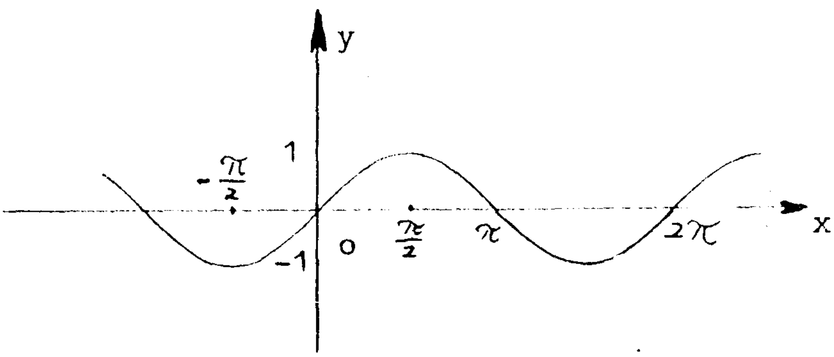

图 1—1

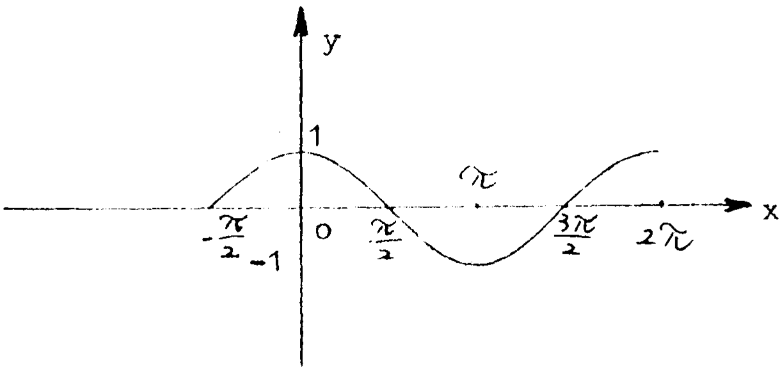

图 1—2

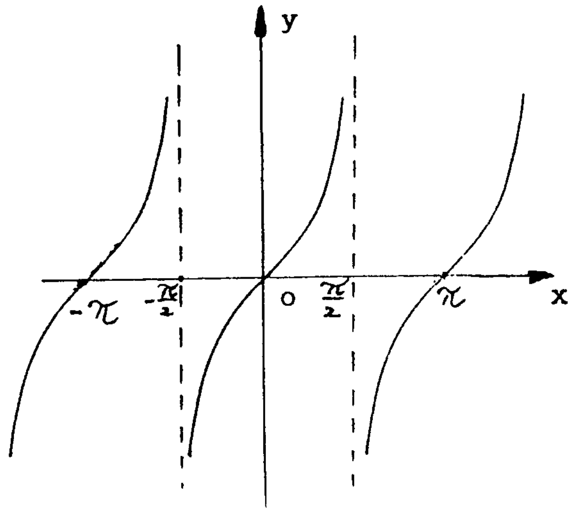

图1—3

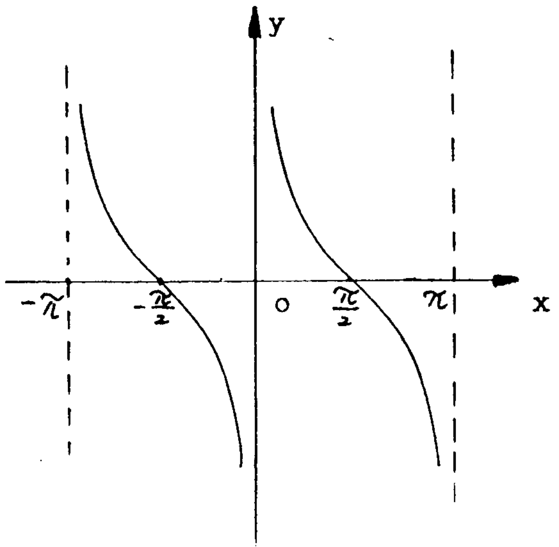

图1—4

(二)三角函数的性质

1. y=sinx 的性质

(1)定义域:$x\in R$

(2)值域:$y\in[-1,1]$,最大值为1,最小值为-1。

(3)函数为奇函数。

(4)单调性:单调递增区间为$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$

单调递减区间为$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$

$(K\in Z)$

(5)周期性:y=sinx 是以2π为最小正周期的周期函数。(以后说周期即指最小正周期)。

一般地,函数$y=A\sin(\omega x+\psi)$,$(A\neq0,\omega>0)$的周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$。

2. y=cosx 的性质:

(1)定义域:$x\in R$

(2)值域:$y\in[-1,1]$,最大值为1,最小值为-1,

(3)函数为偶函数。

(4)单调性:单调递增区间为$[2k\pi-\pi,2k\pi]$,单调递减区间为$[2k\pi,2k\pi+\pi]$

$(k\in Z)$

(5)周期性:y=cosx 为周期函数,$T=2\pi$

一般地,函数$y=A\cos(\omega x+\psi)$,$(A\neq0,\omega>0)$的周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}$

3. y=tgx 的性质

(1)定义域:$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(K\in Z)$

(2)值域:$y\in R$

(3)函数为奇函数。

(4)单调性:单调递增区间为$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ $(k\in Z)$

(5)周期性:y=tgx 为周期函数,周期$T=\pi$。

一般地,$y=A\mathrm{tg}(\omega x+\psi)(A\neq0,\omega\neq0)$的周期$T=\frac{\pi}{|\omega|}$。

4. y=ctgx 的性质

(1)定义域:$x\neq k\pi$ $(K\in Z)$

(2)值域:$y\in R$

(3)函数为奇函数。

(4)单调性:单调递减区间为$(k\pi,k\pi+\pi)$ $(k\in Z)$