

北京航空学院

科学报告会论文集

庆祝建校三十周年

第五分册 飞行器与力学类(上册)

1982.10

前 言

建校三十年来,我院科研工作遵循党的方针政策,密切结合教学,取得不少成果,在此基础上,总结出了一批有一定理论价值与实践意义的学术论文。

战斗在祖国各地的校友们,在为实现我国四个现代化这一伟大历史任务的过程中,同样做出了可喜的成绩,此次他们热情响应母校三十周年校庆征稿的号召,把自己多年来从事教学、科研与工程技术实际工作中所积累起来的宝贵经验,进行理论总结,书写成文,投寄我院。

为隆重纪念我院三十周年校庆日,加强院内外的学术交流与联系,我处特编辑这套校庆论文集。文集刊载本院与校友近期科研成果或技术总结的详细文摘。为节省篇幅,在编辑时将作者原列参考文献删去。

论文按专题分类出版:

1. 材料科学与工程类
2. 无线电电子学类
3. 自动控制类
4. 发动机类
5. 飞行器与力学类
6. 计算机类、管理工程类、情报学类
7. 制造工程类
8. 数理类
9. 机械设计类
10. 医疗类、体育类
11. 社会科学类
12. 大学生论文集

由于编辑出版力量有限,时间也较仓促,难免有遗漏和不妥之处,欢迎批评指正。

北京航空学院 科研处

1982年10月

第五分册 飞行器与力学类目录(上)

1. 圣维南原理和能量法
.....胡海昌 (1)
2. 苏联飞机发展简史
.....史超礼 (4)
3. 有限元求解的数值有效性
.....张永顺、施坤娣 (11)
4. 复合材料结构的承载能力和层压板厚度的选择
.....荣湘涛 (16)
5. 大型结构系统最优设计方法的发展
.....夏人伟 (21)
6. 连续杆战斗部类导弹的杀伤概率
.....李廷杰 (33)
7. 格斗导弹最优制导律
.....李忠应 (40)
8. 应用多目标数学规划确定地对空导弹的总体参数
.....汪家芸、白文林 (50)
9. 导弹纵向稳定性初步分析
.....周慧钟、郭振华、过崇伟 (57)
10. 关于二维位涡粘性修正问题的探讨
.....杨振声 (68)
11. 混合工质制冷机原理和设计计算
.....王浚、李敏、程尔玺 (74)
12. 生物动力学模型在飞机弹射救生中的应用
.....朱东明、孙长祝、徐扬禾 (85)
13. 飞机座舱热力学特性的数学模型及其应用
.....袁修干 (92)
14. 壳管式热交换器的数字计算方法
.....黄方谷 (100)
15. 人体温度控制系统的数学模型和计算机模拟
.....程安运、寿荣中、何慧嫻 (111)
16. 任意曲线、流面坐标系中的一般特征关系式
.....王宝兴 (121)
17. 尖头细长旋成体在无侧滑大迎角情况下的侧力特性和流动现象研究
.....王振羽、陈南茜、赵世诚 (130)
18. 逆压区湍流边界层观察的一些结果
.....连其祥 (137)

19. 轴对称物体(具不同底面倾斜角)尾迹的实验研究	夏雪前 (142)
20. 颅脑损伤的生物力学研究简介	马和中、王幼复 (145)
21. 光弹性薄贴片的研制	吴正熙 (152)
22. 关于广义变分原理形式的讨论	吴绍富 (157)
23. 复合型应变疲劳	汪懋骅 (161)
24. 从三维弹性力学理论到薄板的实用理论	陈岗、时国勤 (168)
25. 基于气动能量概念的机翼颤振主动抑制控制律	陈桂彬、邹丛青 (175)
26. 结构优化设计中的梯度二重投影法	张承熙、孙莹 (182)
27. 弹性结构稳定性分析的统一方法	张进、龚尧南 (188)
28. 用线性回归法处理实验数据的计算程序	徐以伟 (192)
29. 混合使用杂交应力模型和位移模型分析壳结构稳定性的非线性有限元法	龚尧南、张进 (198)
30. 部分正交一维升阶谱元素	诸德超 (205)
31. 任意曲线坐标中张量的物理分量	黄执中 (214)
32. 薄板 R 曲线的可靠性分析	刘文珽、高金华 (222)
33. 金属疲劳的微观分析	李寿同 (229)
34. 二维复合广义 J 积分	张行、方汝璿、吴绍富 (239)
35. 飞机疲劳寿命分散系数的理论分析	高镇同 (248)
36. 多发涡轮螺旋桨飞机非对称动力空中飞行品质计算中的若干问题	肖业伦、高仍清 (256)
37. 用特征变量分析综合多变量系统	张桂联 (264)
38. 投放重型货物时飞机运动特性的计算和模拟方法	胡兆丰、肖业伦 (272)

圣维南原理和能量法

北京航空学院兼职教授 胡海昌

自从上世纪末本世纪初瑞利和里兹先后提出变分问题的直接解法后,能量法获得了越来越广泛的应用。至五十年代,在结构力学中提出了有限单元法,能量法更获得了迅速的发展。现在不仅固体力学和流体力学,并且还有其它许多非力学的分支,也都广泛地使用有限单元法等多种形式的能量法。

七、八十年的经验表明,能量法确是一个很好的近似解法,对于本征值问题和平衡问题,效果尤其显著。能量法见效的根本原因何在,是一个值得重视的问题。

用能量法求本征值特别有效的原因已经清楚。结构力学中的本征值大多可以写成瑞利商的形式。在这种情况下,本征值本身就是一个能量泛函。因而近似的本征函数若有一阶小量的误差,那么相应的近似的本征值就只有二阶小量的误差。这就是能量法用于计算本征值特别有效的原因。

能量法用于解弹性力学平衡问题也十分有效,其中的原因现在还研究得不多。数学上已经搞清楚,用能量法解椭圆型算子的问题,比解抛物型、双曲线型算子的问题有效得多。而弹性力学平衡问题中的算子恰好都是椭圆型的。数学上的椭圆型算子,在力学上的本质是什么?这是力学工作者需回答的问题。我对这个问题有一个猜测,就是数学上的椭圆型与力学中的圣维南原理等价。如果对于某个力学问题圣维南原理适用,那么与此问题相应的数学算子必定是椭圆型的;反之,对于由椭圆型算子描述的物理问题,必有一个与圣维南原理相当的原理。要严格地证明或推翻上述论断可能是相当困难的。下面仅对圣维南原理与能量法的联系作一些简单的说明,并依此提出改进现有的有限单元法的两点设想。

先来考虑一个最简单的问题:两端简支的等剖面梁在均布载荷作用下的平衡问题。精确

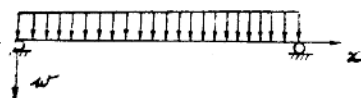


图 1

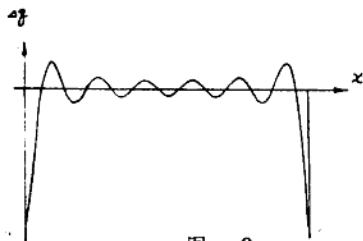


图 2

注:图2录自Carslaw, H. S., Introduction to the theory of Fourier series and integrals. 3rd ed. 1930. P. 299 Fig. 34



图 3

解 w 应满足下列方程和边界条件

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (1)$$

$$\text{在 } x=0 \text{ 及 } x=l \text{ 处: } w=0, \quad -\frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

现在先来用经典的里兹法求近似解。为此将挠度展开成有限项的正弦三角级数（为了便于把近似解与精确解区分开，在外文字母上加一横，以表示近似解）

$$\bar{w} = \sum_{n=1,3,\dots}^N a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3)$$

系数 a_n 由最小势能原理决定。其结果是熟知的，不用多说了。

对于均布载荷 q 来说， $\bar{w}$ 是近似解。但是 $\bar{w}$ 也可看作是某种载荷 $\bar{q}$ 作用下的精确解。这个 $\bar{q}$ 便是

$$\bar{q} = EJ \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} \quad (4)$$

这样，为了估计的误差，可以分析一下载荷残差

$$\Delta q = \bar{q} - q \quad (5)$$

的性质和作用。

当 $N=11$ 时，即级数（3）取6项时， Δq 的图形如图2所示，这是一条正负交替变化很快的曲线。当级数（3）再多取几项时， Δq 正负交替得还要快。这种现象是能量法所共有的。这类曲线有一个很重要的力学特点，这就是我们能够把梁适当地划分成若干小段，使得各小段内的 Δq 的合力和合力矩都很小，这样就可以把 Δq 表达成为

$$\Delta q = \Delta q_1 + \Delta \Delta q \quad (6)$$

式中 Δq_1 为与 Δq 同量级的残差，但在每一小段内 Δq_1 的合力和合力矩都等于零， $\Delta \Delta q$ 是比 Δq 小一个量级的残差（不妨叫残差的残差）， $\Delta \Delta q$ 在各小段内的合力和合力矩与 Δq 的同类量相等。上述特点导致近似解的效果是好的。例如我们来考虑跨度中心的弯矩 M_m ，此量的近似解为 $\bar{M}_m$ ，其误差为

$$\Delta M_m = \bar{M}_m - M_m \quad (7)$$

误差 ΔM_m 是载荷残差 Δq 的精确解。为了估计 ΔM_m 的大小，现在来分析 Δq_1 与 $\Delta \Delta q$ 的作用。由于 Δq_1 在每一小段内的合力和合力矩都等于零，所以根据圣维南原理，各小段内 Δq_1 的作用随此小段与中点距离的增加而迅速减小。这就是说， ΔM_m 的大小主要取决于附近的残差 Δq 和远距离处的残差的残差 $\Delta \Delta q$ 。这个现象不妨叫做近距主导原理。 Δq 本身就不很大，加之又主要取决于附近小范围内的 Δq ，误差 ΔM_m 是个小量就可想而知了。

如果用有限单元法解这个问题，上述力学本质就更明显一些。设想把梁分成若干个单元，取单元的分界点为结点。每结点赋予 w ， w' 两个参数，在单元内对挠度用三次多项式进行插入。这样我们仍可以求得一个近似解 $\bar{w}$ 。这个近似解仍可看作是某种载荷 $\bar{q}$ 的精确解。因此仍可计算载荷残差 Δq 。不过现在残差 Δq 的性质如图3所示，在整个梁上有反向均

有下列特点：只要把结点广义载荷适当地分配到相邻的有限单元，就能使作用在每个有限单元上的 Δq 合力和合力矩都等于零。因此上面根据圣维南原理导出的近距主导原理，在有限单元法中继续有效。

上面我们用载荷残差来估计近似解的误差，这与加权残差法有一定的共同之处。但加权残差法一般是以

$$\int_0^l (\Delta q)^2 dx$$

的大小来估计误差的，而我们是根据圣维南原理来估计误差的。这是两者在观点上的区别。按一般的加权残差法，图3所示的载荷残差不认为是一个小量。这将导致否认有限单元法是一种好的近似解法。而按照圣维南原理，图2、3所示的两种残差，都只引起细小的误差。这样本文从新的理论观点再一次肯定了有限单元法。

上面我们虽然只讨论了最简单的梁的问题，但其力学概念显然适用于其它的弹性力学问题，如二维的板壳问题和三维的弹性力学空间问题。这里我们不举出这些较复杂的问题的例子。讨论这些复杂问题不仅很费篇幅，并且很容易把力学概念淹没在繁长的数学运算之中。根据上面的分析，我们感到有可能对现在通用的有限单元法从下列两方面加以改进。

第一，如果在某问题中，我们不是要计算物体中所有各点的位移和应力，而只需要计算事先指定的若干个点上的位移和应力，那么根据上面说明的邻近载荷残差起主导作用的原理，在这些指定点附近的单元应取得小一点，或插入精度高一点，而远距离处的单元可取得大一点，或插入精度低一点。这样从表面上看来似乎各个单元的精度不相称，而从最终目标来看，这样的做法才是经济合理的。把远距离、近距离的单元的精度取得一样高，远距离单元的精度实际上是浪费掉了，并不能改善所需结果的精度。这种在不同距离处采用不同精度单元的办法，在有些问题中实际上已经在使用了。一个突出的例子是在计算裂纹端点的应力强度因子时，人们已经意识到应在端点附近取高精度的单元。现在我们可以更自觉地把这种做法推广到其它问题中去。

第二，圣维南原理在有限单元法中的反映，还可表达成为：近距离敏感、远距离不敏感的原理。这就是说，在近距离内载荷若有稍许变化，所需结果将受到明显影响，而在远距离处载荷的变化就不那么起作用了。根据这个现象，如果我们要计算某点的某个量（例如应力），最好不用微分的办法，而用某种远距离围线积分（二维问题）或面积分（三维问题）得到。这些积分可以叫做远场积分。为此先要对问题中指定的量找出一个等价的远场积分。是否在各种情况下都能找到这样的远场积分，尚有待于作进一步的研究。估计，找到的希望是很大的。一旦找到了这样的远场积分，好处是很多的。首先它只涉及到远场，对载荷残差不那么敏感。其次，从数学上看，微分运算常增加误差，而积分运算常减少误差。这一增一减，带来的好处可能不小。这种做法在断裂力学中也已积累了不少经验。为了求裂纹端点的应力强度因子，可以用 J 积分代替微分，其效果十分明显，获得了公认。自从 $J.R.Rice$ 提出 J 积分之后，有不少作者提出了多种类型的守恒积分。但从本文的观点看来，现有的各种守恒积分，应划分为两类。一类是只涉及远场的积分，如 J 积分，可称为远场守恒积分。另一类是近场远场都涉及到的积分。根据远距离不敏感的原理，远场积分，不论其是否属于守恒积分一类，都会给近似计算带来好处；而同时涉及近场的积分，即使它属于守恒积分一类，在近似计算中的效果就要比前者差些了。

苏联飞机发展简史

飞行器设计与应用力学系 史超礼

苏联飞机的发展，如从沙皇军官A.Φ.莫查伊斯基试制飞机算起，迄今已约有百年的历史，大致可分如下七个阶段：

一、从莫查伊斯基到十月革命（1882—1917）

1882年，57岁的莫查伊斯基（1825~1890），用他设计的蒸汽发动机的飞机，由助手驾驶，顺着斜置的木制跑道加速下滑离地，跳进了一段距离而下落。落地时机翼摔坏，不能再试，未达到实用的目的。在他死后试验中断，而湮没无闻，后继乏人。

1917年十月革命胜利后，苏联政府从沙皇俄国继承的是一份可怜的航空遗产——一些破旧的飞机和十五个“半手工业”式的航空工厂和作坊。沙皇时代虽有本国人设计的优秀飞机，但工厂却不愿制造，宁愿仿制。只是在1913到1914年间，波罗的海火车车厢厂，才制造过世界最早的四发动机重型飞机“俄罗斯勇士号”和“伊里亚·穆罗麦茨号”（图1），其设计者是后来移居美国的辛考斯基。后者在第一次世界大战时，成为当时唯一的四发重型轰炸机。

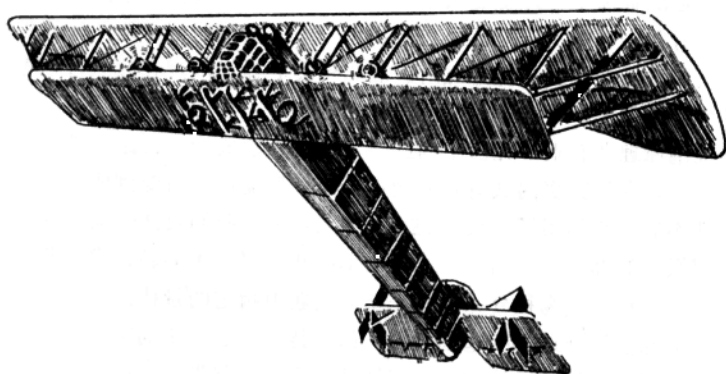


图1 辛考斯基设计的“伊里亚·穆罗麦茨”号四发重型飞机(1914)

大战爆发时，沙皇政府仅有250多架飞机，不得不发展本国的航空工业。除仿制外国飞机外，也制造过格里戈罗维奇设计的M—5和M—9水上飞机。十月革命前夕，沙皇空军仅留下破烂的飞机约一千余架。

二、苏联飞机的初創——恢复仿制和改造（1918—1927）

十月革命成功后，为了保卫新生的红色政权，苏联恢复了航空工业，并优先发展了空布载荷（ $-q$ ），而在结点上有集中力和集中力矩，后者正好是结点广义载荷。这个残差具

军。1918成立了工农红色空军管理局，和以儒考夫斯基为首的中央流体动力研究院。后者成为发展苏联航空科学技术的中心。

在航空的发展问题上，当时苏联面临着三个问题，即建设空军和修建新航空工厂；制造飞机并训练飞行人员；加强最薄弱环节的发动机制造。

解决这些问题的关键性措施之一，是在二十年代建立苏联的飞机设计和发动机设计局。最早的有图波列夫领导，以及波里卡尔波夫和格里戈罗维奇领导的两个飞机设计局。不久单翼轻型运动机 $AHT-1$ 和单翼旅客机 $AK-1$ 问世。

1923年和1924年波里卡尔波夫和格里戈罗维奇分别设计了歼击机 $H-1$ 和 $H-2$ 。图波列夫则于1925年设计了全金属侦察机 $AHT-3$ (又名 $P-3$) 和单翼双发重轰炸机 $AHT-4$ (又名 $TB-1$) (图2)。

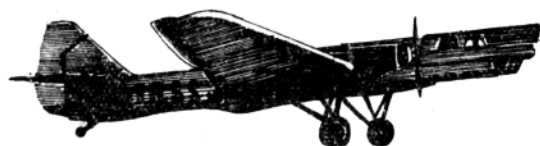


图2 $AHT-4$ ($TB-1$) 重轰炸机 (1925)

二十年代中期，苏联飞机在数量和质量上都取得了进展，由木布结构转为铝合金结构。其代表是图波列夫设计的全金属飞机 $AHT-2$ ，及其发展型 $AHT-3$ 和 $AHT-4$ 。

三、从仿制到独立设计——创造自己的飞机 (大约从1928—1935)

第一个五年计划前，苏联已停止仿制，而开始独立设计和制造本国的飞机。两个设计局作了分工。图波列夫以设计全金属多发动机的轰炸机和旅客机为主。波里卡尔波夫则专门设计轻型歼击机。1930年苏空军装备了波里卡尔波夫设计的 $H-3$ 歼击机和 $P-5$ 侦察机，以及图波列夫设计的轰炸机 $TB-1$ ($AHT-4$)。1928年到1929年开始了本国飞机和发动机的成批生产。

根据中央流体动力研究院研究和实践的结果，三十年代中期，苏联飞机的气动外形有了改进，如双翼机改为单翼机；起落架改为可收放式；采用了发动机整流罩等。此外，发动机功率和螺旋桨效率也都得到提高。这些都有助于改善飞机的性能，并促进苏联新型军用机 $H-15$ (图3)、 $H-16$ 和 CB 的出现。

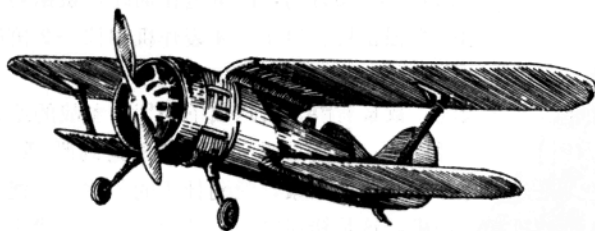


图3 $H-15$ 双翼歼击机 (1933)

四、二次世界大战前夕苏联飞机的更新

(大約从1936—1940)

二次世界大战前,苏联军用机在西班牙内战中,得到了初步的实战经验。当时参战的主力是歼击机И-15、И-16(波列卡尔波夫于1933到1934年设计)和СВ前线轰炸机(图波列夫设计)。军方认为单翼机И-16的水平机动性不好,但速度快,由它追上敌机,再由机动性较好的双翼机И-15予以歼灭。但这种战术被西班牙内战的实践所否定。因此1940苏联设计了高速单翼歼击机雅克-1、米格-1和拉格-3,使双翼机遭到彻底的淘汰。伊留申于1935年设计了远程轰炸机ДБ-3,经过改进后改名为伊尔-4。它于1941年首次轰炸柏林,大大鼓舞了苏军的士气。

苏联飞机所取得的成就,使领导者产生骄傲自满情绪。同时在战略上低估了轻型轰炸机、强击机(又名攻击机)和侦察机的作用。因此在第二次大战初期,不得不为此付出很大的代价。而且在西班牙内战时,早已尝到自满情绪造成的苦果。1936年苏联志愿军帮助西班牙共和政府与法西斯叛军作战,用的是И-15、И-16歼击机和СВ轰炸机。对阵者为叛军的德国和意大利法西斯援助的陈旧飞机,因而取得了胜利。这更助长了苏联领导者的骄傲心理,认为苏联歼击机不需要现代化。可是德国却在西班牙内战中,改进了自己的军用机,从而在战场上取得了优势。

当时苏联只重视歼击机的机动性,而忽视速度和火力。故1937年到1938年,苏联在这两方面都落后于德国同类的飞机。这就是二次大战前夕,苏联空军和航空工业所面临的局面。因此大战一开始,苏联就遭到巨大的损失。

1939年春苏联为改善上述不利情况,召开了两次与航空有关人员的会议,采取了必要的措施。在一年半到两年的时间內,新型歼击机、轰炸机和强击机的原型机研制成功,为成批生产奠定了基础。但这时德国已展开了对苏的全面进攻。

五、二次世界大战对苏联飞机的严峻考验

(1941—1945)

1941年6月,德国纳粹对苏联突然进袭前,苏联已开始研制新型军用机。拉格、米格和雅克等新型歼击机发展最快。1940年5、6月间,战争迫在眉睫,根据初步试验,就把这几种飞机投入生产。同时也为伊尔-2强击机、伊尔-4轰炸机和彼-2俯冲轰炸机的生产,作好准备。

然而由于新型飞机起步太晚,数量有限,所以战争初期,参战的绝大多数飞机性能不如德机如:И-15、И-16、СВ和ТБ-3等。这使苏联空军遭到严重损失,是苏联三十年代所犯错误导致的结果。那时苏军某些战术家,受到杜黑的轰炸机万能理论的影响,过份重视轰炸机而轻视强击机和强击机。这是错误之一。其次,三十年代末苏联只有两个大设计局,为数太少,又形成了设计垄断。最后,当时主要飞机工厂位于苏联西部,战争刚起就受

到了破坏，向东迁移又延误了新型军用机生产的时间。

为了纠正这些错误，苏联从1940年起，就设计和制造了拉格—3（拉伏奇金设计局）、米格—3（米高扬和古列维奇设计局）和雅克—1（雅可夫列夫设计局）等新型歼击机，以及伊尔—2（伊留申设计局）强击机。伊尔—2是1938设计的（图4）。该机及其改型伊尔—10强击机，在二次大战中重创德军，使之闻风丧胆。这两种强击机战时共生产41,000多架，产量占第一。此外苏联还生产了前线高速俯冲轰炸机彼—2（彼特利亚可夫设计局）、远程轰炸机伊尔—4（即ДБ—3的改型）和彼—8。



图4 伊尔—2强击机（1938）

苏联航空工业随着战争的进程而不断加强，产量和质量都日益提高。因此1943年斯大林格勒战役胜利后，发生了有利于苏军的转折。这时出现了新型歼击机拉—5、雅克—9和雅克—3，后者的最大平飞速度可达每小时700公里。1943苏联共生产各式军用机约35,000架，超过德国。飞机性能也赶上了德机。苏空军终于在1943年初夺回了制空权。1944年苏机年产约40,000架，产量达到最高峰。另外，大战期间，美国租借法案援助苏军的约14,000架飞机，对大战的胜利，也起了一定的作用。

六、苏联喷气飞机由引进外国技术到苏联化

（1946—1952）

二次世界大战后，由航空科学技术发展的趋势看，要进一步提高速度、突破“音障”，把活塞发动机螺旋桨式飞机，改进为涡轮发动机的喷气式飞机，是必然要走的道路。这也是苏联前进的方向。苏联过去曾用液体火箭喷气发动机，进行喷气飞机的研究。但未获成功，于是转向涡轮喷气发动机。战后首先拟定了喷气发动机的三阶段发展计划：

一、利用战时缴获的德国轴流式涡轮喷气发动机“约摩”—004（即Jumo—004，每台推力850公斤），和“BMW—003”（推力800公斤），来装备苏联设计的喷气飞机，作为过渡。二、仿制从英国引进的离心式涡轮喷气发动机“德温特”（Derwent，每台推力1,600公斤），和“尼恩”（Nene，推力2,200公斤）。三、各发动机设计局加强研究，在引进德英两国喷气技术的基础上，制定本国喷气发动机改进和发展的远景规划，其推力从3,000直到8,000公斤。

接着苏联在发展喷气飞机方面，也制定相似的计划：一、用俘获的德国喷气发动机来装备苏联自己的喷气飞机。于是出现了在1946年同一天试飞的米格—9和雅克—15歼击机（图5）。

* 以上及后面介绍的各种飞机的尺寸、性能数据及图形均见原文。因篇幅有限，此处从略。

前者装两台PД-20喷气发动机，即“BMW-003”。后者装一台PД-10，即“约摩”-004。二、用引进的英国“德温特”和“尼恩”（苏联编号分别为PД-500和PД-45）

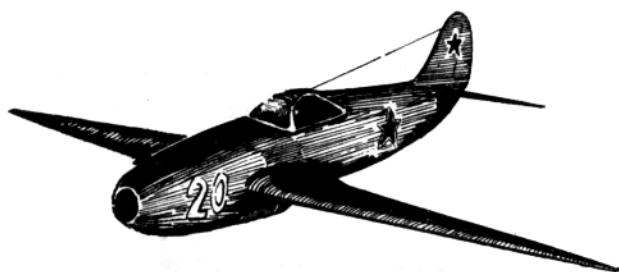


图5 雅克-15喷气歼击机（1946）

发动机，来装备苏联设计的喷气军用机，如装一台PД-45的米格-15喷气歼击机（图6）和装两台PД-45的伊尔-28轻型喷气轰炸机。米格-15于1947年6月2日第一次试飞，是苏联第一架后掠机翼（35度）的歼击机；在我国抗美援朝的战争中，创立了最早的喷气歼击机的空战技术，苏联共生产了16,500多架。三、苏联用本国设计和生产的喷气发动机，来装备本国设计的喷气飞机。其主要代表是超音速前线歼击机米格-19、拦截歼击机雅克-25及其发展型雅克-28，以及中程喷气轰炸机图-16。这几种飞机都是在1952年第一次飞行的。到五十年代中期都已大量生产，成为当时苏联空军的主力。

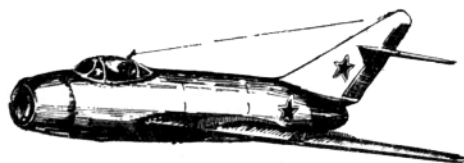


图6 米格-15后掠翼喷气歼击机（1947）

七、苏联喷气飞机在军用和民用方面

齐头并进（1953—现在）

经过上述发展的三阶段，苏联大致从1953~1954年起，开始用本国设计和制造的新型喷气发动机和飞机，来装备自己的空军和民航，并不断随时代而前进，以迄于今。

1. 苏联现代喷气军用机不断更新

五十年代末到1961年，米格-19、雅克-25、伊尔-28和图-16等已逐渐被更先进的飞机所代替。1967年苏联又有了垂直起落和变后掠机翼飞机的原型机，以及一系列新型喷气运输机。其中大多数目前还在部队中和民航线上使用。

在军用机中，有米格设计局的一系列喷气歼击机，如音速二倍的三角翼米格-21、变后掠机翼的米格-23、音速三倍的歼击/侦察机米格-25，由米格-23改型而来的强击机

米格—27,以及短距起落歼击机米格— x 。苏霍伊设计局从五十年代的强击轰炸机苏—7起,设计了不同型式的歼击机或强击机,如苏—9、苏—11、苏—15、苏—17/20和变后掠机翼的苏—19(图7)。



图7 苏—19重型歼击/强击机(“击剑者”号)

图波列夫设计局的轰炸机和电子侦察机有:图—20(又名图—95)、超音速的图—22和变后掠机翼的图—26(又名“逆火”),以及远程护航歼击机图—28。雅克设计局则有雅克—28拦截歼击机和雅克—36垂直起落强击机。后者与英国的“鹞”式飞机齐名。

近年来据报道苏联又研制了一批最新作战飞机,如歼击机米格—29(即米格—25最新的改型米格—25M)、双座变后掠机翼歼击机米格—31(雷曼K,即RamK)(图8)、苏霍伊式单座轻型歼击机“雷曼L”(RamL)(外形与美F—16相似),强击机苏—25(“雷曼J、RamJ”),以及超音速远程轰炸机图—30(图—26“逆火”式的改型)和图—160。此外还有H型亚音速海军轰炸机和“细咀瓶”— $\times$ 型歼击机等。

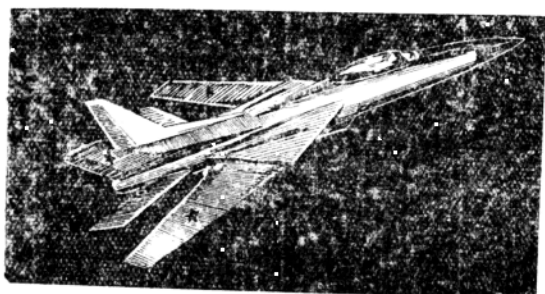


图8 双座变后掠机翼歼击机米格—31(RamK)

2. 苏联现代喷气运输机继续前进

苏联运输机包括客机、货机和军用运输机。苏联民航机开始较晚,长期处于落后状态。三十年代购买了美国DC—3客机的制造权,1938年进行了成批生产,并改名为“里2”(“里”代表主任工程师里苏诺夫),始有起色。但运输机问题的真正解决,却是在二次大战最紧张的年代。1943年苏空军完全掌握了制空权后,决定在生产军用机的同时,开始运输机的设计和制造。因而伊留申于1946和1950先后设计了伊尔—12和伊尔—14客机。二者均装有两台活塞发动机。不久装有四台涡轮螺旋桨发动机的客机伊尔—18也试制成功。后来又有了大型喷气民航机伊尔—62、较新的中程货机伊尔—76和七十年代后期设计的最新四发喷气民航机伊尔—86。

1954年图波列夫设计了苏联第一种喷气民航图—104(由图—16轰炸机改制而成)。他还设计了大型远程民航机图—114。六十年代末超音速客机图—144问世。喷气民航机图—124、图—134和七十年代新喷气客机图—154也都是图波列夫的产品。

安东诺夫设计局以设计小、中型运输机为主。从早期的安—2、安—10起，继之以安—24、安—12、安—14、安—26、安—28，一直到安—30、安—32和安—72等。安东诺夫创造了一系列涡轮螺旋桨发动机和活塞发动机的运输机，包括六十年代中期世界最大的运输机安—22。雅克设计局也设计了一些小，中型的民航机，如六十年代的轻型喷气客机雅克—40和七十年代的中型喷气客机雅克—42。

苏联除上述各种飞机外，还制造了多种直升机，以及运动机、教练机、水上飞机和轻型飞机，这里就不一一赘述了。

有限元求解的数值有效性

飞行器设计与应用力学系 张永顺 施坤梯

(一)

在有限元求解中，总是要关心它的数值有效性。所谓数值有效性也就是数值的精确度。它是由于在数字运算中产生的问题，不可能象解析解推演结果那样，通过实验来考核它的准确程度，因此必须由数字运算本身来估价解答的有效性。如果达不到足够的有效性，就要分析原因，采取对应的措施。

那么如何从运算本身来估价解答所得的数值有效性呢？目前流行的办法是用状态数，设有限元的位移平衡方程有：

$$K \cdot u = Q \quad (1)$$

式(1)中 K 为结构刚度矩阵， u 为待求的结构位移列阵， Q 为结构的外载荷列阵。依据许多资料得知，方程(1)的解的有效性（即它保留的有效位数）为

$$m = p - \log_{10} Cn \quad (2)$$

$$Cn = |\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}| \quad (3)$$

式中 p 为 K 矩阵各元素的共同的原始有效位数， Cn 为 K 矩阵的状态数，并由式(3)算得。该式中 $\lambda_{\max}$ 和 $\lambda_{\min}$ 分别是 K 矩阵的最大和最小特征值。

从式(2)中可以看到，所解 u 的有效位数 m ，取决于原有刚度矩阵 K 的有效位数 p ，也取决于刚度矩阵所具有的状态数 Cn ，即 K 矩阵的最大和最小的特征值。如果我们对位移 u 的解有一定的有效位数的要求，而且 K 矩阵原始数据的有效位数也有一定限量，那么状态数大到一定程度，就会使解得位移达不到预定的有效位数要求而失去意义。这样，我们就说这方程是一个病态方程，所以要确定一个具体的方程(1)是否是病态方程，首先要看 K 矩阵特征值情况，其次也要看算机存放原始 K 矩阵有效位数。

从式(2)中还可以看到，如果我们在解方程(1)时，存储和运算工具的数字有效位数是无限的，那么要使 m 数小于限止数值，则必须使 Cn 成为无限大数，也就是使 $\lambda_{\min}$ 为零值，否则 m 总是大于限止数。但是，当 $\lambda_{\min}$ 为零值时，方程(1)已成为奇异方程。所以在数学家的理想实数境界中，是不存在病态方程的现象，只有奇异方程与非奇异方程之分。当方程(1)求解过程中，存储及运算工具的数字有效位数只有给定有效位数时，方程的奇异与非奇异之间出现一种称之为几乎奇异的方程，也就是上面所说的病态方程，它使方程的求解失去意义。

在 $\log_{10} Cn$ 值的计算中，我们并没有考虑计算工具的舍入误差，仅仅讨论了由于数据的不可靠在线性系统的解中引起固有的不可靠。任何想得到比固有不可靠所保证的解更为准确的企图是徒劳的。

在 p 值的确定中, 仅仅考虑计算机数据在内存中具有有效位数是不够的, 还需考虑运算中舍入误差的累积效果, 用一等价办法加到原始数据误差中去, 使原始数据有效位数更加减少了。J·H wilkinson把它称为“始计”的方式。这样处理就认为计算过程再也没有舍入误差的问题。

在有限元求解中产生病态方程原因是多种多样的, 主要原因有:

- (①) 在离散化过程中元件划分不当, 相邻元件的刚度相差悬殊。
- (②) 在结点的某个自由度上, 因元素使用不当, 而缺乏必需的刚度。
- (③) 外载简化不当。
- (④) 求解程序的消元顺序不合适。

前三条都是指状态数 C_n 值变大造成了 m 数达不到要求, 最后一条是使 p 值减少造成 m 数达不到要求, 如果采用全主元消元过程, 则最后一条可被排除。

讨论到这里似乎问题已经解决, 只要算出方程(1)的状态数 C_n 就能判断这方程的求解结果的特性, 但是从工程实用来说, 要计算 K 矩阵最大和最小特征值是不易的。计算量是很大的, 从北航科研报告BH—B375介绍的办法看来, 也是不够理想的, 那是假设静力载荷作用下产生的位移, 都是与最小特征向量相接近才有了最小特征值简易计算的办法, 但是如果方程(1)的实际 m 数是一个零值, 或负值, 则要求得位移一位有效值都没有, 那么用那样假设来估算最小特征值可能是不合适的, 再一点用状态数办法仅给出了整个方程的求解特性, 是一个笼统的评价, 不够具体指出方程在消元过程中有效位数的损失过程, 指出相容方程或矛盾方程在那里, 以便进行相应的处理。所以本文在下面提出一种工程处理的办法。

(二)

北航科研报告BH—B474已经对两数在计算机上进行四则运算, 结果所产生的误差作了全面的讨论, 并且指出了两数在进行加减乘除运算之后, 所得和差积商中, 只有差的数值有可能发生显著的数位损失。同时还给出了数位损失的计算公式。在北航科研报告BH—B474中, 设 a 表示被加数或被减数, b 表示加数或减数, c 是 a, b 两数相加或相减而得结果, 同时还假定 a 的绝对值总处在大于 b 的绝对值的情况, 这样, 北航科研报告BH—B474就得出了运算结果的数位损失 L_a 的计算表达式, 即为

$$L_a = \log\left(\frac{|C|}{|a|}\right) - \log 2 \quad (4)$$

为了本文推导公式的方便, 将作如下的处理, 使其有一种新的表达形式。首先为了区别与上式(4)差异, 我们把 L_a 改写为 L , 其次上式(4)计算结果是用负值表示损失量, 以下是用正值表示损失量, 为此在式(4)前加了一负号。再其次计算公式也作如下的变动:

$$\begin{aligned} L &= -\left(\frac{\log |C|}{|a| - \log 2}\right) \\ &= \frac{1}{p} \log \left(\frac{|a|^{r+|b|}}{|C|^p} \cdot \frac{|a|^r}{|a|^{r+|b|}} \right) + \frac{1}{p} \log (2^p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p} \log \left(\frac{|a|^p + |b|^p}{|C|^p} \right) - \frac{1}{p} \log \left(\frac{|a|^p + |b|^p}{|a|^p} \right) \\
&\quad + \frac{1}{p} \log(2^p) \\
&= \frac{1}{p} \log \left(\frac{|a|^p + |b|^p}{|C|^p} \right) - \omega \\
\omega &= \frac{1}{p} \log \left(\left| \frac{1}{2} \right|^p + \left| \frac{1}{2} \frac{b}{a} \right|^p \right) \\
&= \frac{1}{p} \log \left(\left| \frac{1}{2} \right|^p + \left| \frac{1}{2} \eta \right|^p \right) \\
\eta &= \frac{b}{a} = 0 \sim 1, \text{ 则 } \omega = 0 \sim 0.30103
\end{aligned}$$

因此, 可以近似地把 ω 项略去, 得

$$L = \frac{1}{p} \log \left(\frac{|a|^p + |b|^p}{|C|^p} \right) \quad (5)$$

这计算公式(5)有一个优点, 就是计两数进行加减运算中, 无需判那一数的绝对值大, 并把大者当“ a ”, 因为式(5)中的分子部分, 是将要相加或相减的两数各自绝对值的 p 次方之和, 所以就不要去分出谁是 a , 谁是 b 。

把式(5)用于两向量和的范数数位损失是本文提出的一种工程办法。在式(5)中, $|a|$, $|b|$, $|c|$ 是三数的绝对值; c 是 a , b 两数的代数和。我们可以把 a 、 b 、 c 看成三个向量, $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$; $\vec{c}$ 向量是 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 两向量之和。并且把 $|a|^p$ 、 $|b|^p$ 、 $|c|^p$ 看成向量 a 、 b 、 c 的 p -范数的 p 次方, 即 $\|a\|^p$ 、 $\|b\|^p$ 、 $\|c\|^p$ 这样式(5)就可改写为

$$L = \frac{1}{p} \log \left(\frac{\|\vec{a}\|^p + \|\vec{b}\|^p}{\|\vec{c}\|^p} \right) \quad (6)$$

式(6)中的 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, 依据范数的基本特性, 一定有下列三角不等式。

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \quad (7)$$

所以 L 的数值一定是非负的, 最小为零, 这也符合实际, 数字运算结果不可能改善, 或减少原有的误差, 只可能扩大或增加。

现在我们把式(6)用于确定刚度矩阵 K 的各行在高斯消元变换中行向量范数的数位损失, 并以此代表该行向量的各分量的数位损失, 为此把式(1)中的 K 矩阵, 右端的 Q 矩阵表达为: