普通高等学校规划教材

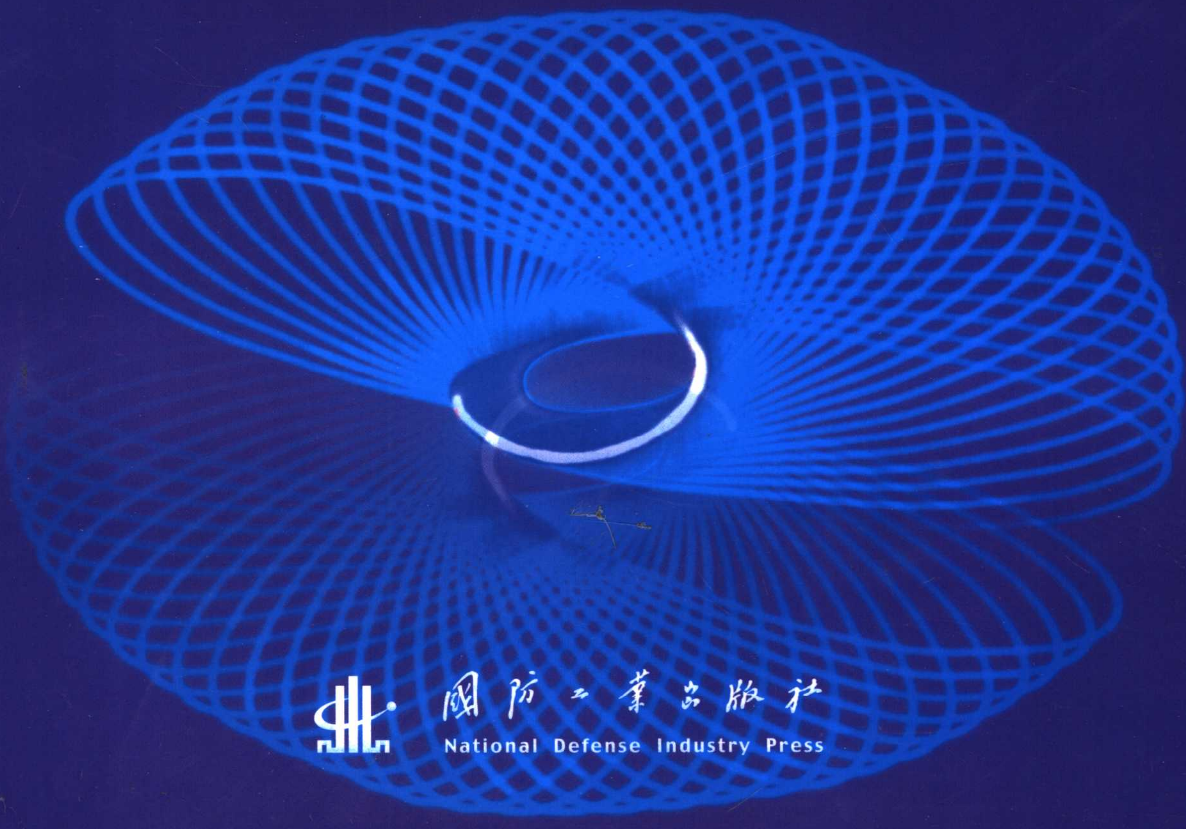
高等数学（上）

主编　许洪范

Ω

π　%

≤



国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等学校规划教材

高等数学

上册

主　编　许洪范
副主编　杜跃鹏　宋苏罗　于育民
　　　　郭学军　马　戈

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书是教育科学"十五"国家规划课题研究成果，是根据高校工科高等数学课程教学基本要求的精神并结合普通院校的教学实际编写而成的.

全书分上、下两册.上册包括函数极限、一元函数微积分和微分方程，下册包括空间解析几何、多元函数微积分、级数和Matlab软件在微积分中应用.书中概念和定理多有几何解释与物理原型，全书理论完整且浅显简明，兼顾知识的系统性和实用性，对于不同层次的学生都具有可读性.

本书作为应用型本科院校理工类专业的高等数学教材，也适用于师范院校的非数学理科专业.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下)/许洪范主编.—北京：国防工业出版社，2005.8

ISBN 7-118-03996-9

Ⅰ.高… Ⅱ.许… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第068437号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 13¼ 298千字

2005年8月第1版 2005年8月北京第1次印刷

印数：1—5000册 总定价：37.00元 上册 18.00元 下册 19.00元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　　言

本书作为教育科学"十五"国家规划课题的研究成果，是普通本科院校理工类专业的高等数学教材，也适用于师范院校的非数学理科专业. 本书主要介绍一元函数微积分、常微分方程、空间解析几何、多元函数微积分和级数等基本内容.

高等数学是关于运动和变化的数学，它倾注了几代数学巨匠的心血，是人类智慧的伟大成就. 就其中具体内容而言，极限的基本原理、微分中值定理、牛顿-莱布尼茨公式以及微分方程和级数的内容都是经典数学理论；"ε-δ"形式极限定义、函数变化率$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$等基本知识引导读者感悟有限和无穷的关联，完成初等数学到高等数学的跨越；微元法用简明的形式取代"分割、代替、做和、取极限"这一精细的数学过程，它是定积分思想的极好注解；级数理论体现传统的无限求和理论与现代函数逼近思想，从特殊到一般，张弛有度；微积分的发现始于对几何学、物理学的研究；解析几何部分是空间形态对应数量关系的桥梁；曲线积分和曲面积分有着明确的物理原型；微分方程的知识则几乎应用于自然科学和社会科学的所有领域. 总之，高等数学的内容和思想方法是理工类各专业学习的重要基础.

另一方面，学习高等数学的意义还在于培养学生缜密的逻辑思维能力、科学的创新精神和严谨务实的专业态度. 高等数学的原理和方法将被自觉不自觉地运用于专业课程的学习，这是任何其它课程所难以替代的. 无须回答学习微积分能够解决哪些具体问题，不妨反问：现代科学或技术的哪一个学科与高等数学无关？

随着科学技术的进步和数学自身的发展，公共数学课程的内容结构和教学目标也在不断地进行相应的调整. 特别是计算技术的惊人进步和计算机的迅速普及，使很多数学工作者的不定积分等方面的精湛运算技能相形见绌. 高等数学的教学应该兼顾计算技术的进步，也要充分利用现代教学媒体，以便让数学理论更精辟、运算更简明、应用更方便. 把繁琐的计算交给计算机，可以为学生留下更多思考和创新的时空.

现阶段，我国高等教育的重心正经历着从精英教育向大众化教育转移的过程，培养高素质、多层次应用型人才已成为现实的课题. 2001 年 11 月，全国高等学校教学研究中心启动"21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"课题，有数十所院校参加了研究工作. 此项目的研究本着"厚基础、宽口径"和注重实际应用的基本原则，积极稳妥地推进着数学教学内容和教学方法的改革. 在此书编写过程中，我们针对培养高层次复合应用型人才的需要和理工类本科教育的一般要求，注重了知识的系统性、思想性与通用性，精减了理论证明过程，适当地侧重了基础运算和数学模型观念的建立.

本书注重引入概念的数量和精确性，各知识点新概念的引入力求清晰简明. 例如，函数的各类极限、连续、微分、各种积分和级数等重要概念在章节的开始以定义形式明确地

给出；曲线的单调与光滑、切线和面积等概念一般对照几何模型作描述性定义并以黑体字体现，避免过多引入次要的概念；在给出基本概念时，适当做了几何解释或者介绍其物理原型，以加强对概念的理解.

书中的主要概念与定理、性质和运算法则共同构成各部分的知识系统.高等数学中有一些重要定理，例如柯西收敛准则、单调有界原理、闭区间上连续函数性质以及微分和积分中几个重要定理，反映了最基本的数学规律，但难于在本书中完整证明.对这些定理本书明确给出结论，并直观解释其原理或进行部分证明.书中更多的定理和推论一般根据基本概念和已有的定理便可证明，这些定理的证明虽然演绎着高等数学的基本思想和原理，但为了适应本书的既定任务，书中仍然尽量控制定理的数量和难度.各种运算的主要性质是运算和应用的依据，书中逐一给出并做了简单的证明或说明，在表述形式和次序方面进行了有利于比照的编排.高等数学中几乎所有的运算都具有线性的特征，各类积分关于积分区域可加，证明过程强调基本原理而不过分追求叙述的完整性.

众所周知，只有被确信正确的知识才容易被接受.书中对基本初等函数的导数、各种基本运算的法则都做了比较完整的推导和证明.其实，这些证明并不超出学生的接受水平.对极限的“ε-δ”形式证明和不定积分法，细致介绍其基本原理和方法但不作过多的训练.为回避偏难的问题，书中明显减少了不定积分的篇幅.

作为运算训练的补充，在书末的第十四章介绍了 Matlab 在微积分中的应用.Matlab 程序功能强大，它不但可以在一定程度上替代繁杂的手工运算，而且在科学研究和工程技术等方面应用广泛，越来越受到科技工作者和高校教师的青睐.更值得一提的是 Matlab 入门简单，运行界面有利于操作，建议读者在学习本书的过程中随时阅读第十四章的部分内容，相信多数学生初步掌握 Matlab 并不存在太大的困难.而那些特定题目的计算机实验对理解高等数学的概念和方法是非常有利的.

书中例题和习题的编排主要针对基础知识和基本的运算能力，兼顾了不同的知识点和不同的难度水平，注意减少了需要特殊技巧才能解决的例题和习题.

本书由许洪范主编，并承担第 1 章至第 4 章的编写和全书的统稿工作；杜跃鹏编写第 9 章、第 14 章；宋书罗编写第 7 章、第 10 章；于育民编写第 5 章、第 11 章；郭学军编写第 8 章、第 12 章；马戈编写第 6 章、第 13 章.全书理论叙述完整、简明，注重从应用问题引入概念，对于不同层次的学生都具有可读性.

高等数学课程一般安排在第一、第二学期进行，在内容顺序安排上适当考虑了专业课教学的实际需要.全书教学大约需要 180 学时.

全国高教研究中心的领导、国防工业出版社为本书的编撰与出版提供了热情的支持和有力的帮助，天津大学的齐植兰教授审阅了全部书稿并提出了很好的建议，在此一并表示感谢.书中疏漏和不妥之处，欢迎读者指正.

编　者

2005 年 3 月

目　　录

第 1 章　函　数

函数是运用数学方法来描述现实世界的基本工具. 从温度变化到质点位移，从商业运作到生物增长，它们的变化规律都可以借助于函数来研究. 本书很多概念是通过研究几何或物理的实际问题而引入的，其中一些最重要的基础理论则是直接建立在函数概念基础之上. 为了方便后面的学习，有必要简单叙述一下实数的基本知识和在中学已学习过的函数的相关知识.

1.1　函数的基本概念

1.1.1　实数集

在算术中，熟悉了自然数(即正整数和零)和分数，以后接触到负整数、负分数，所有这些数，统称为有理数.

有理数的一般表示形式为$\frac{p}{q}$，其中 p 与 q 都是整数，$q \neq 0$ 且 p 与 q 互质. 有理数也可以写成小数的形式，结果一定是有限多位小数或者是无限循环小数. 对任意两个有理数作加、减、乘、除(0 不为除数) 运算，得到的结果还是一个有理数.

无理数在中学数学中已遇到过，如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\lg 5$、$\sin 10°$、π 等等. 无理数是无限不循环小数.

一切有理数及无理数统称为实数.

大家已经熟悉把实数标记在数轴上. 取一直线 Ox(图 1-1)，指定向右的方向为正向，取一线段$\overline{OU}$ 作为单位长度，并取定原点 O，那么任一实数都可以用数轴上的点来表示.

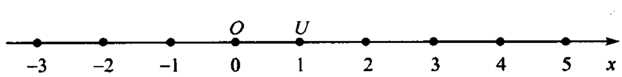


图 1-1

实数和数轴上的点是一一对应的. 这就是说，数轴上的每一个点都表示某一个实数；反过来，每一个实数都是数轴上某个点的坐标.

除了实数外，还有虚数. 称 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 为虚数单位，形如 $a + b\mathrm{i}$ 的数称为复数，其中 a、b 为实数. 复数是实数的重要扩充，不过在本书中，除非特别声明，涉及到的数都是实数.

今后常常要谈到由若干有限个或者无限多个实数组成的总体，称为实数的集合，简称数集. 一般用大写字母 A、B、C、… 来表示实数的集合. 所有非负整数构成的集合称为自然

数集，常用大写字母 **N** 来表示；所有整数的集合称为整数集，用 Z 表示整数集. 此外，一般用 **Q** 表示全体有理数组成的集合，称为有理数集；用 **R** 表示全体实数组成的集合，称为实数集.

由无限多个数组成的数集称为无限数集. 例如，**Z**、**Q**、**R** 以及集合

$$B = \{2,4,6,\cdots\}$$

等都是无限数集.

只由有限多个数组成的数集称为有限数集. 例如只由 1,2,3,4 组成的数集记为

$$A = \{1,2,3,4\}.$$

A 是有限数集.

数集中可以不包含任何元素(数)，称这样的数集为空集，记为$\varnothing$.

数集 A 中的数称为 A 的元素. 如果数 x 是 A 的元素，称 x 属于 A，记为 $x \in A$. 如果 x 不是 A 的元素，就称 x 不属于 A，记为 $x \notin A$.

例如：$3 \in \mathbf{Z}, -\sqrt{2} \in \mathbf{R}, \mathrm{i} \notin \mathbf{R}$.

设 A 与 B 都是数集，如果 A 中的所有元素也都是 B 的元素，称数集 A 为 B 的子集，也称 A 含于 B 或称 B 包含 A，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

如果既有 $A \supset B$ 又有 $B \supset A$，则认为集合 A 与集合 B 为同一个集合，也称集合 A 与集合 B 相等. 记为 $A = B$.

由数集 A 与数集 B 的所有元素构成的数集 C 称为数集 A 与数集 B 的并集，记为 $C = A \cup B$；由既属于数集 A 又属于数集 B 的所有元素构成的数集 D 称为数集 A 与数集 B 的交集，记为 $D = A \cap B$.

在以后某些问题的讨论过程中，常常限定在实数集 **R** 的某个子集 A 内. 如果 A 中的所有元素(数) 刚好是介于某两个实数 a 和 $b(a < b)$ 之间的所有实数，也称数集 A 为一个区间.

满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的全体(数集) 称为开区间，记为(a,b).

满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 的全体称为闭区间，记为$[a,b]$.

满足不等式 $a < x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x < b$ 的全体实数称为半开区间，分别记为$(a,b]$ 和$[a,b)$.

从数轴上看，上面的几种区间是介于 a、b 两点之间的一条线段，a 和 b 是线段的端点，分别称为区间的左端点和右端点，区间上其余的点称为区间的内点，称两数差 $b-a$ 为区间的长度.

以后在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点时就简单地说“区间”. 区间还可以用一个大写字母(例如 I) 来表示.

除了上面的区间(通常称为有限区间) 外，还有所谓无穷区间. 下面给出无穷区间的记号：

$(-\infty, +\infty)$ 表示所有实数的全体，其含义与 **R** 相同；$(a, +\infty)$ 表示大于 a 的实数的全体；$(-\infty, a)$ 表示小于 a 的实数的全体.

$[a, +\infty)$ 与$(-\infty, a]$ 具有类似的含义.

应该注意，上面使用的符号“$-\infty$”、“$+\infty$”并不是实数集中具体的数，分别读作“负无穷大”、“正无穷大”.

有时也用不等式

$$-\infty < x < +\infty,\ a < x < +\infty$$

等来表示区间.

显然,任何区间都是 $\mathbf{R}$ 的子集,且是含有 $\mathbf{R}$ 的无限多个元素的所谓无限子集.

1.1.2 绝对值、邻域

1. 绝对值

实数 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

$|x|$ 的几何意义是在数轴上表示 x 的点到原点的距离. 根据绝对值的定义,应该有

$$|a| = \sqrt{a^2} \text{ 和 } -|a| \leqslant a \leqslant |a|.$$

当 $a > 0$ 时,关系式 $|x| < a$ 与 $-a < x < a$ 是等价的. 也就是说,如果 $|x| < a$,则有 $-a < x < a$;反之,如果已知 $-a < x < a$,也有 $|x| < a$ 成立.

同样,当 $a > 0$ 时,关系式 $|x| \leqslant a$ 与 $-a \leqslant x \leqslant a$ 也是等价的.

实数的绝对值还具有以下性质:

(1) 两个数和的绝对值不大于其绝对值的和,即

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \tag{1-1}$$

式(1-1) 被称为三角不等式;

(2) 两个数差的绝对值不小于绝对值的差,即

$$|x-y| \geqslant |x| - |y|; \tag{1-2}$$

(3) 两个数乘积的绝对值等于绝对值的乘积,即

$$|xy| = |x||y|; \tag{1-3}$$

(4) 两数商的绝对值等于绝对值的商,即当 $y \neq 0$ 时,有

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}. \tag{1-4}$$

2. 算术平均值 — 几何平均值不等式

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为非负实数,则它们的几何平均值不超过其算术平均值,即

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \tag{1-5}$$

3. 邻域

设 a 与 δ 为实数,且 $\delta > 0$. 满足不等式

$$|x-a| < \delta \tag{1-6}$$

的一切实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$ 或 $U(a)$. 其中 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径. 式(1-6) 与不等式

$$-\delta < x - a < \delta \text{ 和 } a - \delta < x < a + \delta \tag{1-7}$$

都是等价的.

由于满足不等式(1-7) 的实数 x 构成了区间 $(a-\delta, a+\delta)$(图 1-2),所以点 a 的 δ 邻域也就是以点 a 为中心、区间长度为 2δ 的开区间.

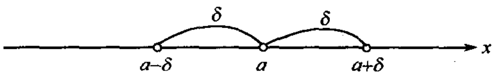


图 1-2

如果用集合的记号表示点 a 的 δ 邻域,应有

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

此外,还把集合$\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$称为点 a 的去心 δ 邻域. 记为

$$U^0(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\},$$

或简记为 $U^0(a)$. 点 a 的去心 δ 邻域包括开区间$(a-\delta,a)$ 与$(a,a+\delta)$ 的所有点.

1.1.3 函数的定义

在研究某些问题的过程中,会遇到各种不同的量,例如长度、面积、体积、重量、温度、压力、时间、速度等等. 在某一特定的情况下,有些量始终保持着同一数值,这种量称为常量;但有的量是变化的,也就是说可以取不同的数值,这种量称为变量.

例如,一个质点(物体) 在真空中自由下落,根据物理学的知识,下落的路程

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中:g 是重力加速度,是常量;而时间 t 和路程 s 可以取不同的数值,是变量.

应该注意,一个量是常量还是变量,并不是绝对一成不变的. 同一个量在某种条件下是常量,在另一条件下也可能是变量. 比如重力加速度 g 一般认为是常量,但是如果在地球的赤道和两极之间变换位置,严格地说,g 就不再是常量,而是变量了.

常量通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示;变量多用 $x,y,z,\cdots$ 来表示.

在数学中侧重研究的是量的数值表现,而舍去量的其它属性. 上述字母表示的实际上只是量的数值,所以常量也称常数,变量也称变数. 常数在数轴上对应一个固定的点,变量表现在数轴上对应可以取不同位置的点,也称为动点.

在研究某一问题的过程中,往往不只有一个变量. 而各个变量之间也不是彼此孤立的,它们相互联系、相互制约着. 为了研究变量之间互相制约的规律,引入函数的定义.

定义 1.1.1 设在同一问题的研究过程中有两个变量 x 和 y. 如果对于变量 x 在它的变化范围内所取的每一个值,变量 y 都有确定的值与之对应,就称变量 y 为变量 x 的函数,记为

$$y=f(x).$$

这里,变量 x 称为函数的自变量,变量 y 也称为因变量.

自变量的变化范围称为函数的定义域,因变量的变化范围称为函数的值域.

"y 是 x 的函数" 这个事实被表示为

$$y=f(x),x\in D.$$

如果同时考虑 x 的几个函数(不同的函数关系),在括号前应分别使用不同的字母. 例如,可以记

$$y=f(x)=x^2+1,y=g(x)=\sin x$$

等.

当自变量取定某个值 $x=a$ 时，函数 $f(x)$ 的对应值叫做 $f(x)$ 在 $x=a$ 的函数值，记作 $f(a)$.

例 1.1.1 真空中的自由落体运动，下落时间 t 和下落路程 s 是两个相互联系的变量. 如果物体距地面的初始高度为 h，对任意时刻

$$t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right],$$

对应一个路程 s，它们的函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right].$$

这个函数的定义域为 $\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$，值域为 $[0,h]$.

例 1.1.2 某地某日的气温 T 是时间 t 的函数 $T=f(t)$. 对于 t 的每一个值，从气温记录仪输出的气温曲线上可以读出温度 T 的对应值(图 1-3).

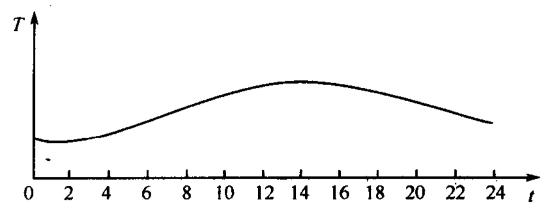


图 1-3

如果把气温记录仪放在恒温的室内，则总有 $T=T_0$. 它仍然是时间 t 的函数，因为对于每个确定的时间值 $t_0\in[0,24]$，仍然恰有某个温度值 T_0 与之对应. 因此，常量总可以看成是某自变量的函数，即所谓常函数.

通常情况下，一个函数 $y=f(x)$ 可以用坐标平面 Oxy 内的一条曲线来表示. 如果当自变量 $x=x_0$ 时，对应的函数值为 $f(x_0)$，在直角坐标系 Oxy 中描出点 $(x_0, f(x_0))$，当 x 取遍定义域中的所有数值时，对应直角坐标系 Oxy 中的点便构成一条曲线 c(图 1-4). 称这条曲线 c 为函数 $y=f(x)$ 的图像. 也称曲线 c 为曲线 $y=f(x)$.

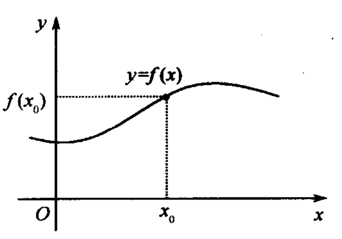


图 1-4

变量之间的函数关系，有时可以用数学式子来表示(如例 1.1.1)，有时则用图像的方式来表示(如例 1.1.2). 用数学式子表示函数关系的方法称为解析法，用图像来表示函数关系的方法称为图像法.

有很多函数，函数关系既可以用解析法来表示，也可以用图像法来表示. 这时，表示函数关系的解析式和图像(曲线)，是以不同的方式反映着同一个对应关系的. 两种方式各有所长，解析式便于在数量上精确计算函数值，图像则有助于直观上观察函数的某些特征. 在以后的学习过程中，有些函数虽然已经有了形如 $y=f(x)$ 的明确解析表达式，常常还要大致描绘出函数的图像来，这有助于加深对函数的直观认识.

用解析法表示函数关系时，应该同时标明函数的定义域. 如例 1.1.1. 我们约定，凡是

给出函数表达式 $y=f(x)$ 而未标明定义域的情形，就认为自变量 x 可以取使函数表达式有意义的任何值，或者说是能使该表达式有意义的自变量 x 可取值的最大集合. 此时，也说函数具有自然定义域.

例 1.1.3 试指出下列函数的定义域(自然定义域)：

(1) $y=\sqrt{9-x}$； (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$；

(3) $y=\arcsin(x-2)$.

解 (1) 应有 $9-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 9$，故函数的定义域为 $(-\infty,9]$；

(2) 解不等式 $x^2-x-2>0$ 即 $(x-2)(x+1)>0$，可知函数定义域为 $x>2$ 或 $x<-1$，也可以表示为

$$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$$

(称为两个区间的并集)；

(3) 解不等式

$$|x-2|\leqslant 1，即\quad -1\leqslant x-2\leqslant 1,$$

得

$$1\leqslant x\leqslant 3,$$

函数的定义域为 $[1,3]$.

有一种特殊的函数称为数列，它的表示形式为

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

这类函数的定义域为自然数集. 当自变量 n 依次取 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 时，相应的函数值按自变量取值从小到大的顺序排列出来就得到了数列. 数列还可以表示为

$$x_n=f(n)\quad(n=1,2,\cdots).$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 依次称为数列的第 1 项，第 2 项，…，第 n 项. 这里，具有一般意义的第 n 项 x_n 称为数列的通项或一般项. 数列是用列表的方式表述它的通项 x_n 与序数 n 的函数关系. 数列还可以用函数值的集合 $\{x_n\}$ 来表示.

例如，数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$$

所表示的函数关系为 $x_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$， $n=1,2,\cdots$；这个数列可以记成 $\left\{\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$.

习题 1-1

1. 指出满足下列不等式的 x 所在区间：

(1) $|x|\leqslant 3$； (2) $|x-1|<1$；

(3) $|x|>5$； (4) $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|\geqslant\dfrac{1}{2}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$； (2) $y=\arcsin\sqrt{2x}$；

(3) $y=\frac{1}{1+x^2}$；　　(4) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$；

(5) $y=x^3+\sqrt{x-1}-\frac{\ln(x-2)}{(x-4)^2}$.

3. 下列函数是否为同一函数?为什么?

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$ 与 $\varphi(x)=1$；

(2) $f(x)=2\ln x$ 与 $\varphi(x)=\ln x^2$；

(3) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ 与 $\varphi(x)=x-3$；

(4) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $\varphi(x)=|x|$.

4. 设 $f(x)=x^3-4x+20$,求 $f(1)$,$f(t+1)$.

5. 已知数列的一般项(通项)为 $x_n=\frac{1}{2n+1}$ 写出数列的前 5 项.

6. 解下列不等式：

(1) $|x-5|<8$；　　(2) $|2x+4|\geqslant 10$；

(3) $|x|>|x+1|$；　　(4) $|x+1|+|x-1|\leqslant 4$.

7. 证明下列不等式：

(1) 当 $|x+1|<\frac{1}{2}$ 时,$|x-2|<\frac{7}{2}$；

(2) 当 $|x-1|\leqslant 1$ 时,$|x^2-1|\leqslant 3|x-1|$.

1.2 初等函数

1.2.1 复合函数

如果在某个研究问题的过程中有三个变量 x,u 和 y,其中 y 和 x 之间的关系通过变量 u 而联系着. 即 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,如果函数 $y=f(u)$ 定义域与函数 $u=\varphi(x)$ 值域的交集不是空集,就称 y 是 x 的复合函数,记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

其中 u 称为中间变量.

例 1.2.1 有一质量为 m 的物体作直线运动. 设速度为 v,那么它的动能 E 是速度 v 的函数：

$$E=f(v)=\frac{1}{2}mv^2.$$

如果这个物体是自由落体,则其速度 v 又是时间 t 的函数：

$$v=\varphi(t)=gt.$$

通过中间变量 v,动能 E 与时间 t 之间有函数关系

$$E=f(v)=f[\varphi(t)]=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mg^2t^2.$$

因此,称动能 E 是时间 t 的复合函数.