

高等学校教学参考书

# 紊流力学

上册

窦国仁

-43

4

人民教育出版社

52.74  
01  
:1

高等学校教学参考书

# 力学流紊

上册

窦国仁

人民教育出版社

高等学校教学参考书

**紊 流 力 学**

上 册

突 国 仁

\*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北香河印刷厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 9.875 字数 237,000

1981年11月第1版 1983年4月第2次印刷

印数 4,501—8,050

书号 15012·0376 定价 1.05 元

# 前 言

在自然界广泛出现的流体运动,几乎都属于紊流的范畴,而许多科学技术领域,如水利、水运、水电、气象、航空、机械、化工、环保等,都与紊流有直接或间接关系。因之对紊流问题的研究和解决,有助于一系列科学技术的发展;普及和提高紊流力学基础知识,也有助于科技队伍新生力量的成长。

近些年来,国内外对紊流的研究都很重视,取得了不少重要成果。针对水利、水运、水电工程中经常遇到的一些紊流运动,作者曾提出了紊流的随机理论。本书试图系统地阐述紊流的基本理论以及这些理论在解决各种紊流问题中的应用。

本书分上下两册,共十六章。前八章为上册,用以阐述紊流的基本概念、方程式和各种理论,其中包括紊动产生的不稳定理论,紊流的统计理论和各向同性紊动,紊流的半经验理论和作者提出的紊流随机理论。在上册中还有一章(第二章)用以介绍层流运动的主要规律。这一章虽然不属于紊流范畴,但在下册中讨论各种紊流运动时要用到这些基础知识。对这一章的了解和掌握将有助于学习下册中的有关章节。后八章为下册,用以阐述各种紊流运动规律,其中包括明渠和管道紊流、边界层紊流、分离流、自由紊流、紊动扩散、分层流、双相流和减阻流等。在讨论这些紊流运动时,除了前人研究成果外,还着重说明了应用紊流随机理论所取得的进展。

本书上下册均附有专业名词中文、英文、俄文对照,可供查阅。上册还附有“常用张量基础知识”,供不熟悉张量的读者阅读本书时参考。

本书可供工科高等院校水利专业和其它有关专业研究生、高年级大学生和科技工作者学习参考。为了便于自学,文字力求写得通俗易懂,对一些数学处理均给予了比较详细的推导过程。

作 者

1980年10月于南京

# 目 录

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 第一章 绪论 .....                    | 1   |
| § 1.1 紊流问题 .....                | 1   |
| § 1.2 流体的粘滞性和压缩性 .....          | 3   |
| § 1.3 流速和压强的脉动 .....            | 8   |
| § 1.4 坐标系、符号和平均值 .....          | 10  |
| § 1.5 脉动流速的测量方法 .....           | 12  |
| 参考文献 .....                      | 18  |
| 第二章 粘性不可压缩流体的运动 .....           | 20  |
| § 2.1 粘性不可压缩流体微分方程式 .....       | 20  |
| § 2.2 简单二元平行流 .....             | 25  |
| § 2.3 雷诺数和相似判数 .....            | 31  |
| § 2.4 小雷诺数时的球体阻力(斯托克斯近似解) ..... | 34  |
| § 2.5 小雷诺数时的球体阻力(奥辛近似解) .....   | 40  |
| § 2.6 大雷诺数时的流动(边界层) .....       | 52  |
| § 2.7 平板上的边界层 .....             | 63  |
| 参考文献 .....                      | 70  |
| 第三章 紊动的产生 .....                 | 72  |
| § 3.1 层流向紊流的过渡 .....            | 72  |
| § 3.2 不稳定性理论的基础 .....           | 78  |
| § 3.3 无粘性流体平行流的不稳定性 .....       | 85  |
| § 3.4 粘性流体二元平行流的不稳定性 .....      | 89  |
| 参考文献 .....                      | 97  |
| 第四章 紊流微分方程式 .....               | 99  |
| § 4.1 紊流运动方程式 .....             | 99  |
| § 4.2 圆柱坐标和球体坐标中的雷诺方程式 .....    | 103 |
| § 4.3 紊流能量方程式 .....             | 107 |
| § 4.4 紊流扩散方程式 .....             | 118 |
| § 4.5 紊流涡旋方程式 .....             | 119 |

|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| 参考文献                          | 123        |
| <b>第五章 紊流的统计理论基础</b>          | <b>124</b> |
| § 5.1 紊流的统计概念                 | 124        |
| § 5.2 紊流中的机率分布                | 129        |
| § 5.3 紊流脉动量的相关矩               | 138        |
| § 5.4 均匀紊流的紊动比尺               | 147        |
| § 5.5 一元能谱                    | 153        |
| 参考文献                          | 162        |
| <b>第六章 均匀各向同性紊流</b>           | <b>164</b> |
| § 6.1 各向同性紊流概述                | 164        |
| § 6.2 相关张量                    | 168        |
| § 6.3 各向同性紊动微分方程式             | 182        |
| § 6.4 三元能谱                    | 192        |
| § 6.5 能谱方程式                   | 205        |
| § 6.6 能谱的定性分析                 | 213        |
| 参考文献                          | 221        |
| <b>第七章 紊流的半经验理论</b>           | <b>223</b> |
| § 7.1 紊动粘滞系数                  | 223        |
| § 7.2 普朗特的动量传递理论              | 226        |
| § 7.3 泰勒的涡旋传递理论               | 231        |
| § 7.4 卡门的相似理论                 | 234        |
| § 7.5 马卡维耶夫的自振动理论             | 237        |
| § 7.6 瑞哈特的归纳理论                | 242        |
| 参考文献                          | 246        |
| <b>第八章 剪切紊流的随机理论</b>          | <b>247</b> |
| § 8.1 剪切紊流的脉动流速               | 247        |
| § 8.2 紊流的随机模型                 | 253        |
| § 8.3 剪切紊流的脉动流速相关矩(雷诺应力和脉动动能) | 265        |
| § 8.4 剪切紊流的相关函数和谱函数           | 272        |
| 参考文献                          | 281        |
| <b>附录 常用张量基础知识</b>            | <b>282</b> |
| <b>专业名词中英俄文对照</b>             | <b>292</b> |

# 第一章 绪 论

## § 1.1 紊 流 问 题

紊流,或称湍流,是自然界广泛出现的流体运动。在我们生活的环境中,经常遇到的流体运动,几乎都属于紊流这个范畴。它与层流运动迥然不同。这种不同之处就在于紊流具有一种特殊性质,通常称之为紊动 (Turbulence) 或者湍动。在文献中紊动或者湍动这个词,使用的时间并不很久,最早研究紊流的学者之一雷诺 (O. Reynolds) 就只是将具有紊动特征的流称为“摇摆”流 (Sinuous)。

目前紊动或者湍动这个词,在流体力学和水力学中已普遍采用,但是对它下一个全面确切的定义,却不太容易。在五十年代以前,常常将紊动定义为“紊乱无秩序的流体运动”。当然,紊乱无秩序是紊流的一个重要特性。正是由于这种特性,才无法用简单的空间和时间函数对紊流进行全面描述。但是,这种紊乱无秩序的特性决不意味着紊流是完全紊乱的或者毫无规律可循的,紊流的紊乱无秩序性实际上只是在于它的随机性质,它完全可以为机率理论所描述。应用统计概念,完全可以给出各种量,如流速、压强、温度等准确的平均值,从而有可能对紊流的运动规律进行数学上的描述。由此可见,紊流一方面具有随机性质,在空间上和时间上做紊乱无秩序的变化,另一方面又具有准确的统计平均值,完全符合于力学规律。

紊流问题包括的范围很广,有各种形式的紊流。总的说来,可以分做两大类,即剪切紊流 (Turbulent shear flow) 和各向同性紊流 (Isotropic turbulence),前者具有时均流速梯度,后者完全不存在时均流速梯度。当然,后者也可以视为前者的特殊情况,即

时均流速梯度为零的情况。按照产生紊动和运动情况的不同,剪切紊流又可分做近壁紊流(Wall turbulence)和自由紊流(Free turbulence),前者指有壁面存在的情况,如河床紊流(Turbulent channel flow),即明渠和管道中的紊流,以及壁面边界层紊流等等。自由紊流则指不受壁面影响的紊流,如射流和尾流等。

做为现代流体力学和水力学重要组成部分的紊流,对许多科学技术领域,如航空、造船、气象、化工、环保等,都有直接或间接的关系。在水利工程中,紊流更是一个关键问题。

正是由于这个问题的重要性,近百年来,许多学者对紊流问题进行了试验和理论研究。近五十年来,同时发展着两种理论,即通常所说的统计理论和半经验理论。应当说,这两种理论都是统计的,因为在这两种理论中都必须使用统计平均值,否则就无法进行任何数学力学分析。这两种理论在某种程度上又都是半经验的,因为未知数的数目多于方程式的数目,一般都必须试验资料的基础上做出一些假定,即建立补充关系才能求解。因此严格说来这两种理论都具有一定的统计性质和半经验性质,但是在程度上确实存在着差别。统计理论系采用较严格的统计途径,着重研究水流的内部结构(即脉动结构),而在半经验理论中则通过对脉动结构做出某些假定后只着重研究时均流的运动规律。由于紊流结构复杂,在运用统计理论解决剪切紊流方面存在着很大困难,致使统计理论目前还主要局限于研究均匀各向同性紊流这一最简单情况。可以指出,除了在试验室内创造专门条件能够形成近似于均匀各向同性紊流之外,在自然界特别是在工程领域中很少能够遇见这种最简单的紊流。然而尽管如此,对均匀各向同性紊流的研究,还是具有重要的理论意义的。因为如果把这一最简单的情况研究清楚,它必将有助于理解复杂条件下的紊流机理。统计理论的优点正是半经验理论的缺点。半经验理论的主要缺欠就在于对紊流的内部结构缺少必要的分析。但是统计理论的缺点也正是半

经验理论的优点, 半经验理论已经初步解决了工程技术中经常遇到的剪切紊流中的许多问题, 这种研究途径已为科学技术的发展做出了重大贡献。当然, 由于没有很好地解决内部结构问题, 半经验理论的应用范围和解决问题的深度, 都受到了限制。

上述两种理论, 已成为现代紊流理论的基础。近年来, 这两种理论继续发展的同时, 已有一些学者试图应用统计观点阐释半经验理论所获得的一些成果, 或者试图应用统计概念改进半经验理论中关于紊流内部结构的论述。笔者提出的紊流随机模型也属于此种研究方向。

随着对紊流的深入研究, 近些年来在国外出版了许多有关紊流的论文和专著, 涉及的问题也非常广泛。本书只拟对不可压缩流体的各种基本紊流运动, 做一比较全面系统的论述, 以便为研究和解决水利工程中和有关工程技术中的紊流问题时提供理论基础。书中在介绍各家研究成果的同时, 也阐述了作者提出的紊流随机理论及其在各种紊流中的应用。如果读者希望了解紊流的其它方面, 可以参阅本章末附的参考文献[1]~[10]。

## § 1.2 流体的粘滞性和压缩性

在研究紊流运动时, 通常都将流体视为粘性不可压缩的连续介质。流体的粘滞性对紊流运动有很大影响。为了更好地理解紊流的运动规律, 首先需要对流体的粘滞性进行一些讨论。

### 1. 粘滞性

粘滞性是流体反抗剪切应力的一种能力。这种能力的大小取决于流体的分子结构和分子间的吸引力。因此它与流体的性质和外部条件如温度、压力等有关。还应当指出, 流体粘滞力只有当存在着流速梯度的情况下才能表现出来\*。关于粘滞性的性质, 可以用下述试验加以说明。

---

\* 这里系指牛顿流体而言, 详见后文。

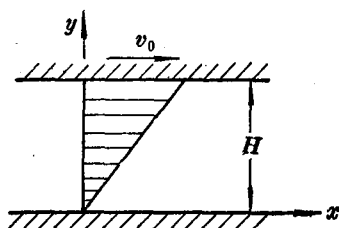


图 1.1 两平板间粘性液体的流速分布

现在我们讨论两个很长的平行平板之间的流体运动。上平板以等速  $v_0$  移动，下平板处于静止状态(见图 1.1)。设两板之间的距离为  $H$ ，流体中各点之压强为常值，试验表明，位于两个平板表面处的流体吸附于板面，上板表面处的流速等于  $v_0$ ，下板面处的流速为零，两板间的流速分布成一直线。因此在距下板面为  $y$  点的流速为

$$v = v_0 \frac{y}{H} \quad (1.2.1)$$

为了维持这种运动，必须对上平板施加一个平行于平板的力，以便与流体内部的摩擦阻力相抗衡。试验说明，施加于单位平板面积上的力，与上平板的运动速度  $v_0$  成正比，与两板间距  $H$  成反比。这也说明流体内部在单位面积上的摩擦阻力也与  $v_0$  成正比，与  $H$  成反比。如果用  $\tau$  表示流体内部单位面积上的摩擦阻力，或者称其为摩阻剪切应力，那末就可以写出  $\tau \sim \frac{v_0}{H}$ 。如果写得更普遍化一些，则有  $\tau \sim \frac{dv}{dy}$ 。剪切应力与流速梯度之间的比例常数就表示着流体的粘滞性，通常称做流体的粘滞系数，用  $\mu$  予以表示。因而有

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1.2.2)$$

这就是流体内部摩擦应力的牛顿定律，也可以看做是流体粘滞系数的定义。当然图 1.1 的情况只是一个简单事例，在更复杂的流体运动中，流体的粘滞应力应当用斯托克斯定律来确定(详见 § 6)。粘滞系数  $\mu$  的量纲为

$$[\mu] = \frac{\text{克}}{\text{厘米} \cdot \text{秒}} \quad \text{或} \quad [\mu] = \frac{\text{千克重} \cdot \text{秒}}{\text{米}^2}$$

对于不同的流体,  $\mu$  值不同。对于同一种流体,  $\mu$  值则随着温度和压力的不同而不同。但压力对粘滞系数的影响较小, 通常可以不予考虑。温度对液体和气体的影响不同。液体的粘滞系数随着温度的升高而降低, 而气体的粘滞系数则随着温度的升高而增大, 详见表 1.1。

在流体运动中常常不是直接使用上述粘滞系数  $\mu$ , 而是使用  $\mu$  与密度  $\rho$  的比值  $\nu$ , 即

$$\nu = \mu / \rho \quad (1.2.3)$$

此  $\nu$  值称做运动粘滞系数, 其量纲为

$$[\nu] = \text{厘米}^2/\text{秒} \quad \text{或} \quad [\nu] = \text{米}^2/\text{秒}$$

有时为了更强调  $\mu$  与  $\nu$  的差别,  $\mu$  值亦称做动力粘滞系数。对于液体, 由于密度随温度的增加而略有减小, 因之运动粘滞系数随温度的变化规律与动力粘滞系数的变化规律基本相同。对于气体, 由于密度随着温度的升高而显著减小, 所以运动粘滞系数随着温度的升高而急剧增大。水和空气的运动粘滞系数值也列于表 1.1。有些流体试验, 常常需要使用粘性较大的液体, 如甘油和滑润油等。这两种油的运动粘滞系数值列于表 1.2, 以供参考。

表 1.1 水和空气的粘滞系数

| 温 度<br>[°C] | 水                 |                               | 空 气<br>(在标准大气压下)  |                               |
|-------------|-------------------|-------------------------------|-------------------|-------------------------------|
|             | $\mu$<br>[克/厘米·秒] | $\nu$<br>[厘米 <sup>2</sup> /秒] | $\mu$<br>[克/厘米·秒] | $\nu$<br>[厘米 <sup>2</sup> /秒] |
| -20         | —                 | —                             | 0.000156          | 0.113                         |
| -10         | —                 | —                             | 0.000157          | 0.121                         |
| 0           | 0.0180            | 0.0179                        | 0.000167          | 0.130                         |
| 10          | 0.0130            | 0.0130                        | 0.000173          | 0.139                         |
| 20          | 0.0101            | 0.0101                        | 0.000179          | 0.148                         |
| 40          | 0.00654           | 0.00658                       | 0.000191          | 0.170                         |
| 60          | 0.00473           | 0.00478                       | 0.000203          | 0.192                         |
| 80          | 0.00357           | 0.00364                       | 0.000215          | 0.217                         |
| 100         | 0.00284           | 0.00294                       | 0.000228          | 0.236                         |

表 1.2 液体运动粘滞系数

| 液 体 名 称 | 温 度<br>[°C] | $\nu$                |
|---------|-------------|----------------------|
|         |             | [厘米 <sup>2</sup> /秒] |
| 甘 油     | 20          | 6.87                 |
| 甘 油     | 50          | 1.50                 |
| 滑润油     | 20          | 4.00                 |
| 滑润油     | 40          | 1.00                 |
| 滑润油     | 60          | 0.30                 |

凡可用(1.2.2)式确定内部剪力的流体,统称为牛顿流体。也有些流体,其内部剪力已不能用(1.2.2)式表述,而应由下式确定:

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dv}{dy} \quad (1.2.4)$$

式中之 $\tau_0$ 为初始剪切应力。此式称做宾汉剪切应力公式。凡需用(1.2.4)式确定内部剪切应力的流体,已不是牛顿流体,常称做宾汉流体。

在牛顿流体中加入少量高分子聚合物后,常常会使流体转变为粘弹性流体。这种流体做紊流运动时,其阻力较牛顿流体有大幅度的降低。因而这种流体的紊流通常称之为减阻紊流。这种粘弹性流体的内部剪切应力可由麦克斯韦(Maxwell)方程式表述,即

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} - \theta \frac{d\tau}{dt} \quad (1.2.5)$$

式中: $\theta$ 为流体的松弛时间; $d\tau/dt$ 为内部剪切应力随时间的变化率,详见下册。

## 2. 压缩性

现在我们来讨论一下液体和气体的压缩性。压缩性通常用以表述液体或气体的体积在外力作用下的变化程度。压强变化与体积变化之间的关系,可用下式表示:

$$\Delta p = -E \frac{\Delta V}{V_0} \quad (1.2.6)$$

式中  $\Delta V/V_0$  表示当压强增加  $\Delta p$  时, 体积的相对变化,  $E$  为弹性模数。由于液体的弹性模数很大, 液体的压缩性是很小的。例如水的弹性模数约为  $2 \times 10^4$  千克/厘米<sup>2</sup>, 当增加一个大气压时 (相当于 1.03 千克/厘米<sup>2</sup>), 水的体积只缩小约二万分之一。其它液体的情况也基本相同。因此在大多数情况下, 液体的压缩性都可以忽略不计并认为是不可压缩的。

气体的弹性模数在等温变化时等于其初始压强  $P_0$ 。在压强为一个大气压 (即  $P_0 = 1.03$  千克/厘米<sup>2</sup>), 温度为摄氏零度时, 空气的弹性模数为 1.03 千克/厘米<sup>2</sup>, 因而空气的压缩性约较水大两百万倍。但这并不意味着在任何情况下都不能把气体当做不可压缩的流体。下边将说明这个问题。

由于气体的体积变化时其质量保持不变, 故有

$$(V_0 + \Delta V)(\rho_0 + \Delta \rho) = V_0 \rho_0,$$

其中  $V_0$  和  $\rho_0$  分别表示初始状态的体积和密度。略去二次小量  $\Delta \rho \Delta V$  项后可得  $\Delta \rho / \rho_0 = -\Delta V / V_0$ , 所以 (1.2.6) 式可以写做

$$\Delta p = E \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad (1.2.7)$$

很明显, 如果气体密度的相对变化很小时, 即  $\Delta \rho / \rho_0 \ll 1$  时, 气体也就可以被当做是不可压缩的流体。由于伯努力方程式给出  $p + \frac{1}{2} \rho v^2$  为一常值 (其中  $v$  为流速,  $p$  为压强), 那末由气流所引起的压力变化  $\Delta p$  应当与动力水头  $\varepsilon = \frac{1}{2} \rho v^2$  属于同一数量级。因此 (1.2.7) 式可以近似写做

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \approx \frac{\varepsilon}{E} \quad (1.2.8)$$

由此可见, 只要  $\varepsilon / E \ll 1$ ,  $\Delta \rho / \rho_0$  也就远远小于 1, 因而这种气流也就可以视为不可压缩的。由于声速可用拉普拉斯公式表示, 即

$$c^2 = \frac{E}{\rho_0} \quad (1.2.9)$$

其中  $c$  为声速, 而动力水头又可近似写做

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \rho v^2 \approx \frac{1}{2} \rho_0 v^2$$

因而由(1.2.8)式可以写出

$$\frac{4\rho}{\rho_0} \approx \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \approx \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \quad (1.2.10)$$

所以气体的压缩性可以被忽略的条件为

$$\frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \ll 1 \quad (1.2.11)$$

通常将气流速度  $v$  与声速  $c$  之比值称做马赫数 (Mach number) 并用符号  $M$  表示, 即

$$M = v/c \quad (1.2.12)$$

这样, 可以将气体视为不可压缩流体的条件为

$$\frac{1}{2} M^2 \ll 1 \quad (1.2.13)$$

即马赫数远远小于 1。对于空气来说, 声速约为 340 米/秒。史利赫金 (H. Schlichting) 指出, 如果控制相对密度变化小于 0.05, 亦即马赫数小于 0.31, 则要求气流速度小于 100 米/秒。茹科夫斯基 (Н. Е. Жуковский) 也曾指出, 当气流速度在 50~70 米/秒时, 气体密度的变化已经很小, 完全可以当做不可压缩的流体对待。

### § 1.3 流速和压强的脉动

紊流的基本特征在于其具有随机性质的涡旋结构以及这些涡旋在水流内部的随机运动, 从而引起流速、压强、温度等的脉动。由于固体边界 (如河床、管壁等) 的阻碍作用或者由于外部的扰动, 在流体内部形成涡旋。这些涡旋形成后经历着发展和衰减的过程直到消失。这些涡旋的尺寸有大有小, 往往大涡旋中包含着小涡旋, 小涡旋中又包含着更小的涡旋。各种不同尺度的涡旋充满着

整个紊流。这种大小不同的涡旋组成连续的涡旋谱。大涡旋的尺度与紊流条件密切相关。看来,也正是这些大尺度的涡旋决定着紊流的主要力学特征,而小尺度的涡旋则在粘滞性的影响下将紊流能量转化为热而散失。

在这种充满着各种尺度涡旋的流体中,各点流速的数值和方向不断地变化着。如果用瞬时流速仪测量紊流中任意一点的流速值,则在示波仪记录纸上将出现如图 1·2 所示的曲线。流速的数值是极其紊乱的,似乎是毫无规律可循的。流速随时间的这种变化就称做流速的脉动。

实测资料表明,尽管流速千变万化,如果将不同时段测得的数值分别加以平均(只要采用的时段足够长),所获得的平均值却是相当稳定的。瞬时流速的分布完全符合于统计规律,基本上可用高斯正常分布定律予以概括。

由于紊流的流速不仅在数值上变化而且也在方向上变化,即使在直线管道中,紊流的瞬时流速也会在其余两个轴向上出现分量。因此紊流的瞬时流速永远属于三元问题。流速在空间的脉动

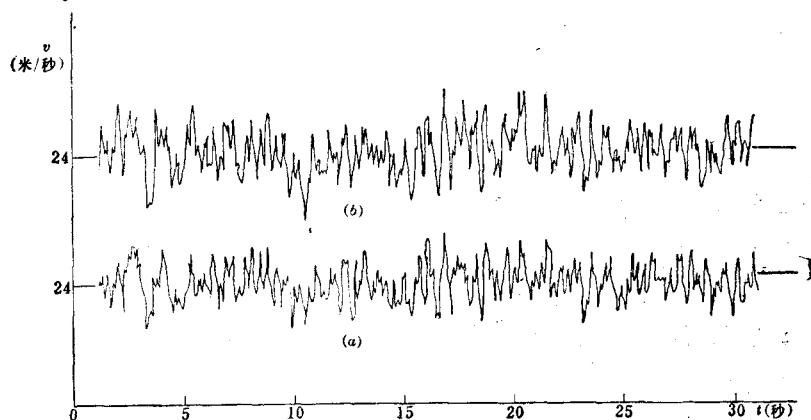


图 1·2 瞬时流速过程线  
(L. Jönsson, 1971 年资料)

(a) 用热丝仪测量; (b) 用激光仪测量

必然引起相邻各层流体间的相互交换,从而导至动量、压强、温度、浓度等的交换和脉动。

紊流中各点的压强也都在不断地变化着。然而直接测量紊流中各点的压强,目前还有一定的困难,还不能在不破坏当点紊流结构的条件下测取压强值。很明显,当将测压感应头放入紊流之后,由于对附近紊流的干扰,当点的压强也将随之而改变。很难说用这样方法测出的压强能够反映出该点的真实压强。但是在固体壁面上测取压强却是容易做到的。因此目前比较可靠的紊流压强资料一般都是在水利建筑物等壁面上测得的。这些资料表明,瞬时压强在示波仪上的记录曲线与瞬时流速曲线基本相同。紊流压强也基本上符合高斯正常分布定律。

流速和压强的脉动周期,都是有大有小的,大周期脉动中附有小周期的脉动,小周期的脉动附有更小周期的脉动,或者大小不同周期的脉动交替出现。因此流速和压强的脉动均具有连续的频率谱。关于谱分析,详见第五章和第六章。附带指出,高速水流中的压强脉动,常常与掺气量的多少有密切关系。当然这个问题不在本书的讨论范围之内。

## § 1.4 坐标系、符号和平均值

在讨论紊流运动中针对不同的问题,常常采用不同的坐标系,但经常使用的还是直角坐标系。本书中在未加特殊说明的地方,均采用直角坐标系,其三轴分别用  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  表示,或者用  $x_i$ 、 $x_j$ 、 $x_k$  等表示。在解决某些具体问题,则三个坐标轴又相应用  $x$ 、 $y$ 、 $z$  表示,即  $x_1$  相当于  $x$ ,  $x_2$  相当于  $y$ ,  $x_3$  相当于  $z$ 。各向量在各个坐标轴上的投影均用角标形式写出。例如  $v_i$  表示向量  $\mathbf{v}$  在  $x_i$  轴向上的投影。

由于紊流的流速、压强等均为具有随机性质的脉动量,在时间和空间上都不断地变化着,只有采用适当方式加以平均才能进