数学分析

习题演练

周民强　编著

（第二册）

科学出版社
www.sciencep.com

数学分析习题演练

（第二册）

周民强　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是基于作者多年教学实践的积累，整理编写而成的. 全书分为两册. 第一册分为 6 章：实数与函数，极限论，连续函数，微分学（一），微分学（二），不定积分. 第二册分为 6 章：定积分，反常积分，常数项级数，函数项级数，幂级数、Taylor 级数，Fourier 级数. 本书选择的习题起点适当提高，侧重理论性和典范性. 书中还添加了若干注记，便于读者厘清某些误解.

本书适合理工科院校及师范院校的本科生、研究生及教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题演练. 第二册/周民强编著. —北京：科学出版社，2006
ISBN 7-03-017546-8

Ⅰ. 数… Ⅱ. 周… Ⅲ. 数学分析-高等学校-习题 Ⅳ. O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 071584 号

责任编辑：林 鹏 刘嘉善 姚莉丽/责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 12 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2006 年 12 月第一次印刷 印张：26 1/4
印数：1—5 000 字数：505 000

定价：34.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉）

前　言

学数学必须演算习题，这是大家的共识.通过演算，我们不仅能熟悉理论的意义和应用，掌握方法的操作程序，同时还可以洞察理论本身的适应性，预测其扩展前景.因此，关于数学各分支，都编写出了众多习题集或学习参考书，尤以微积分(或数学分析)类为最.作者在多年的教学实践中，积累了相当数量的练习题，且在培训学生过程中收到较好的效果.现在，在科学出版社编辑的鼓励下，我们把它们整理并编写出来，供读者参考，以开阔视野和启示思路.

本习题集以上海科技出版社(2002年)出版的《数学分析》教材为蓝本.因此，总的说来，选题的起点适当提高，侧重理论性和典范性，并力求多角度展示，但减少一般性命题以及在几何、力学方面的应用练习.解答也从简，不再在文字上多下功夫.书中还添加若干注记，便于读者厘清某些误解.

第二册共分6章:定积分，反常积分，常数项级数，函数项级数，幂级数、Taylor级数，Fourier级数.

由于作者的水平和视野所限，书中不足之处在所难免，欢迎读者批评指正.

作　者

2006年

技重于练，

巧重于悟.

目　录

第 1 章　定　积　分

1.1　定积分的概念、可积函数及其初等性质

1.1.1　定积分的概念

设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的函数.

(1) 把$[a,b]$分成有限个子区间,即在$[a,b]$中插入有限个分点,一般都表示为

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

并形成一组 n 个相连的子区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$. 我们称此为$[a,b]$的一个**分划**(**分割**,记为 Δ),并记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$. 以及 $\|\Delta\| = \max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$,即各子区间长度之最大值,称为分划 Δ 的**模**.

(2) 在每个子区间中任取一点: $\xi_i \in [x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$, 简称为插点组,并记为$\langle\xi\rangle$.

(3) 把分划 Δ 的各子区间与插点组$\langle\xi\rangle$上相应的函数值组成和式

$$S_\Delta = S_\Delta(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

称为 $f(x)$在$[a,b]$上的 **Riemann 积分和**,简称为**积分和**,其值与分划 Δ、插点组$\langle\xi\rangle$的取法有关.

定义 1.1.1　设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的函数. 若有实数 J,对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的任意分划 Δ,以及任取的插点组$\langle\xi\rangle$,均有

$$|S_\Delta(f,\xi) - J| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$在$[a,b]$上是(**Riemann**)**可积**的,或说 $f(x)$在$[a,b]$上的(**Riemann**)**定积分存在**,并简记为

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta(f,\xi) = J, \qquad \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = J.$$

数值 J 称为 $f(x)$在$[a,b]$上的**定积分**,并记为 $J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 也简称为 $f(x)$从 a 到 b 的定积分(值),a 称为积分**下限**,b 称为积分**上限**.

我们约定 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$; $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

定理 1.1.1　若 $f(x)$在$[a,b]$上可积,则其积分值是唯一的.

定理 1.1.2(函数可积的必要条件)　若 $f(x)$在$[a,b]$上可积,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

注　有界函数不一定可积,例如 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ 是有理数}, \\ 0, & x\text{ 是无理数}. \end{cases}$$

例 1.1.1　解答下列问题:

(1) 设 $f(x)$在$[0,1]$上可积,且有 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > 0$, 试证明存在$[\alpha,\beta]\subset[0,1]$,

使得 $f(x)>0(x\in[\alpha,\beta])$.

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上有界,$\alpha>0$. 试对$[a,b]$的任一分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,以及任意的插点组$\langle\xi\rangle$,计算极限 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)(\Delta x_i)^{1+\alpha}$.

解 (1) 反证法. 假定在$[0,1]$中的任一子区间中,总有非正的 $f(x)$值,则对任一分划 Δ 所作的积分和 $S_\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 中,取 $f(\xi_i)\leqslant 0$ 可使任一个$S_\Delta\leqslant 0$. 从而又有

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}S_\Delta=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

这与题设矛盾,得证.

(2) 设$|f(x)|\leqslant M(x\in[a,b])$,易知

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(\Delta x_i)^{1+\alpha}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)|(\Delta x_i)^{\alpha}(\Delta x_i)$$

$$\leqslant\|\Delta\|^{\alpha}\cdot M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\|\Delta\|^{\alpha}M(b-a).$$

从而知该极限值为零.

1.1.2 可积函数类

下文中,我们总是假设定义在区间上的 $f(x)$是有界的,且记

$$M=M(f)=\sup_{[a,b]}\{f(x)\},\qquad m=m(f)=\inf_{[a,b]}\{f(x)\}.$$

定义 1.1.2 作$[a,b]$的分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,且记

$$\begin{cases}M_i=M_i(f)=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\},\\ m_i=m_i(f)=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

则称和式(数值)

$$\bar{S}_\Delta=\bar{S}_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\qquad \underline{S}_\Delta=\underline{S}_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$$

为 $f(x)$(在$[a,b]$上)关于分划 Δ 的 **Darboux 上和与下和**,简称为上和与下和. 这一操作避免了原积分和由于函数在插点上值的变化而出现的不确定性.

引理 1.1.1 (积分和与 Darboux 上、下和的关系) 设 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是$[a,b]$的任一分划,则对任意的插点组$\langle\xi\rangle$,有$\underline{S}_\Delta\leqslant S_\Delta\leqslant\bar{S}_\Delta$,即

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i.$$

设 Δ',Δ''是$[a,b]$的两个分划. 若 Δ'的分点必是 Δ''的分点,则称 Δ''为 Δ'的加细分划,记为 $\Delta'\subset\Delta''$.

引理 1.1.2 若 Δ'与 Δ''是$[a,b]$的任意两个分划,则$\underline{S}_{\Delta'}\leqslant\bar{S}_{\Delta''}$.

定义 1.1.3 (Darboux) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数,对$[a,b]$的一切分划 Δ,作相应的上和数集$\{\bar{S}_\Delta\}$与下和数集$\{\underline{S}_\Delta\}$,且记其下、上确界各为

$$\inf_{\Delta}\{\bar{S}_\Delta\} = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \sup_{\Delta}\{\underline{S}_\Delta\} = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,$$

并各称为 $f(x)$在$[a,b]$上的**(Darboux)上积分与下积分**. 显然有

$$\underline{S}_\Delta \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \bar{S}_\Delta.$$

推论 对$[a,b]$上的有界函数,其上、下积分相等的充分必要条件是:对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对任一满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的分划 Δ,均有$\bar{S}_\Delta-\underline{S}_\Delta<\varepsilon$.

定理 1.1.3 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当$[a,b]$的分划 Δ 满足 $\|\Delta\|<\delta$ 时,有

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x+\varepsilon > \bar{S}_\Delta, \quad \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x-\varepsilon < \underline{S}_\Delta,$$

也写成

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \bar{S}_\Delta = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x, \quad \lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}_\Delta = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

为方便计,记$[a,b]$上所有可积函数的全体为 $R([a,b])$,$f\in R([a,b])$表示 $f(x)$是$[a,b]$上的可积函数.

定理 1.1.4 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数,则 $f\in R([a,b])$当且仅当其上、下积分相等. 此时有

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 1.1.5(Riemann) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数.

(1) $f\in R([a,b])$的充分必要条件是:对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当分划 Δ 满足 $\|\Delta\|<\delta$ 时,有$\bar{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)<\varepsilon$.

(2) $f\in R([a,b])$的充分必要条件是:对任给的 $\varepsilon>0$,存在$[a,b]$的分划 Δ,使得$\bar{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)<\varepsilon$.

注 如果对于$[a,b]$的分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,引用 $f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上振幅符号:

$$\begin{aligned}\omega_i = \omega_i(f) &= M_i - m_i \\ &= \sup\{|f(x)-f(y)|: x,y\in[x_{i-1},x_i]\} \qquad (i=1,2,\cdots,n),\end{aligned}$$

那么上述充分必要条件中的不等式又可写为

$$= \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \Big(\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i = \bar{S}_\Delta - \underline{S}_\Delta\Big) < \varepsilon. \qquad (*)$$

显然,为使式(*)成立,理应在振幅 ω_i 与 Δx_i 两个方面上下功夫. 例如,我们能使每个 ω_i 都充分地小,这当然是最理想的情形,因为此时,小区间 Δx_i 长度的总和也就是 $b-a$,所以式(*)成立.

可积函数的范例:

(i) 定义在$[a,b]$上的连续函数.

(ii) 定义在$[a,b]$上的单调函数.

定理 1.1.6(Du Bois Reymond) $[a,b]$上有界函数可积的充分必要条件是:对任给的$\varepsilon>0$,$\sigma>0$,存在分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,其相应于$\omega_i\geqslant\varepsilon$ 的子区间 Δx_i 的长度的总和小于σ.

推论 若定义在$[a,b]$上的有界函数只有有限个不连续点,则 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

例 1.1.2 解答下列问题:

(1) 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[a,b]\cap\mathbf{Q}, \\ 0, & x\overline{\in}[a,b]\cap\mathbf{Q}. \end{cases}$ 试求其在$[a,b]$上的上、下积分.

(2) 设 $f\in C([0,1])$. 若存在常数 C,使得对$[0,1]$的任一分划 $\Delta: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$,都有$\underline{S}_\Delta(f)=C$,则 $f(x)=C, x\in[0,1]$.

解 (1) 易知$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=0$. 此外,对任一分划 Δ,我们有

$$\begin{aligned}\bar{S}_\Delta(f) &= \sum_{i=1}^n x_i(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{i=1}^n x_ix_{i-1} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2+\sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{i=1}^n 2x_ix_{i-1}\Big) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{i=1}^n x_{i-1}^2\Big)=\frac{b^2-a^2}{2},\end{aligned}$$

而对特定分划 $\Delta': x_i=a+i(b-a)/n$,又有

$$\bar{S}_{\Delta'}(f)=\sum_{i=1}^n\Big[a+\frac{i}{n}(b-a)\Big]\frac{b-a}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

这说明$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$.

(2) (i) 取分划 $\Delta: 0=x_0<x_1=1$,则 $C=\underline{S}_\Delta(f)=m(1-0)=m\ (m=\min\limits_{[0,1]}\{f(x)\})$.

(ii) 对任一分划 $\Delta: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$,我们有

$$\underline{S}_\Delta(f)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i=C=\sum_{i=1}^n C\Delta x_i \qquad \Big(m_i=\min_{[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}\Big).$$

由此知 $\sum\limits_{i=1}^n(m_i-C)\Delta x_i=0$,即得 $m_i=C(i=1,2,\cdots,n)$.

这说明 $f(x)$在$[0,1]$内的任一子区间上的最小值都等于 C,即 $f(x)=C$ 的点 x 全体在$[0,1]$上稠密,而 $f(x)$是连续的,从而 $f(x)\equiv C$.

例 1.1.3 试证明下列函数 $f(x)$在给定区间上可积:

(1) $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $x\in[0,1]$.

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad x\in[0,1].$

(3) $f(x)=\begin{cases}\ln x\cdot\ln(1+x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\quad x\in[0,1].$

证明 (1) $f(x)$有界且仅有一个不连续点 $x=0$.

(2) 注意$(1/x-1/\sin x)\to 0(x\to 0+)$.

(3) 注意 $\ln x\cdot\ln(1+x)\to 0(x\to 0+)$.

例 1.1.4 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in R([a,b])$. 若令

$$h(x)=\inf_{[a,x]}\{f(t)\},\qquad H(x)=\sup_{[a,x]}\{f(t)\},\qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

则 $h(x),H(x)$在$[a,b]$上可积.

(2) 设 $f\in R([0,1])$,则有

$$\lim_{n\to\infty}I_n=0,\qquad I_n=\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+(-1)^n f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)=0.$$

证明 (1) $h(x)$是$[a,b]$上的递减函数,$H(x)$是$[a,b]$上的递增函数.

(2) 只需看 $n=2m+1$,我们有

$$I_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{2i-1}{n}\right)-f\left(\frac{2i}{n}\right)\right]\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\cdot\frac{1}{n}\to 0\qquad(n\to\infty).$$

例 1.1.5 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上. 若对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $g\in R([a,b])$,使得

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon,\qquad x\in[a,b],$$

则 $f\in R([a,b])$.

(2) 设 $f(x)$定义在$[a,b]$上,则$|f(x)|$与 $f^2(x)$在$[a,b]$上的可积性等价.

证明 (1) 因为我们有(对任给 $\varepsilon>0$)

$$\begin{aligned}|f(y)-f(x)|&\leqslant|f(y)-g(y)|+|g(y)-g(x)|+|g(x)-f(x)|\\&\leqslant 2\varepsilon+|g(y)-g(x)|,\end{aligned}$$

所以对$[a,b]$的任一分划 Δ,可得 $\omega_i(f)\leqslant 2\varepsilon+\omega_i(g)$. 从而由 $g(x)$的可积性可推 $f(x)$的可积性.

(2) (i) 设$|f|\in R([a,b])$,且假定$|f(x)|\leqslant M(a\leqslant x\leqslant b)$,则由

$$|f^2(x')-f^2(x'')|\leqslant 2M\,\big||f(x')|-|f(x'')|\big|,$$

即知 $f^2\in R([a,b])$.

(ii) 设 $f^2\in R([a,b])$. 注意到

$$\begin{aligned}\big||f(x')|-|f(x'')|\big|^2&\leqslant\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\cdot\big||f(x')|+|f(x'')|\big|\\&\leqslant|f^2(x')-f^2(x'')|,\end{aligned}$$

则对$[a,b]$的任一分划 Δ 可得 $\omega_i^2(|f|)\leqslant\omega_i(f^2)$. 从而又有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(|f|)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\omega_i(f^2)}\Delta x_i\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f^2)\Delta x_i\right]^{1/2}\cdot(b-a).$$

由此即得所证.

例 1.1.6 设 $f(x)$在$[a,b]$上定义的有界函数. 若对任给 $\delta>0$,均有 $f\in R([a+\delta,b])$,则 $f\in R([a,b])$.

证明 对任给 $\varepsilon>0,\sigma>0$,取 $\delta_1>0$,使得 $\delta_1<\sigma/2$. 对区间$[a+\delta_1,b]$,因为$f(x)$在其上可积,所以可作分划 Δ',使得具有 $\omega_i(f)\geqslant\varepsilon$ 的子区间总长小于$\sigma/2$. 从而再作$[a,b]$上的分划 Δ:Δ'的分点再加分点 $x_0=a$. 易知在$[a,b]$的子区间中,使其上的$\omega_i(f)\geqslant\varepsilon$ 的子区间总长小于$\sigma/2+\sigma/2=\sigma$. 证毕.

例 1.1.7 试证明下列函数在$[0,1]$上是可积的.

(1) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\neq 0.\end{cases}$

(2) $R(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数}, x=0;\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p\text{ 与 }q\text{ 是互素正整数}\end{cases}$ (Riemann 函数).

证明 (1) 对任给 $\varepsilon>0$,取正整数 n_0:$1/n<\varepsilon/2(n>n_0)$,并作分划

$$\Delta:0=x_0<x_1=\frac{1}{n_0+1}<x_2<\cdots<x_{n_0'}=\frac{1}{n_0}$$
$$<x_{n_0'+1}<\cdots<x_{n_1'}=\frac{1}{n_0-1}<\cdots<x_{n_{n_0-1}'}=1,$$

使得 $x_i-x_{i-1}<\varepsilon/4n_0(i\geqslant 2)$. 从而有

$$\bar{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)=\frac{1}{n_0+1}+\sum_{i=2}^{n_0}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})+\sum_{k=0}^{n_0-2}\sum_{i=n_k'+1}^{n_{k+1}'}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+2n_0\frac{\varepsilon}{4n_0}=\varepsilon.$$

即得所证.

(2) 对任给 $\varepsilon>0,\sigma>0$,易知在$[0,1]$中满足$\dfrac{1}{q}>\varepsilon\left(q<\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$的有理数$\dfrac{p}{q}$($p$ 与 q 是互素的正整数)只有有限个,不妨记为 $r_1,r_2,\cdots,r_k(k=k(\varepsilon))$.

现在,可作$[0,1]$的分划 Δ,满足 $\|\Delta\|<\dfrac{\sigma}{k}$,且使得上述 k 个有理数均含于小区间的内部. 此时,若分划 Δ 中的小区间不含有 $r_i(i=1,2,\cdots,k)$,则 $f(x)$在其上的振幅为$\dfrac{1}{q}-0<\varepsilon$,而使 $f(x)$在其上振幅大于 ε 的子区间必是含有 $r_i(i=1,2,\cdots,$

k)的小区间,这样的小区间至多有 k 个,其长度总和小于 $k\|\Delta\|<k\cdot\frac{\sigma}{k}=\sigma$,即得所证.

例 1.1.8 设 $f\in C([0,1])$且 $f(x)>0(0\leqslant x\leqslant 1)$,则

$$1\Big/\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 易知题式中的定积分均存在,故对[0,1]作分划 Δ:

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1,\qquad x_k=k/n\qquad(k=0,1,2,\cdots,n).$$

应用几何-算术不等式,可知

$$n\Big/\left(\frac{1}{f(x_1)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}\right)\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(x_k)}$$

$$=\sqrt[n]{f(x_1)\cdots f(x_n)}\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

令 $n\to\infty$,结论立即得证.

1.1.3 可积函数的初等性质

性质 1.1.1 若 $f(x)=l(a\leqslant x\leqslant b)$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=l(b-a)$.

性质 1.1.2(积分的线性性) (i) 设 $f\in R([a,b])$,$g\in R([a,b])$,则 $f+g\in R([a,b])$,且有

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 设 $f\in R([a,b])$,c 是常数,则 $cf\in R([a,b])$,且有 $\int_a^b[cf(x)]\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

性质 1.1.3(积分的保序性) 若 $f\in R([a,b])$,$g\in R([a,b])$,且有 $f(x)\leqslant g(x)$,$x\in[a,b]$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

性质 1.1.4(积分区间的可加性) 设 $a<c<b$,则 $f\in R([a,b])$的充分必要条件是 $f\in R([a,c])$以及 $f\in R([c,b])$. 此时有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. (*)

注 实际上,只要式(*)中的三个积分都存在,那么不论 a,b 与 c 的大小次序如何,式(*)总成立. 例如对 $c<b<a$ 的情形,因为我们有等式

$$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=\int_c^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x,$$

所以由移项可知

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 1.1.5 设 $f(x)$是$[a,b]$上的非负连续函数,若有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,则 $f(x)\equiv 0$.

性质 1.1.6(绝对值的可积性) 若 $f\in R([a,b])$,则 $|f(x)|$ 在$[a,b]$上可积,且有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

注　$|f(x)|$在$[a,b]$上的可积性推不出$f(x)$在$[a,b]$上的可积性.

性质 1.1.7（乘积可积性）　设$f\in R([a,b])$，$g\in R([a,b])$，则$f\cdot g\in R([a,b])$.

性质 1.1.8（复合函数的可积性）　设$f\in R([a,b])$，且有$m\leqslant f(x)\leqslant M(x\in[a,b])$；设$\varphi\in C([m,M])$，则复合函数$\varphi[f(x)]$在$[a,b]$上可积（证明见例 1.1.10）.

注　记$R(x)$是$[0,1]$上的 Riemann 函数，又定义$\varphi(0)=0$，$\varphi(x)=1(0<x\leqslant 1)$，则复合函数$\varphi[R(x)]$在$[0,1]$不可积. 进一步记$Q=\{r_n\}$，$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(r_n-2^{-2n},r_n+2^{-2n})$，$E=[0,1]\backslash G$，并作函数

$$f(x)=\inf\{|x-y|,y\in E\}.$$

易知，$f\in C([0,1])$（实际上属于 Lip1）. 又作函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$$

则$\varphi[f(x)]$在$[0,1]$上不可积.

例 1.1.9　设$f_k\in R([a,b])(k=1,2,\cdots,m)$，则

$$\left[\left(\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right)^2+\cdots+\left(\int_a^b f_m(x)\mathrm{d}x\right)^2\right]^{1/2}\leqslant\int_a^b\sqrt{f_1^2(x)+\cdots+f_m^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

证明　分割$[a,b]$区间：$x_k=a+k(b-a)/n(k=0,1,2,\cdots,n)$，作积分和式估计

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m\left[\sum_{k=1}^n f_i(x_k)\frac{b-a}{n}\right]^2&=\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^m\left(\sum_{k=1}^n f_i(x_k)\right)\left(\sum_{j=1}^n f_i(x_j)\right)\\&=\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^m f_i(x_k)\cdot f_i(x_j)\right)\\&\leqslant\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\sqrt{\sum_{i=1}^m f_i^2(x_k)}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^m f_i^2(x_j)}\\&=\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^n\sqrt{\sum_{i=1}^m f_i^2(x_k)}\cdot\sum_{j=1}^n\sqrt{\sum_{i=1}^m f_i^2(x_j)}\\&=\left(\sum_{k=1}^n\sqrt{\sum_{i=1}^m f_i^2(x_k)}\,\frac{b-a}{n}\right)^2,\end{aligned}$$

令$n\to\infty$，即得所证.

例 1.1.10　试证明下列命题：

(1) 设$f\in C((-\infty,\infty))$，且是以2π为周期的函数，令

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(t+x)\mathrm{d}t,$$

则$F\in C((-\infty,\infty))$.

(2) 设$f(x)$是$(-\infty,\infty)$上以T为周期的连续函数，令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$F(x)$可表为 $F(x)=\varphi(x)+kx$,其中 $\varphi(x)$是以 T 为周期的连续函数.

证明 (1) 易知 $F(x)$是以 2π 为周期的函数. 因为 $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上一致连续,所以对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|f(u+\Delta x)-f(u)|<\frac{\varepsilon}{M}\quad(|\Delta x|<\delta),\qquad M=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&|F(x+\Delta x)-F(x)|\\=&\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(t+x+\Delta x)\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(t+x)\mathrm{d}t\right|\\ \leqslant&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)||f(t+x+\Delta x)-f(t+x)|\,\mathrm{d}t\\ \leqslant&\frac{\varepsilon}{M}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t=\varepsilon,\qquad |\Delta x|<\delta.\end{aligned}$$

证毕.

(2) 考察函数 $\varphi(x)=F(x)-kx$,我们有

$$\begin{aligned}\varphi(x+T)&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-kx+\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t-kT\\&=\varphi(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-kT\\&=\varphi(x)+F(T)-kT.\end{aligned}$$

从而令 $k=\dfrac{F(T)}{T}=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$, 即可得证.

例 1.1.11 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in R([0,1])$,且有等式 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=x^2+1/3$.

(2) 设 $f\in C([a,b])$,且有 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant mM(b-a)$, 其中

$$m=-\min_{[a,b]}\{f(x)\},\qquad M=\max_{[a,b]}\{f(x)\}.$$

(3) 设 $f(x)$是$[0,1]$上的递减函数,$0<\alpha<1$,则 $\alpha\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x$.

证明 (1) 记 $A=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 并在 $f(x)=x^2+A/2$ 两端作$[0,1]$上的定积分,则得

$$A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{A}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{A}{2}.$$

从而有 $A=2/3$,由此可知 $f(x)=x^2+1/3$.

(2) 注意到 $\displaystyle\int_a^b mf(x)\mathrm{d}x=0=\int_a^b Mf(x)\mathrm{d}x$, 因此有

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - mM(b-a) = \int_a^b [f^2(x) - mM]\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b [f(x)+m][f(x)-M]\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b [f(x)-(-m)][f(x)-M]\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

(3) 易知 $\dfrac{1}{1-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(\alpha) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x$，从而有

$$\alpha\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant (1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x - \alpha\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x.$$

移项即可得证.

例 1.1.12 试证明下列积分不等式：

(1)（Cauchy-Schwarz 不等式） 设 $f\in R([a,b])$，$g\in R([a,b])$，则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (*)$$

(2) 设 $f\in C([0,1])$，$0\leqslant f(x)<1$，则

$$\int_0^1 f(x)/[1-f(x)]\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Big/\left[1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right].$$

(3) 设 $f,g\in R([a,b])$，且 $m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1$，$m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2$，则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant (M_1-m_1)(M_2-m_2)/4.$$

证明 (1) 首先，易知公式左、右端积分均存在. 其次，记

$$A = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,\quad B = \int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x,\quad C = \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x,$$

并考察积分

$$\int_a^b [t|f(x)| - |g(x)|]^2\mathrm{d}x = At^2 - 2Bt + C.$$

因为上式对一切 $t\in(-\infty,\infty)$ 皆非负，所以必有 $4B^2\leqslant 4AC$ 或 $B^2\leqslant AC$. 由此即知公式(*)成立.

注 若 $f,g\in C([a,b])$，则式(*)中等号成立当且仅当 $f(x)=cg(x)$.

(2) 易知 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x < 1$（否则 $f(x)\equiv 1$），我们有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \sqrt[4]{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

$$= \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{f(x)}{1-f(x)}}\sqrt{1-f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\right)\int_0^1 [1-f(x)]\mathrm{d}x.$$