高职高专通用教材

（修订本）

高等数学

主　编　陈沛森
副主编　王联荣　罗晓芳　金慧萍

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高职高专通用教材

高等数学

（修订本）

主　　编　陈沛森

副 主 编　王联荣　罗晓芳　金慧萍

编委名单　陈沛森　王联荣　罗晓芳

　　　　　金慧萍　潘　媛　张胜兵

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 陈沛森等主编. —杭州：浙江大学出版社，2002.7
ISBN 7-308-02746-5

Ⅰ.高... Ⅱ.陈... Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 045363 号

高等数学

陈沛森 主编

责任编辑	杨晓鸣
出版发行	浙江大学出版社 (杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028) (E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn) (网址:http://www.zjupress.com)
排　　版	浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷	浙江大学印刷厂
开　　本	787mm×1092mm 1/16
印　　张	17.75
字　　数	420 千
版 印 次	2002 年 7 月第 1 版 2006 年 9 月第 3 次印刷
印　　数	5001—11000
书　　号	ISBN 7-308-02746-5/O·283
定　　价	25.00 元

内容简介

本书供高职、高专一年级学生两学期使用。全书共分十三章，内容包括预备知识、函数的极限、导数与微分、不定积分、中值定理与导数的应用、定积分和微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、数项级数和函数项级数。每章后配置适量的习题供学生练习，以达到巩固所学知识之目的。

前　言

本书依照教育部颁布的高职、高专“高等数学”教学大纲，并结合作者长期为工科类、经济类及管理类高职、高专学生讲授“高等数学”课所积累的教学经验编写而成，是高职、高专“高等数学”基础课教材。

结合目前高职、高专学生在学习本课程前所积累的初等数学知识特点，作者在编写本书时对内容和知识的编排上作了一定的调整。在第 1 章预备知识中除介绍函数概念外，还回顾了初等数学中一些重要公式和结果，对这些内容任课教师可根据学生的实际情况，在讲授时合理取舍。而第 3 章导数与微分结束后紧接着介绍不定积分，作者认为经过这样的处理，使学生能很自然地把微分公式或导数公式与积分公式联系起来，在记忆上更方便，掌握起来更容易。

根据不同专业对内容的不同要求，本书把数项级数与函数项级数分成两章。

与一些专科用的“高等数学”教材不同的是，作者在极限这一章后介绍了极限概念的精确描述，这为一部分具有较好数学功底的学生深入理解极限这一重要概念提供了很好的帮助。

值得一提的是，许多“高等数学”教材在最后都附有习题解答或提示。但是一旦有了解答，学生容易产生依赖性，而对知识的掌握也只能停留在一知半解上。作者认为在练习中应该让学生自己通过努力获得准确的答案，纠正错误是教师与学生的共同任务。所以编者在编写本教材时，不打算提供习题解答。

本书适合高职、高专工科类、经济类和管理类专业一年级学生使用，学完全部内容约需 144 学时。

参加本书编写工作的有陈沛森、王联荣、罗晓芳、金慧萍、潘媛五位同志，其中陈沛森负责编写第 1 章、第 2 章和第 4 章、第 8 章；王联荣负责编写第 6 章、第 10 章和第 11 章；罗晓芳负责编写第 3 章、第 5 章；金慧萍负责编写第 7 章和第 9 章；潘媛负责编写第 12 章和第 13 章。

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，书中一定存在不妥之处，希望广大读者批评指正。

编　者

2006 年 8 月

目　录

第1章 预备知识

初等数学的研究对象基本上是不变的量，即通常所讲的常量，而高等数学研究的主要对象是变量. 本章所要介绍的主要内容就是两个变量之间的依赖关系即函数关系，它是研究和讨论高等数学这门课程中诸如极限、连续、导数和积分的基础.

在高等数学中，函数的自变量和因变量都取实数，所以研究函数离不开实数. 这里我们将对实数及实数集作一简单的介绍，同时鉴于初学者在学习本课程前所掌握的初等数学知识的差异，我们也适当地介绍或复习初等数学中的一些重要结果和公式.

§1.1 实 数

一、集合

集合是数学中一个基本的概念，我们可通过例子来理解它. 一个教室里的学生构成一个集合，所有有理数或全体实数也分别构成集合，我们通常称为有理数集或实数集，等等. 一般地，集合(简称集)即具某种属性的事物的全体. 集合一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来记，而组成这个集合的事物称为该集合的元素，一般用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 来记. 事物 a 是集合 A 的元素记为 $a\in A$(读作 a 属于 A)；事物 a 不是集合 A 的元素记作 $a\notin A$(读作 a 不属于 A). 很显然，事物 a 与集合 A 的关系是：要么 $a\in A$，要么 $a\notin A$.

集合一般有两种表示法，即列举法和描述法. 所谓列举法就是把集合中的所有元素都列出来的方法，如 A 是由 2,4,6,8,10 五个数构成的集合，记作 $A=\{2,4,6,8,10\}$，也就是说 $\{\quad\}$ 把 A 的元素一一列举出来了. 而描述法就是通过给出元素的特性来表示集合的方法. 一般用 $A=\{a\mid a$ 具有性质$\}$来表示具有某种性质的全体元素 a 构成的集合. 如上述的集合 A 也可记为

$$A=\{2n\mid n\leqslant 5,n\text{ 为正整数}\}.$$

又如满足方程 $x^3+4x^2+3x=0$ 的全体根的集合 A

用列举法表示为 $A=\{0,-1,-3\}$；

用描述法表示为 $A=\{x\mid x^3+4x^2+3x=0\}$.

由此可见，一个集合可以有不同的表示法，即集合的表示法不是惟一的.

只含有一个元素的集合也叫单元集；不含有任何元素的集合叫空集，记为$\varnothing$，如方程 $x^2+1=0$ 的全体实数根的集合就是一个空集. 事实上，$x^2+1=0$ 在实数范围内无实根.

现在来考察两个集合：

$A=\{1,2,3,4,5\}$；

$B=\{1,2,3,4,5,7,9\}$.

可以看出 A 中的每一个元素都是 B 中的元素，即属于 A 的元素都属于 B，我们称 A 包含于 B，并记作 $A\subset B$. 当 $A\subset B$ 时称 A 为 B 的子集.

例 1 设 $A=\{0,1,2\}$，则集合 A 的所有子集是 $\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\},\varnothing$. 特别要注意在考虑集合 A 的所有子集时不要漏掉集合 A 本身和空集 $\varnothing$.

设 A,B 是两个集合，如果 $A\subset B, B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

很明显两个集合只有含相同元素时才相等.

例 2 集合 $A=\{0,-1,-3\}$ 与集合 $B=\{x\,|\,x^3+4x^2+3x=0\}$ 是相等的.

设集合 A,B,C，如果 $x\in C$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$，则称 C 为 A 与 B 的并集，记作 $C=A\cup B$. 显然并集 C 把集合 A,B 作为子集，即 $A\subset C$ 且 $B\subset C$.

例 3 $\{1,2,3\}\cup\{1,2,4,5\}=\{1,2,3,4,5\}$.

设集合 A,B,C，如果 $x\in C$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$，则称 C 为 A 与 B 的交集，记为 $C=A\cap B$. 可以看出集合 C 是由集合 A,B 的公共元素所构成，它是 A,B 的子集. 例 3 中给出的两个集合 $\{1,2,3\},\{1,2,4,5\}$ 其交集为 $\{1,2\}$，即

$$\{1,2,3\}\cap\{1,2,4,5\}=\{1,2\}.$$

二、实数集

高等数学这门课程主要是在实数范围之内讨论问题的，因此对于实数或实数集必须有比较清晰的认识. 在这一节我们将对此作一简单的介绍.

人们对实数的认识是逐步发展的，首先是自然数 0,1,2,3,4,⋯ 其全体记为 $\mathbf{N}$，并称之为自然数集，在 $\mathbf{N}$ 内我们可定义加法与乘法运算. 随着客观事物的发展，从自然数集扩充到有理数集，任一有理数都可以表示成 $\dfrac{p}{q}$（其中 p,q 为整数，且 $q\neq 0$）. 有理数集用 $\mathbf{Q}$ 记. 有理数集对通常的四则运算是封闭的（所谓封闭即对数集中各元素经四则运算后其值仍在数集中，当然除数不能为 0）.

虽然有理数集的引进解决了许多实际问题，但对如何表示方程 $x^2=2$ 的根这一问题却无能为力. 前人在有理数集基础上引进了实数集的概念. 实数包括有理数与无理数（如满足 $x^2=2$ 的 x 就是无理数，我们已知道 x 就是 $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$）. 实数集通常用 $\mathbf{R}$ 表示. 实数集对通常的四则运算也是封闭的.

有关实数的许多性质诸如有序性、稠密性及连续性都可通过数轴直观地加以解释. 数轴可如下确定：在一条直线上取定一点，记作 O，称其为原点；取直线的一个方向为正向，并用箭头表示；再取一个单位长度，就可构成数轴. 数轴上的任意一点 P，都对应一个实数 x. 这个实数 x 是这样确定的：若 P 与原点 O 重合，则 $x=0$；若 P 不与原点 O 重合，首先用所取的单位长度量出线段 OP 的长度 $|OP|$，如果有向线段 OP 与数轴正向相同，则 $x=|OP|$，如果有向线段 OP 与数轴正向相反，则 $x=-|OP|$. 反之，任给一个实数 x，都可以在数轴上找到一个点 P，使该点 P 所对应的实数为 x. 这样，数轴上的点与实数之间建立起一一对应关系（如图 1-1）：

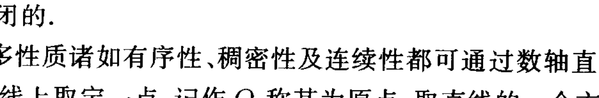


图 1-1

实数集合等价于数轴上点的集合. 在今后的讨论中，我们总把点与实数同等看待.

三、实数的绝对值

对任意实数，其绝对值用$|x|$表示，并且当$x>0$时$|x|=x$；当$x=0$时$|x|=0$；当$x<0$时$|x|=-x$. 如$|3|=3$，$|-3|=3$，$|0|=0$，等等.

绝对值$|x|$有明显的几何意义：实数x的绝对值等于数轴上点x到原点O的距离.

绝对值有如下几个主要性质(以下的x,y为任意实数)：

(1) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(2) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$；

(3) $||x|-|y||\leqslant |x-y|$；

(4) $|x\cdot y|=|x|\cdot |y|$；

(5) $\left|\dfrac{y}{x}\right|=\dfrac{|y|}{|x|}(x\neq 0)$.

证明 这里仅证明性质(2)，其他的证明留给读者完成. 由(1)

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|,\quad -|y|\leqslant y\leqslant |y|,$$

将上述两式相加得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|,$$

继续利用(1)得

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

四、区间与邻域

在实数集合$\mathbf{R}$的子集中，区间是我们讨论问题时经常涉及到的. 所谓区间就是介于某两点之间的一切点所构成的集合，这两个点称为区间的端点. 如果端点都是定数，则称为有限区间(并称两端点之差的绝对值为区间长度)，否则称为无限区间. 常见的区间有：

开区间	$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；
闭区间	$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；
半开半闭区间	$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；
	$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；
无穷区间	$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$；
	$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$；
	$(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}$；
	$(-\infty,a)=\{x\mid x<a\}$；
	$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

通常用大写字母如I表示某个给定的区间，另外需说明的是，上述提到的$-\infty$，$+\infty$及∞只是一种符号(分别叫做负无穷大，正无穷大和无穷大)，既不能看做数，也不能参与运算.

为了今后讨论问题在表达上的方便，还要介绍有关邻域的概念.

设$a\in\mathbf{R}$，$\delta\in\mathbf{R}$且$\delta>0$，则集合

$$\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

称为点a的δ-邻域，记作$U(a,\delta)$.

考虑不等式$|x-a|<\delta$，其等价不等式为

$$a-\delta<x<a+\delta,$$

所以 a 的 δ-邻域

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta).$$

这是以点 a 为中心，区间长度为 2δ 的开区间，正数 δ 叫做邻域的半径.

集合

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ-空心邻域，记作 $U^0(a,\delta)$. 称集合

$$\{x \mid a\leqslant x<a+\delta\} \text{和} \{x \mid a-\delta<x\leqslant a\}$$

为 a 的右邻域和左邻域，分别记作 $U^+(a,\delta)$，$U^-(a,\delta)$.

当不必指明邻域半径时，上述记号中的正数 δ 可省略，即邻域、空心邻域、右邻域和左邻域可简记为 $U(a)$，$U^0(a)$，$U^+(a)$ 和 $U^-(a)$.

例 4 利用区间表示不等式

$$x^2+x-12>0$$

的全部解.

解 先对不等式左端分解因式，得原不等式的等价式

$$(x-3)(x+4)>0,$$

即有 $x-3>0$ 或 $x+4<0$，即 $x>3$ 或 $x<-4$.

也就是说，对任何大于 3 或小于 -4 的实数都满足要求，故

$$\{x \mid x^2+x-12>0\}=(-\infty,-4)\cup(3,+\infty).$$

§1.2 平面上的直线与圆锥曲线

一、平面上点的表示

通过数轴（实轴）把实数与数轴上的相应点等同起来，通过平面直角坐标系也可把平面上的点与一有序数对等同起来.

在平面上取一点记为 O，过它作自左至右的水平实轴和自下至上的竖直实轴，两条实轴都以 O 点为原点，且单位相等，这样就构成平面上的直角坐标系，其中水平轴称为 x 轴或横轴或 Ox 轴，竖直轴称为 y 轴或纵轴或 Oy 轴，这时坐标系记为 xOy. 在平面上任取一点 M，过点 M 分别向 x 轴和 y 轴引垂线，垂足分别记为 P，Q. 因 P，Q 都是实轴上的点，它们分别惟一地对应实数 x 与 y（如图 1-2 所示）. 也就是说，点 M 惟一地决定了一有序实数对 (x,y)，其中 x 称为 M 的横坐标，y 称为 M 的纵坐标.

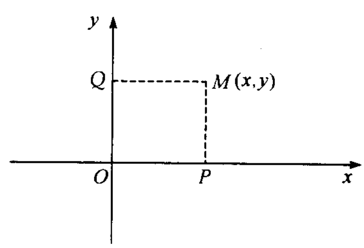


图 1-2

反之，任意给定一个有序数对 (x,y)，可以在平面上找到一点 M，使 M 的横坐标、纵坐标分别为 x 与 y. 这样，通过建立坐标系就把平面上的点与有序数对一一对应起来了. 平面上任何一点 M 都可惟一地用一个有序数对 (x,y) 来表示；反之任一有序数对 (x,y) 都惟一表示平面上的一个点 M. 点 M 对应的有序数对 (x,y) 称为点 M 的坐标.

平面直角坐标系对应的两条有向直线把平面分成四个部分，自右上角逆时针方向旋转，

分别称为第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限.

例 5 设 M,N 分别是平面上的两点，其坐标分别是 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，试求两点 M,N 间的距离 $d(M,N)$.

解 如图 1-3 所示

$$d(M,N)=\sqrt{MP^2+PN^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

特别地，点 M 到原点的距离为

$$d(M,O)=\sqrt{x^2+y^2},$$

其中 M 的坐标为 (x,y).

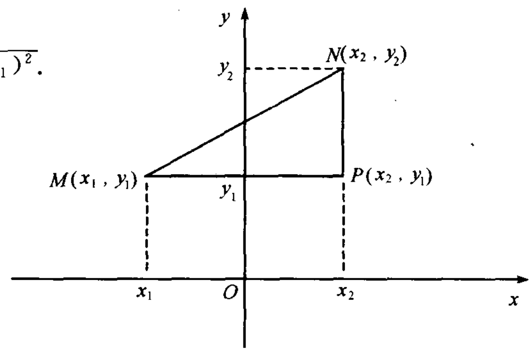


图 1-3

二、平面上的直线

在平面直角坐标系 xOy 中，直线可分为两类，一类直线与 y 轴平行，另一类与 y 轴相交. 与 y 轴平行的直线必与 x 轴垂直相交，若交点是 $(c,0)$，则其方程为

$$x=c,$$

与 y 轴相交的直线 l，其方程为

$$y=kx+b.$$

如果从 x 轴正向沿逆时针与 l 的夹角为 α，则 $k=\tan\alpha$.

当 $\alpha=0$ 即直线 l 与 x 轴平行（当然与 y 轴垂直）时，$k=0$，也就是说，与 x 轴平行的直线可用 $y=b$ 来表示.

例 6 设直线 l 经过两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$，试求直线 l 的方程.

解 如图 1-4 所示

$$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

任取直线 l 上一点 $P(x,y)$，有

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \tag{1}$$

这里 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$b=y_1-\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1$.

方程(1)叫做直线 l 的两点式方程.

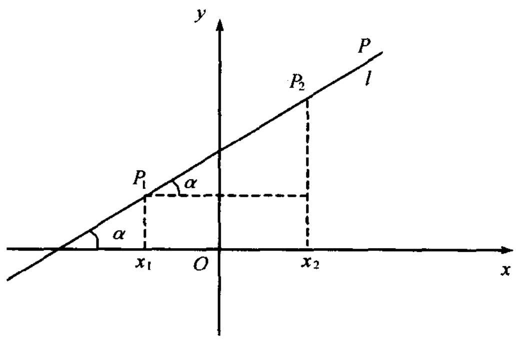


图 1-4

三、圆锥曲线

为便于今后的学习，我们简单介绍平面上四种重要曲线：圆、椭圆、双曲线和抛物线. 它们统称为圆锥曲线.

1. 圆方程

以点 (x_0,y_0) 为圆心，半径为 R 的圆方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, \tag{2}$$

它叫做圆的标准方程.

圆的一般方程形如

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \tag{3}$$

其圆心为$\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$，半径为$\sqrt{\dfrac{D^2+E^2}{4}-F}$.

例 7 求过三点 $A(0,0)$，$B(1,1)$，$C(4,2)$的圆的方程，并求这个圆的半径和圆心坐标.

解 设所求圆方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

用待定系数法，根据所给条件可确定 D,E,F 的值.

因 A,B,C 在圆周上，所以它们的坐标满足圆的一般方程，把它们的坐标依次代入得到关于 D,E,F 的三元一次方程组

$$\begin{cases} F=0, \\ D+E+F+2=0, \\ 4D+2E+F+20=0, \end{cases}$$

解这个方程组得 $F=0$，$D=-8$，$E=6$.

于是得到所求圆的一般方程为

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

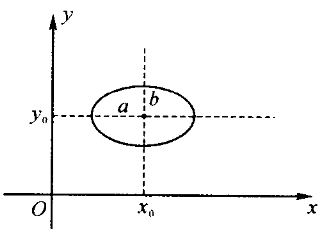
圆的半径 $R=\sqrt{\dfrac{D^2+E^2}{4}-F}=5$，圆心坐标为$(4,-3)$.

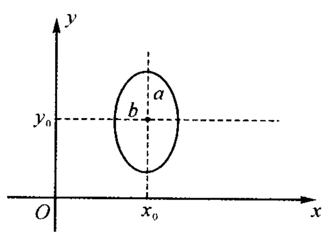
2. 椭圆方程

以(x_0,y_0)为中心，长半轴(在 $y=y_0$ 上)长为 a，短半轴(在 $x=x_0$ 上)长为 b 的椭圆标准方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

其曲线如图 1-5 所示.





如果长半轴(长为 a)在 $x=x_0$ 上，短半轴(长为 b)在 $y=y_0$ 上，则标准方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1,$$

其曲线如图 1-6 所示.

椭圆周内的平面区域叫做椭圆面，其面积值为 $S=\pi ab$，这里 a,b 分别表示两个半轴之长.

显然当 $a=b$ 时，椭圆就成为圆，也就是说，圆是椭圆的特例.

3. 双曲线方程

焦点为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$的双曲线标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

同理焦点为 $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$的双曲线标准方程为

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

其中 $c>0$ 且 $c^2=a^2+b^2$，它们的图形如图 1-7、图 1-8 所示.

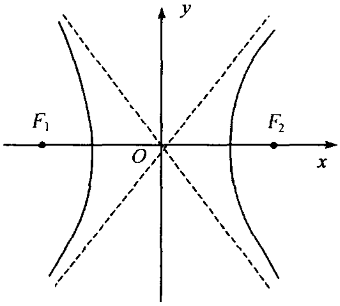


图1-7

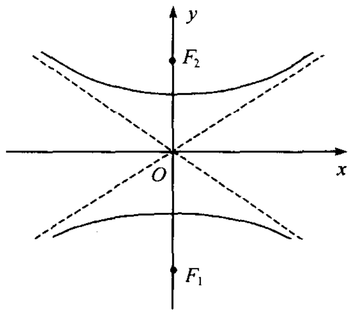


图1-8

我们考虑双曲线方程左端并令其为 0，即$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$，得两条相交于原点的直线(图 1-7、图 1-8 中两条虚线)：

$$y=\frac{b}{a}x \text{ 和 } y=-\frac{b}{a}x,$$

这两条直线称为双曲线的渐近线. 双曲线与渐近线永不相交，但随着动点 $P(x,y)$移向无穷远处，动点 P 到渐近线的距离趋向于 0.

4. 抛物线方程

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，点 F 叫做抛物线的焦点，直线 l 叫做抛物线的准线.

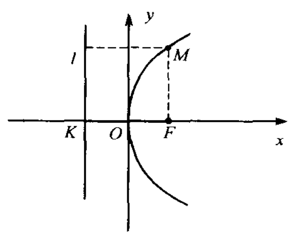


图 1-9

取经过焦点 F 且垂直于准线 l 的有向直线为 x 轴，x 轴与 l 相交于点 K，以线段 KF 的垂直平分线为 y 轴(如图 1-9 所示). 设 $d(K,F)=p$，那么，焦点 F 的坐标为$(\frac{p}{2},0)$，准线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$，抛物线的标准方程为

$$y^2=2px(p>0).$$

应该指出，一条抛物线，由于它在坐标平面上的位置不同，方程也不同，所以抛物线的标准方程还有其他几种形式：

$y^2=-2px$，焦点坐标为$(-\frac{p}{2},0)$，准线方程 $x=\frac{p}{2}$；

$x^2=2py$，焦点坐标为$(0,\frac{p}{2})$，准线方程为 $y=-\frac{p}{2}$；

$x^2=-2py$，焦点坐标为$(0,-\frac{p}{2})$，准线方程为 $y=\frac{p}{2}$.

上述几种抛物线的顶点都在原点$(0,0)$. 结合坐标轴的平移，还可得到顶点不在原点的抛物线，如$(y-2)^2=3(x-1)$表示顶点在$(1,2)$的抛物线.

§1.3 函　　数

一、函数的概念

在研究自然的、社会的以及工程技术的某个过程时，常常会碰到各种不同的量，如时间、速度、质量、温度、成本和利润等. 这些量一般可分成两类，其中一类量在所研究过程中保持不变，这种量被称为常量，而另一类量在所研究过程中总是变化着的，我们把它叫做变量.

例 8　考虑圆的面积 S 与它的半径 R 之间的关系. 大家知道，它们之间的关系由公式 $S=\pi R^2$ 给出. 当半径 R 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 S 的相应数值.

例 9　需求与价格的关系. 设市场对某种商品的需求量 Q 在一定时期只受到价格 p 的影响，而且它们之间的依存关系符合 $Q=Ae^{-bp}$，其中 $A\geqslant 0, b>0$，均为常数，通过这一关系式我们就能清楚地了解到这种商品的需求量随价格变化的情况.

抽去上面两个例子中所考虑的量的实际意义，它们都表达了两个变量之间的相互依存关系，这种关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任取一值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1　设 D 是给定的数集，x,y 是两个变量. 如果任取一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则(记为 f)总有值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量，而函数值 $y=f(x)$ 的全体

$$W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

叫做函数的值域.

当自变量在定义域内任取一个值时，对应的函数值是惟一确定的，则称此函数为单值函数. 如果对应的函数值不只一个，我们就称这个函数为多值函数. 例 8、例 9 中给出的函数是单值函数. 下面举一个多值函数的例子.

例 10　由方程 $y^2=2px(p>0)$ 给出了变量 y 与 x 的关系，在 $[0,+\infty)$ 内确定了一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，当 $x=0$ 时，y 有惟一的值与 0 对应；而当 x 在 $(0,+\infty)$ 内任意取值时，因变量 y 有两个值与 x 对应，它们分别是 $\sqrt{2px}$ 和 $-\sqrt{2px}$，所以这个函数就是多值函数.

以后凡是没有特别指明时，函数都是指单值函数.

应特别指出的是，从函数的定义中可看到，定义域与对应法则是构成函数的两个要素，在描述任何一个函数时，必须同时说明这两个要素.

例 11　讨论 $y=\log_a x^2$ 与 $y=2\log_a x$ 是否是同一函数.

解　$y=\log_a x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $y=2\log_a x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由于两者定义域不同，不能视为同一函数，当然在它们的公共定义域内，即在 $(0,+\infty)$ 内是一致的.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，任取 $x\in D$ 得相应值 $y=f(x)$，则数对 (x,y) 在 xOy 平面内确定了一点 (x,y). 我们称集合(平面上点的集合)

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

为函数 $y=f(x)$ 的图形(或图像).

例 12 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图形 C 如图 1-10 所示. 它包含第Ⅰ,Ⅲ象限内两支的双曲线.

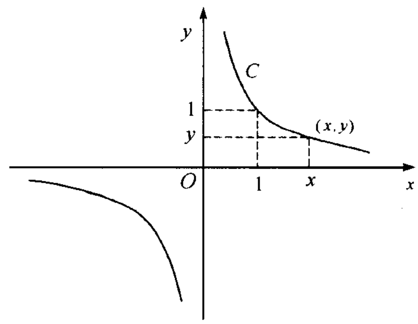


图 1-10

二、函数的几个重要特性

研究函数的目的就是为了了解它所具有的特性,以便掌握它的变化规律.

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$,定义域为 D,I 是 D 的子集,如果对任意 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$,使

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 I 内单调递增;如果对 $x_1<x_2$ 使

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 内单调递减. 函数在 I 内具有单调递增或递减的性质叫做函数的单调性,而函数 $y=f(x)$ 叫做在 I 内的单调递增或递减函数,统称为单调函数.

例 13 证明 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增的.

证明 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$,则有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0,$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$,也就是说 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增的.

函数的单调性与自变量所取范围有关,因此讨论函数的单调递增或递减时,首先要搞清楚自变量的取值范围. 如函数 $y=x^2$ 在定义区间 $(-\infty,0)$ 内单调递减,在 $(0,+\infty)$ 内单调递增,但在整个定义区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不具有单调性.

另外,用单调性的定义去直接检验函数是否具单调性一般是比较困难的. 关于这个问题我们将在第 5 章运用导数方面的知识去解决它.

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是一个对称集(即若 $a\in D$ 则 $-a\in D$),如果对所有的 $x\in D$ 都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为 D 内的奇函数;如果对所有的 $x\in D$ 都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为 D 内的偶函数.

例如 $y=\sqrt{1-x^2}$,$y=x^4$ 是偶函数;$y=x^3$,$y=\sin x$ 是奇函数. 对幂函数,当 n 为偶数时,$y=x^n$ 为偶函数;当 n 为奇数时,$y=x^n$ 为奇函数.

显然偶函数的图形关于 y 轴对称;奇函数的图形关于坐标原点对称. 图 1-11 表示关于 y 轴的对称函数 $y=f(x)$ 的图形;图 1-12 表示关于原点对称函数 $y=f(x)$ 的图形.

例 14 判定函数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与函数 $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的奇偶性.