

数学

文化

概论

Shuxue Wenhua Gailun

胡炳生 陈克胜 编著

从文化角度阐述数学的文化品格、理性精神、数学与哲学、自然科学、社会科学，以及与人文修养、日常生活等诸方面的联系。书中穿插介绍科学史上一些经典数学事例，对于认识和体会数学的精神、思想和方法，富有启示和教育作用。特色：综合、全面论述数学文化的内涵，阐述数学与文理各科的联系，体现数学的文化价值和实际应用。

安徽人民出版社

数学

胡炳生 陈克胜 编著

江苏工业学院图书馆
藏书章

概论

安徽人民出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学文化概论/胡炳生, 陈克胜编著. —合肥: 安徽人民出版社,
2006

ISBN 7 - 212 - 02931 - 9

I. 数... II. ①胡... ②陈... III. 数学—文化—研究
IV. 01 - 05

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 091877 号

数 学 文 化 概 论
胡炳生 陈克胜 编著

出版发行: 安徽人民出版社

地 址: 安徽合肥市金寨路 381 号九州大厦 邮 编: 230063

发 行 部: 0551 - 2833066 0551 - 2833099 (传真)

组 编: 安徽师范大学编辑部 电话: 0553 - 3883578 3883579

经 销: 新华书店

印 制: 安徽芜湖新华印务有限责任公司

开 本: 889 × 1194 1/32 印张: 6.5 字数: 163 千

版 次: 2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

标准书号: ISBN 7 - 212 - 02931 - 9

定 价: 17.00 元

本版图书凡印刷、装订错误可及时向承印厂调换



作者简介：胡炳生，1937年生于湖州，祖籍安徽含山县。安徽师范大学数学计算机学院教授，国务院特殊津贴获得者。1959年毕业于安徽师范学院（即今安徽师范大学）数学系，遂留校任教至今。从事高等数学教育和数学史、数学教育研究40余年，出版和发表论著180多篇（部）。近年来注意数学文化研究，发表论文多篇。业余爱好中华诗词，获我国首届“华夏诗词奖”二等奖（2006年），出版有《古月斋诗词选》。



作者简介：陈克胜，1970生，汉族，安徽铜陵人。2005年华中师范大学“课程与教学论”硕士研究生毕业，现在安徽师范大学数学计算科学学院从事高等数学、数学史、中等教学研究、数学教育的教学与研究工 作，已发表论文近10篇。

祝您心中有数

(代前言)

中国有句古话，叫做“凡事要心中有数”。不是吗？

——介绍你自己：身高、体重、年龄，接受几年教育，都要用数字；

——了解你自身身体状况：血压、血脂、血糖等，也都要用数字（数量指标）；

——了解市场行情：物价、股票指数、存贷款利率等，也要用数字说话；哪一样离得开“数”？

那么，我们怎样才能做到“心中有数”呢？——要接受数学教育，学习数学，亲近数学。所以，从小学到高中，数学是每个学生学习的必修课。到了大学以后，文科许多专业却不再学习数学了；文科学生逐渐远离了数学，认为数学对于文科学生不再重要了。

其实不然。现代的文科——人文科学，对数学的需求越来越多，越来越需要依赖数学来提升其科学水平。这是因为任何事物都有质和量两个方面，而且质和量是互相联系、又可以互相转化的。如果对事物的数量不注意研究，“心中无数”，就不能深入到事物的内部，发现和掌握它的变化发展规律。例如，现代经济学的规律，都要用数学公式、数学图表来反映和表示。近几十年来诺贝尔经济学奖的获得者，多半是经济学界的数学家，或者是精通数学的经济学家。甚至以前与数学从无关系的文学、史学和诗歌研究，也引进了数理统计的方法，从而获得新的科学发展的增长点。

总之，文理融合，在文科中引进数学的方法和手段，进行综合研究，是现代科学发展的一种趋势。有鉴于此，许多大学文科专业纷纷开设大学数学、数学文化等选修课程。

当然，数学，尤其是现代数学，抽象程度较高，对文科学生来说，可能学起来感到困难。甚至有人说：我一看到数学公式，就感到头疼，哪能学得进去？

针对如此情况，我们的建议是：不妨从文化的角度，来学习和领会数学的思想方法；从科学发展史上的著名成功范例，来了解数学与各个学科的联姻和结盟的过程。这是因为，数学本身也是文化的一种——数学文化。古代文化的各个方面，原本就渗透有数学知识和数学思想方法。数学是人们生活必需的知识，它与人们生活紧密联系，只是我们平时没有注意罢了。

对于从事非数学专业工作的人来说，数学的重要意义，主要并不是那些复杂的数学定理和公式，而在于数学的思想方法。例如，数学思维的基本原则：熟悉化原则、简单化原则和灵活性原则，是对所有人、从事各种工作的人，都是有现实指导意义的。

数学的美学思想——对称美、和谐美、简约美和奇异美，对建筑、绘画、音乐，以及人们的日常生活，都有指导和借鉴意义。

数学，不仅是人的素质中必不可少的重要成分，与我们的人文修养也有着重要关系。数学能给人以智慧，提高人的理性思维能力，激发其求实创新精神。

非数学专业的大学生，学习数学，要讲求学习方法。他们可以不去系统学习多少高等数学，而是要从数学文化，从科学文化史的典型事例，来领会数学精神，了解数学思想方法，了解运用数学解决实际问题的思路和方法，了解数学与本专业的联系，了解数学与生活的联系。这样学习数学，就一定会有成效。

祝您心中有数！

胡炳生于安徽师大
2006年7月

目 录

祝您心中有数 (代前言)	1
第一章 绪论: 数学文化的品格	1
第一节 请看 21 世纪门口挂的牌子上写的什么?	1
第二节 数学是什么?	2
第三节 数学文化的特点	5
第二章 数学与哲学	15
第一节 数学与哲学结缘	15
第二节 数学史上的“三次危机”	23
第三节 数学中的辩证法	29
第三章 数学与自然科学	37
第一节 数学超越自然科学	37
第二节 数学是科学发现的利器	40
第三节 数学是自然科学研究的有力工具	53
第四节 数学技术是高新技术的核心	61
第四章 数学与经济、文史	68
第一节 数学与经济学	68

第二节 数学与语言学、文学	76
第三节 数学与新闻、历史及其他	85
第五章 数学与教育	98
第一节 数学是基础教育的基本内容	98
第二节 大众数学和数学技术教育	103
第三节 数学使教育科学化	107
第六章 数学与文艺	113
第一节 逻辑思维与形象思维的互补性	113
第二节 数学美	115
第三节 数学与音乐	125
第四节 数学与绘画	129
第五节 数学与诗歌	140
第七章 数学与修养	144
第一节 数学与智慧	144
第二节 数学与修养	147
第三节 数学与创新	150
第八章 数学与生活	157
第一节 生活离不开数学	157
第二节 数学使生活更精彩	168
第三节 数学游戏	185
参考书目	202
后记	204

第一章 绪论：数学文化的品格

第一节 请看 21 世纪门口挂的牌子上写的什么？

据说在公元前 4 世纪古希腊的雅典，著名的“柏拉图学园”大门口，挂着一块醒目的牌子，其上写着：“不懂几何者不得入内”。我国当代数学家齐民友先生，在 21 世纪的前夜，写过一篇文章，文中称：“21 世纪的门口也挂着一块牌子，其上写着：“不懂计算机者不得入内”。而计算机专家王选则说：“计算机 = 数学的心脏 + 机械的外壳”。

由此看来，对于所有跨入 21 世纪的人来说，不仅要懂得计算机，而且还要懂得数学，否则，也不能掌握计算机的心脏。

另一方面，数学不仅是一门科学，而且是一门艺术，一种思维方法，它能给人以智慧。而在“知识爆炸”的今天，对于我们每个人来说，智慧是比知识更为宝贵的。我们都需要学会“数学地”思考问题，学会用数学方法和数学技术来解决问题。

然而对于多数公众来说，对数学，特别是对现代数学及其思想方法，并没有足够的了解，甚至很少了解。即使在最发达的美国也是如此。在 1984 年，美国的一个专门机构就提出过“扫除数学文盲”的口号。它说：“在现今这个科技发达的社会里，扫除数学文盲的任务，已经代替了昔日扫除文盲的任务，而成为当今教育的主要任务。”

21 世纪的中国,实施“科教兴国”的战略,全面建设小康社会,需要大批文理兼通的高素质建设人才。因此,在社会公众、首先是在非数学专业的大学生中扫除“数学文盲”,也应成为我们教育的一项重要任务。

当然,大学生起码有中学数学知识,不能说是完全的“数学文盲”。但是,仅凭这一点是不够的。为了适应现代信息社会的发展,随着科学综合化发展的进程,非数学专业的大学生,应该亲近数学,学一点现代数学知识,了解一些现代数学的思想方法,学会“数学地”思考和理解问题,用数学的思维方法和数学技术处理问题,从中获得智慧,吸取力量。

第二节 数学是什么?

一、数学是人类文化最重要的部分

“数学是什么?”这个问题对于不同的人有不同的回答。对于数学专业的人来说,数学是一门关于模式(空间形式和数量关系)的科学;对于中学生来说,它是一门必修的基础课;而对于非数学专业的社会公众来说,最方便的回答是:数学是一种文化。

数学的确是一种文化,而且是人类文化的重要组成部分。

凡是经过人类创造的、一切非自然的物质财富和精神财富,都属于文化范畴。数学,作为人类思维的创造物,当然是人类文化的一种。那种认为文化只是“读书识字”,把数学排除在文化之外的观点,是非常错误的。

“知识就是力量”。人类改造自然,创造物质财富和精神财富的力量,来源于知识。知识是人的社会实践经过大脑思维加工的结果。人类在实践和思考中获得知识、技能和智慧。数学,不仅是自然科学和社会科学的共同基础,而且是思维的体操。人们通

过学习数学，不仅可以把握事物的空间形式和数量关系，而且培养和发展了思维能力。所以，数学不仅是人类文化的组成部分，而且是其中最重要的组成部分。

二、数学的特点

数学是人类文化的组成部分，但是，它又是一种特殊的文化，有其自身的特点。

一般人都可以感觉到：数学不仅与文学艺术等文化品种不同，而且与物理、化学、生物等自然科学也不同。数学最显著的特点，就是它的抽象性、精确性和逻辑性，以及它的应用的广泛性。

首先来看数学的抽象性。数学中研究的数“2”，不是“2个人”、“2个苹果”等具体物件的数量，而是完全脱离了这些具体事物的抽象的“数”。数学中研究的形——三角形、四边形等，也不是三角板、长方形纸片或足球场等具体形状，而是与这些具体事物完全无关的、抽象的“几何图形”。

再看数学的精确性。数学计算式子，如“ $3 + 5 = 8$ ”，它是精确的，不是近似的，估计的。欧氏几何定理“三角形三内角之和等于 180° ”，是从几何公理和定理，经过逻辑推导出来的，而非猜测、估计、测量和实验得到的。

数学的抽象性，决定了数学应用的广泛性。正因为“ $3 + 5 = 8$ ”是抽象的，超乎一切具体的事物之外，结论是精确的，所以它对于任何领域里的事物都适用。在小学和中学里学习的算术、代数和几何知识，是人们日常生活中应用最为广泛的知识。随着社会的进步，概率统计知识逐渐进入人们的日常生活领域。例如彩票中奖率、股票期望值、期望寿命、风险投资等，都要用到概率统计知识。所以现在中学数学教材改革的一个要点，就是要增加概率统计的内容。

但是，数学，特别是现代数学新的理论成果，未必都能立即

找到实际应用。数学中的许多理论、定理和公式，是经过相当长的时间，才发现其在实际中应用的。

例如，希腊数学家阿波罗尼乌斯（约前 262—前 190），在公元前 2—前 3 世纪就著《圆锥曲线论》，对椭圆、双曲线和抛物线的性质作了系统研究。他用几何方法得到了和我们今天所知道的关于圆锥曲线的全部结论。但是在其以后的将近 2000 年中，人们几乎没有找到圆锥曲线的什么实际应用。这不等于说圆锥曲线没有用。果然，在 17 世纪初，德国天文学家开普勒（1571—1630）发现了行星运动三大规律，原来，地球等太阳系行星，是沿着椭圆轨道绕太阳运动的，而以太阳为其椭圆轨道的一个焦点。其后，牛顿利用他发明的微积分理论，证明了宇宙中所有天体运行的轨道，都是圆锥曲线——椭圆，双曲线，或者抛物线。据此，人们可以事先计算出这些天体运行的轨道，并根据计算的数据来准确地对它们进行天文观测。

现代数学中的“群论”是数学中“抽象的抽象”。然而，物理学家利用“群论”中对称群来研究晶体，在自然界中找到了所有对称的晶体。另外，现代物理学家发现，在微观世界里，量子力学的规律已经不能用牛顿力学的“三大定律”来描述了，而正好可以用对称群理论来刻画。

科学史上的这些典型事例，说明了数学理论的巨大力量 and 实际价值。这是数学的胜利，也是数学理论巨大价值的光辉体现。

三、“数学地”思考问题

诚然，不能指望每个数学定理或数学公式在我们日常生活中都有用处。事实上，我们在学校中所学的数学定理，如勾股定理、三垂线定理等，除了做数学题目以外，在以后的工作和生活中直接用到的很少，或者根本就没有用过。但是，通过数学学习所获得的数学思想方法和数学思维习惯，在我们日常生活和实际工作

中却时时、处处都在起作用。特别是，现代社会越是发展，所见所做的事情越来越复杂，更需要我们用数学的思维方式、方法去观察、思考和理解，即需要我们“数学地”去思考 and 解决。

所谓“数学地”思考和理解问题，说得详细一点，就是要用以下基本数学观点来看问题：

数量观点——只有把握事物的数量变化，才能作到“心中有数”；

函数观点——事物之间的关联性，常常可以用量与量之间的函数关系来表达；

概率统计观点——用抽样调查和数据分析的方法来处理随机现象；

空间观点——从事物的形体上去认识事物；

图和网络观点——把事物之间的复杂关系，约化为一个图或者网络，进行数学处理；

统筹观点——统一规划，全面考察事物的各个方面，考察它与周围事物之间的联系，找出解决问题的最佳方案；

程序化观点——一事当前，先进行可行性研究，合理安排工作的步骤和实施顺序，如要用计算机来处理，则更要事先编出操作程序；

逻辑观点——说话要有根据，下结论要有充分的理由，办事要有条件。

我们相信，如果在解决问题时，大家都能这样“数学地”去思考，那么，一定能把事情做得更好一些。

第三节 数学文化的特点

一、抽象性和逻辑性

这是数学文化最为显著的特点。我们先从一个关于苏格兰黑

羊的故事说起。

英国苏格兰的北部，是一望无际的大草原。在阳春三月里，一列火车正行进在这大草原上。一节车箱里有三位旅客——一位数学家，一位文学家和一位物理学家，他们正凭着车窗向外远望这大草原的美丽景色。在这茫茫的大草原上，在蓝天白云下，一群群黑羊像乌金一样飘洒在绿油油的草原上，非常好看动人。这黑羊是苏格兰草原的特有动物。面对着这美丽的景色，文学家不由得诗兴大发，即兴吟诗一首：啊，多么漂亮的草原，到处都飘洒着像乌金一样的羊群！……。

听着文学家的吟颂，物理学家不以为然，说道：“老兄，你说得不对。”

“为什么？”文学家反问道。

物理学家说：苏格兰草原有几百平方公里，而我们的火车只是沿着一条铁路行进。凭我们眼力所能够看到的，大约只能看到20—50公里远的范围，怎么能说整个苏格兰草原到处都有黑羊呢？

“那依您应该怎么说呢？”文学家反问道。

“依我说啊，只能这样说：苏格兰草原上的铁路沿线，在人的视力范围内，有一群群黑羊。”

正当他二人争论不休时，数学家插话说：“您二人说得都不对。”

“难道我说的也不对吗？”物理学家不服气地说。

“是的，先生。”

“为什么？”

“您想想看：我们坐在车上，只能看到羊的一面；您也没有下去看羊的另一面，是不是也是黑的，怎么就能断定整个羊都是黑的呢？”

“那依您应该怎么说呢？”文学家不客气地说。

“依我说啊，只能这样说：在苏格兰草原上，至少有这么一群

羊；其中至少有这么一只羊，它至少有一面是黑的。”数学家慢条丝理地说。

物理学家和文学家都大为惊讶，并深感佩服。

对于同一件事物，三个人有三种不同的看法和说法。原因何在？那是因为他们的思维方式方法不同。文学家用的是形象思维，他用事物的观念、形象作为思维的基本素材，运用联想和想象为手段。凡是他想到的，都可以当作是真事来对待，而不需要再行检验。物理学家用的是直觉思维，经过实验证实的，才认为是真理；单凭人们的想象是不行的。而数学家，则用逻辑思维来进行思考。必须经过逻辑推理得到确认的，才是真理。实验只能以事实来证实，而不能从逻辑上证明。

从这个例子可以看出，数学家的眼光是很特别的。他们观察事物，思考问题，虽然是抽象的，但却是经过逻辑推演的，因而是严格的，确定无疑的。数学上的所有定理、公式，都是这样经过严格的逻辑证明的。

这个例子说明数学家考虑问题的特点。那么数学家在解决问题时又是怎样想，怎么做的呢？再请看下面的例子。

唐代著名诗人王之涣，有一首脍炙人口的五言绝句《登鹳雀楼》：

“白日依山尽，黄河入海流。欲穷千里目，更上一层楼。”

一千多年以来，这首好诗，几乎家喻户晓，许多人都能背诵。人们从来没有怀疑过它有什么问题？

但是，在1999年，一位数学教师对此发出了疑问，他写了一篇文章，题目是《欲穷千里目，需上几层楼？》^①。文中提出：欲想看到千里之外的景物，更上一层楼，显然是不行的。那么需要上多少层楼才行呢？这就变成一个有趣的数学问题。数学家是怎样解决这个问题的呢？

^① 参见：范春来，欲穷千里目，需上几层楼？中学数学教学，1999（1）：39。

一千里（华里），就是 500 公里。在这样大的范围里考虑问题，就不能把地球表面看作是平面了，而要把它看作球面。于是，可以画出以下的示意图，如图 1-1。

首先将实际问题抽象化。把地球抽象成一个球，而将高楼和人的视线所在的地球截面假设为一个圆。如图 1-1 所示，高楼为 AB ， O 为地球球心，人的视线为 AC 。连接 OC ，构成直角三角形 ACO 。再设地球半径为 $R = 6370$ （ km ），楼高为 x （ km ），依据勾股定理，便有关系式：

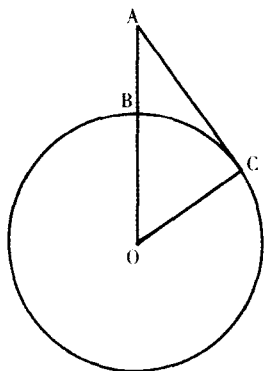


图 1-1

$$AC^2 + OC^2 = AO^2,$$

即 $500^2 + R^2 = (R + x)^2$ ，或 $x^2 + 2Rx - 500^2 = 0$ 。

将 $R = 6370$ 代入上式，得

$$x^2 + 12740x - 250000 = 0$$

这是一元二次方程，据求根公式，便求得其解为：

$$x \approx 19.6 \text{ (km)}.$$

假如每层楼高度为 $4m$ ，那么，该楼就有 4900 层。

按照这位先生的计算，那么，王之涣的这首诗的后两句，就要改成：

“欲穷千里目，须上四千九百层楼”，还要加附注：“假如每层楼高 $4m$ ”。

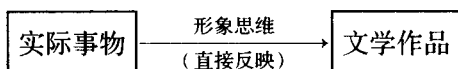
当然，这就不成其为诗了。但它是逻辑思维的精确定果。

在具体处理问题时，文学家和数学家也不同：文学家只要把他主观想象得到的形象、观念，用文字记录下来，就可以创作出文学作品。而数学家则必须先将实际问题抽象化，数量化，用数学语言和数学符号，使其化为一个纯粹的数学问题（方程、不等

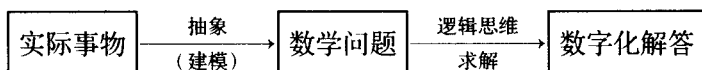
式等)，再用数学的方法进行分析和求解，最后求得数字化的解答。

这就是说，文学家的创作，是对实际事物的直接反映；而数学家必须先将实际问题抽象化（数学化），化成数学问题之后，再用数学方法来解决。这个抽象化和数学化的过程，在数学上叫做“建模”（建立数学模型）。

文学家思维过程：



数学家思维过程：



二、数学的理性精神

所谓理性精神，就是讲求理性认识。依靠人的感官，对外界事物进行感知，从而获得对事物的表象、观念，这是感性认识。人们应用分析和综合、抽象和概括等思维方法，对各种感性材料进行整理和加工，使形成概念、判断（命题）、推理和证明，这就将感性认识上升到了理性认识。重视人的理性认识活动，以寻找对事物的本质、规律及其内部联系的认识，这就是理性精神。

一般说来，任何一门学问，尤其是科学，都追求对事物的理性认识，其中以数学为最。整个数学和一部数学史都充满了理性精神。

当数学作为一门演绎科学，在公元前6世纪的希腊诞生之日起，数学就充满着理性精神。下面以几何与三次数学危机为例作一说明。

（1）从《几何原本》到非欧几何