代　　数

第五分册

（初　稿）

天津市广播函授大学
預科数学教研組編

高等教育出版社

代　数

第五分册

（初　稿）

天津市广播函授大学預科数学教研組編

高等教育出版社出版北京宣武門内承恩寺7号

（北京市書刊出版業营業許可証出字第054号）

人民教育印刷厂印装・新华书店发行

統一書号13010・630　開本850×1168 1/32　印張1 7/16

字數34,000　印數3,501—10,500　定價（6）¥0.16

1959年5月第1版　1959年0月第2次印刷

目　录

第八章　一元一次方程

1）**等式和不等式**　用等号“＝”联結两个代数式，所成的式子叫做等式。例如：$3+2=5$，$a+b=b+a$，$s=\pi r^2$，$x+1=3$ 等都是等式。

用不等号“$<$、$>$、$\neq$”联結两个代数式，所成的式子叫做不等式。例如：$1>\frac{1}{2}$，$3<1+4$，$a+2>a+1$，$x\neq y$ 等都叫做不等式。

在等号（或不等号）左边的代数式，叫做等式（或不等式）的左边，右边的代数式，叫做等式（或不等式）的右边。例如：对于等式 $3x+1=2x-1$ 来説，$3x+1$ 叫此等式的左边，而 $2x-1$ 叫此等式的右边。

2）**恒等式**　在含有字母的等式里，如果不論用什么数值（只要是允許的）来代替其中的字母，使两边都相等，那末这样的等式叫做恒等式。例如：$a+b=b+a$，$(a+b+c)m=am+bm+cm$，$2(a-1)=2a-2$。

只由数字組成而两边相等的等式，例如：$2+3=5$，$3\times2+1=7$ 等也是恒等式。

等式 $\frac{6}{2x}=\frac{3}{x}$ 是不是一个恒等式呢？当用“0”代替 x 时，等式的两边都沒有意义。因此 x 的允許值是不等于零的任何数。当 x 等于零以外的任何数值时，等式都成立，所以这个等式是恒等式（0 除外）。

3）**方程**　在含有字母的等式里，有些字母是用来表示已知数的，而有些字母的值是需要我們去确定的，这些字母所表示的数叫做未知数。

含有未知数的等式，叫做方程。例如：$x+1=3$，$2(x-1)=5x+$ $+4$，$x+x=2x$，$x+1=x+2$ 等都叫做方程。

使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解，或叫做方程的根。例如：用 2 代替方程 $x+1=3$ 里的 x，方程两边的值都等于 3，所以 2 是这个方程的解。

用任何数代替方程 $x+x=2x$ 里的 x，方程两边的值都相等，所以任何数都是方程 $x+x=2x$ 的解。也就是說，这个方程的解有无数多个。我們容易看出，这种方程就是含有字母的恒等式。

用任何数代替方程 $x+1=x+2$ 里的 x，方程两边的值都不相等。事实上，任何数加上 1 总比这个数加上 2 小，因此两边永远不相等。所以这个方程无解。

求方程的解或者确定方程沒有解的过程，叫做解方程。

我們把等式、恒等式与方程的关系列表如下：

$$\text{等式}\begin{cases}\text{不含字母的，例 } 1+2=3 \\ \text{含字母的}\begin{cases}\text{例 } x+x=2x \\ \text{例 } x+1=2 \\ \quad x+1=x+2\end{cases}\end{cases}$$

不含字母的（例 $1+2=3$）与 $x+x=2x$ 是恒等式；$x+x=2x$、$x+1=2$、$x+1=x+2$ 是方程。

習 題

1. 确定下列等式里哪些是恒等式：

1) $x+2=2x$；　　2) $x(x-1)=x^2-x$；

3) $x-\frac{1}{2}=\frac{2x-1}{2}$；　　4) $x+1=x$。

2. 檢驗：

1) 7 是不是方程 $x-1=20-2x$ 的解；

2) $\frac{1}{2}$ 是不是方程 $3(4y+1)=9$ 的解；

3) $\sqrt{2}$ 是不是方程 $(x+1)(x-1)=1$ 的解；

4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 是不是方程 $3x+\sqrt{12}=8\sqrt{3}-15x$ 的解。

4）同解方程　如果两个方程的解完全相同，即第一个方程的解是第二个方程的解；反之第二个方程的解也都是第一个方程的

解，那末这两个方程就叫做同解方程。例如：方程 $x+1=2$ 的解是 1，它也是方程 $x+4=5$ 的解；同样，方程 $x+4=5$ 的解是 1，它也是方程 $x+1=2$ 的解。因此，$x+1=2$ 与 $x+4=5$ 是同解方程。又例如：方程 $x+1=2$ 的解是 1，这个解也是方程 $x^2=1$ 的解，但是方程 $x^2=1$ 的其他解 $x=-1$，就不是方程 $x+1=2$ 的解。因此，$x+1=2$ 与 $x^2=1$ 这两个方程不同解。

5）**方程的两个基本性質** 当我們解方程时，經常需要将原方程逐步变形为比較簡單的方程，以便更容易求方程的解，但必須是这些簡單的方程与原方程同解。要把一个方程变为和它同解的方程，是根据方程的两个基本性質来进行的。下面我們就說明这两个基本性質：

1. 方程的第一个基本性质

如果方程的两边都加上（或减去）同一个数或者同一个整式，那末所得的方程和原方程是同解方程。首先，我們来說明，在一个方程的两边都加上同一个数，方程不会失去任何的解。

例如：方程

$$3x-2=10 \tag{1}$$

的解是 $x=4$。用 4 代替 x，它的左右两边的值相等：$10=10$。

如果在方程(1)的两边都加上同一个数，例如 -6，那末方程(1)就成为

$$(3x-2)+(-6)=10+(-6). \tag{2}$$

$x=4$ 还是方程(2)的解。这是因为用 4 代替 x，方程(2)就成为 $10+(-6)=10+(-6)$，它的左右两边的值相等。

其次，我們再来說明，在一个方程的两边都加上同一个数，方程不会增加任何的解，我們用反証法来說明。

我們仍旧来看方程

$$3x-2=10 \tag{1}$$

和方程
$$(3x-2)+(-6)=10+(-6) \tag{2}$$

假定在方程(1)变形为方程(2)的时候，增加了某一个解。那末很明显，在方程(2)的两边都加上同一个数 $+6$ 而把它变形为方程(1)的时候，将要失去这一个解，但从上面的説明，我們知道这是不可能的。因而得証。

由上面的説明可以看出，在方程的两边都加上同一个数，方程不会失去任何的解，也不会增加任何的解。因此所得的方程和原方程是同解方程。

我們可以用前面同样的方法来説明：在方程的两边都加上同一个整式，所得的方程和原方程是同解方程。讀者可自行研究[关于一个方程的两边都减去一个数(或一个整式)，所得的方程仍与原方程同解。讀者只要把减法当作加負数(或負整式)来看即可]。

現在我們举例来説明方程的第一个基本性質在解方程的时候的应用：

例 1. 解方程：$x-7=15$.

解 方程的两边都加上 7 得

$$x=15+7,$$

$$\therefore \quad x=22.$$

例 2. 解方程：$7x=6x-4$.

解 方程的两边都加上 $-6x$，得

$$7x-6x=-4,$$

$$\therefore \quad x=-4.$$

从上面的例題可以看出：

方程中的任何一項，都可以把它的符号改变后，从方程的一边移到另一边。而这种方法，叫做移項。移項以后所得的方程和原方程是同解的。解方程的时候，我們时常应用移項的方法，把方程中含有未知数的項移到方程的一边，把不含未知数的項移到另一边。

例 3. 解方程：$3x-4=2x+7$.

解　把不含未知数的項移到右边，得

$$3x=2x+7+4,$$

把含未知数的項移到左边，得

$$3x-2x=7+4,$$

$$\therefore\ x=11.$$

例4. 解方程: $5(x+2)=4(x-3)$.

解　去括号，得

$$5x+10=4x-12.$$

移項，得 $$5x-4x=-12-10,$$

$$\therefore\ x=-22.$$

2. 方程的第一个基本性质

如果方程的两边都乘以(或除以)不等于零的同一个数，那末所得的方程和原方程是同解方程。

我們先来說明，把一个方程的两边都乘以不等于零的同一个数，方程不会失去任何的解。例如：方程

$$3x-2=10 \tag{1}$$

的解是 $x=4$。用4代替 x，它的左右两边的值相等：$10=10$。

如果把方程(1)的两边都乘以不等于零的同一个数，例如 $\frac{1}{3}$，那末方程(1)就成为

$$\frac{1}{3}(3x-2)=\frac{1}{3}\times 10. \tag{2}$$

$x=4$ 还是方程(2)的解。这是因为用4代替 x，方程(2)就成为 $\frac{1}{3}\times 10=\frac{1}{3}\times 10$，它的左右两边的值相等。

現在我們再来說明，把一个方程的两边都乘以不等于零的同一个数，方程不会增加任何的解。我們用反証法来說明。

我們仍旧来看方程

$$3x-2=10 \tag{1}$$

和方程

$$\frac{1}{3}(3x-2)=\frac{1}{3}\times 10. \qquad (2)$$

假定在方程(1)变形为方程(2)的时候，增加了某一个解，那末把方程(2)的两边都乘以同一数 3 而把它变形为方程(1)的时候，将要失去这一个解，但从上面的說明，我們知道这是不可能的。因而得証。

由上面的說明可以看出，在方程的两边都乘以不等于零的同一个数，方程不会失去任何的解，也不会增加任何的解。因此所得的方程与原方程是同解方程。

方程的两边都除以(分母不等于零)不等于零的同一个数，所得的方程和原方程同解問題，讀者可从除法是乘法之逆来研究。

現在我們举例說明方程的第二个基本性質在解方程的时候的应用:

例 1. 解方程 $\frac{x}{3}=5.$

解 方程的两边都乘以 3, 得

$$3\times\frac{x}{3}=5\times 3.$$

$$\therefore \quad x=15.$$

例 2. 解方程 $\frac{x}{2}+9=2.$

解 移項,得 $\frac{x}{2}=2-9,$

$$\frac{x}{2}=-7.$$

方程的两边乘以 2, 得

$$x=-14.$$

例 3. 解方程 $7x-25=3x-5.$

解 移項,得 $7x-3x=25-5,$

$$4x=20,$$

两边乘以$\frac{1}{4}$，得

$$x=5.$$

注意　在应用方程的第二个性質时，要特别注意这个条件：用作乘数的数不等于零。事实上，如果方程的两边都乘以零，那末所得的方程就会增加解。例如：方程

$$x-2=3 \tag{1}$$

与方程

$$(x-2)\times 0=3\times 0. \tag{2}$$

方程(1)的解只有1。而方程(2)的解就有无数多个，因此它們不是同解方程。

習　題

解下列方程：

1. $x+15=23$;
2. $x-1.8=3.2$;
3. $2x-\frac{2}{3}=x+\frac{1}{6}$;
4. $2(x-5)=x-9$;
5. $4x+7=5x-2$;
6. $7(1+x)=6(2+x)$;
7. $5x=-6$;
8. $\frac{x}{3}=\frac{5}{6}$;
9. $-2x=3$;
10. $2x-1=5x-7$;
11. $\frac{1-3x}{2}=8$.
12. $x^2-3x=x^2+6$;
13. $32-x=2(19+x)$.

6）一元一次方程的解法　含有一个未知数的方程，叫做一元方程。例如：

$$2x-1=5,\ \ x^2-2x-3=0.$$

如果把一个方程經过移項和合并同类項以后，含有未知数的項里，未知数的次数是一次的，那末这个方程叫做一次方程。例如把方程：

$$8x-3=3x+2$$

移項，得

$$8x-3x=2+3,$$

合并同类項，得

$$5x=5.$$

那末，这个方程是一次方程。

含有一个未知数的一次方程，叫做一元一次方程。

下面我們举例来說明一元一次方程的解法。

例 1. 解方程

$$2(x-2)-3(2x-1)=7(1-x)-5(x+2).$$

解　去括号，得

$$2x-4-6x+3=7-7x-5x-10,$$

移項，得

$$2x-6x+7x+5x=7-10+4-3,$$

合并同类項，得 $$8x=-2,$$

两边都乘以$\frac{1}{8}$，得

$$x=-\frac{1}{4}.$$

因为上面的解法中每一步变形后所得的方程都和变形前的方程同解，所以$x=-\frac{1}{4}$就是原方程的解。

为了檢驗解方程的过程中有沒有錯誤，可以把求得的解代入原方程来进行檢驗。

例 2. 解方程

$$\frac{2x-1}{2}-\frac{2x+5}{3}=\frac{6x-7}{4}-1$$

为了把这个方程变形为較簡單的同解方程，我們可以在方程的两边同时乘以各分母的最小公倍数。

解　方程两边同时乘以 12（12 是各分母的最小公倍数），得

$$6(2x-1)-4(2x+5)=3(6x-7)-12,$$

去括号，得

$$12x-6-8x-20=18x-21-12,$$

移項，得

$$12x-8x-18x=-21-12+6+20,$$

合并同类項，得 $$-14x=-7,$$

两边都乘以$-\frac{1}{14}$，得

$$x=\frac{1}{2}.$$

从上边的例子可以看到，解一元一次方程的一般步驟是：

(1) 去方程的分母。

(2) 去括号。

(3) 移項。使含未知数的項和不含未知数的項分别在等号的两边。

(4) 合并同类項。

(5) 把方程的两边乘以未知数的系数的倒数（也就是除以未知数的系数），就得方程的解。

由于原方程的形式不同，繁簡不同，所以在解方程的时候，上面所列的步驟不一定都用到。并且也有时宜于先合并同类項后移項，或先去括号后去分母。

如果原方程里的已知数包含字母，那末解方程的方法是和上面所談的一样的，不过在求得的解里面自然也包含着字母。

例 解方程

$$mx-n=2x-3. \quad (m\neq 2)$$

解 移項，得 $$mx-2x=n-3,$$

合并同类項，得

$$(m-2)x=n-3,$$

$$\therefore\ x=\frac{n-3}{m-2}.$$

7) **一元一次方程的应用题** 在实踐活动中，我們时常遇到一些需要根据已知的数量或者数量之間的关系来推求未知的数值，象在算术里解过的許多应用問題那样。現在我們学会了解一元一次方程后，有很多的实际問題是可以根据已知的条件列成方程，然后通过解方程的方法来求出問題的答案。如果我們能够正确地并

且熟練地运用列方程的方法来解应用题，就会感到用算术解法很費思索而且不易解答的許多問題，用了列方程的方法以后，就会輕而易举、不难解答。这种感覚，当我們关于解方程的知識掌握得愈多的时候，比如說，学会了解二次方程和一次的、二次的方程組之后，就愈明显。

下面举例說明怎样用列方程的方法来解应用題:

例 1. 有两个工作队，第一队有 32 人，第二队有 13 人，問从第一队調几个人到第二队去，就能使得第一队人数等于第二队人数的 2 倍？

解 設从第一队調 x 个人到第二队去，就能使得第一队人数等于第二队人数的 2 倍。

第一队調走 x 个人后，还剩 $32-x$ 个人。

第二队調入 x 个人后，則为 $13+x$ 个人。

这时，第一队人数等于第二队人数的 2 倍。那末可列方程：

$$32-x=2(13+x).$$

去括号，得 $$32-x=26+2x,$$

移項，得 $$-x-2x=26-32,$$

合并同类項，得 $$-3x=-6,$$

两边除以 -3，得 $$x=2.$$

答 从第一队調 2 个人到第二队去，就能使得第一队人数等于第二队人数的 2 倍。

例 2. 两座煉鋼高爐，第一座高爐比第二座高爐每小时多煉 40 吨，第一座工作 16 小时，第二座工作 24 小时，共煉鋼 8640 吨，問每座高爐每小时各煉鋼多少吨？

解 設第二座高爐每小时煉鋼 x 吨，則第一座高爐每小时煉鋼 $x+40$ 吨，第一座高爐工作 16 小时煉鋼 $16(x+40)$ 吨；第二座高爐工作 24 小时煉鋼 $24x$ 吨；由于共煉鋼 8640 吨；故可列方程为：

$$16(x+40)+24x=8640.$$

去括号，得

$$16x+40\times16+24x=8640,$$

移項，得 $\qquad 16x+24x=8640-40\times16,$

$$\therefore\quad 40x=8000,$$

两边除以 40, 得 $\qquad x=200;$

又 $\qquad x+40=240.$

答　第一座高爐每小时煉鋼 240 吨；

第二座高爐每小时煉鋼 200 吨。

例 3. 两种銀塊，分别含銀 80% 和 60%。应当各取几克，熔化起来，才能得到 500 克含銀 74% 的銀塊？

解　設含銀 80% 的銀塊取 x 克，則含銀 60% 的銀塊就要取 $500-x$ 克，它們分别含銀 $\frac{80}{100}x$ 克和 $\frac{60}{100}(500-x)$ 克，依題意它們共含銀 $500\times\frac{74}{100}$ 克．故可列方程为：

$$\frac{80}{100}x+\frac{60}{100}(500-x)=500\times\frac{74}{100}.$$

两边都乘以 10, 得

$$8x+6(500-x)=50\times74,$$

去括号，得 $\qquad 8x+3000-6x=3700,$

移項，得 $\qquad 8x-6x=3700-3000,$

$$2x=700,$$

两边除以 2, 得 $\qquad x=350;$

又 $\qquad 500-x=500-350=150.$

答　含銀 80% 的銀塊取 350 克，含銀 60% 的銀塊取 150 克。

例 4. 硫酸 1.2 公升和水 1.8 公升混合成稀溶液。硫酸 0.9 公升和水 0.3 公升混合成濃溶液，現在要把这两种溶液混合成硫酸和水各半的溶液 1.4 公升，間两种溶液要各用多少？

解　設稀溶液用 x 公升，則濃溶液用 $1.4-x$ 公升；

x 公升的稀溶液含硫酸 $\frac{1.2}{1.2+1.8}x$ 公升；

$1.4-x$ 公升的濃溶液含硫酸 $\frac{0.9}{0.9+0.3}(1.4-x)$ 公升；

x 公升的稀溶液含水 $\frac{1.8}{1.2+1.8}x$ 公升；

$1.4-x$ 公升的濃溶液含水 $\frac{0.3}{0.9+0.3}(1.4-x)$ 公升。

依題意 1.4 公升的混合溶液要含硫酸和水各半，故可列方程：

$$\frac{1.2}{1.2+1.8}x+\frac{0.9}{0.9+0.3}(1.4-x)=\frac{1.8}{1.2+1.8}x+\frac{0.3}{0.9+0.3}(1.4-x).$$

即

$$\frac{1.2}{3}x+\frac{0.9}{1.2}(1.4-x)=\frac{1.8}{3}x+\frac{0.3}{1.2}(1.4-x).$$

分子分母扩大 10 倍，得

$$\frac{12}{30}x+\frac{9}{12}(1.4-x)=\frac{18}{30}x+\frac{3}{12}(1.4-x),$$

$$\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}(1.4-x)=\frac{3}{5}x+\frac{1}{4}(1.4-x),$$

两边乘以 20，得

$$8x+15(1.4-x)=12x+5(1.4-x).$$

$$8x+15\times1.4-15x=12x+5\times1.4-5x,$$

$$8x-15x-12x+5x=5\times1.4-15\times1.4,$$

$$-14x=-14,$$

$$\therefore\quad x=1.$$

答　要用稀溶液 1 公升，濃溶液 0.4 公升。

例 5. 假如井不知深，先将繩三折入井，剩在井外繩長是 4 尺，后将繩 4 折入井，剩在井外繩長是 1 尺，間井深及繩長各若干？

解　設井深为 x 尺，則繩長为 $(4+x)3$ 尺（三折时），或繩長为

$(1+x)4$ 尺(四折时),但是知道一条繩長是相等的,故可列方程为:

$$(4+x)3=(1+x)4,$$

$$12+3x=4+4x,$$

$$3x-4x=4-12,$$

$$-x=-8,$$

$$\therefore \quad x=8.$$

繩長: $(4+x)3=(4+8)3=36$ 尺.

答　井深 8 尺,繩長 36 尺。

注: 这題是我国古代問題, 选自明程大位所著"算法統宗"(1592)。

8) **分式方程**　在前面我們已經系統地研究了如何解一元一次方程,現在看下列問題:

例　学校的勤工儉学补鞋小組,要完成 120 双鞋的修补工作,今有 4 个組員因其他工作調出不能参加,故每人完成任务的平均数是原来的三倍,問此組原有若干人?

解　設此組原有 x 个人,則原来每人平均完成 $\frac{120}{x}$ 双,少 4 人后,每人平均完成 $\frac{120}{x-4}$ 双,依題意可列方程如下:

$$\frac{120}{x-4}=\frac{120}{x}\times 3.$$

这个方程在分母中含有未知数。这样的方程叫做分式方程。又如 $\frac{2}{x}=8$, $\frac{2}{x+1}=3x+2$ 也是分式方程。分母中不含未知数的方程叫做整式方程。如 $2x+1=3$, $\frac{x}{3}=5$ 是整式方程。

我們解分式方程时,要把分式方程变形为整式方程,卽首先去掉分母,在方程两边乘以同一个含有未知数的整式。

这样在一个方程两边都乘以同一个整式所得的方程是否与原方程同解。下面我們研究这个問題。

例如，方程 $x-2=3$ 只有一个解是 5。如果这个方程两边乘以 $x-1$，新方程为

$$(x-2)(x-1)=3(x-1).$$

$x=5$ 还是新方程的解。因为当 $x=5$ 时，新方程两边的值相等：$3\times4=3\times4$。但是 $x=1$ 也是新方程的解。因为当 $x=1$ 时，新方程的两边的值相等：$-1\times0=3\times0$。我們知道，$x=1$ 不是原方程的解。因此在一个方程的两边乘以同一个整式时，所得的新方程还有原方程的解，但有时增加了一个新解，如上例中 $x=1$。并且这个新解就是使所乘整式 $x-1$ 等于零的 x 的值。所以，由于把一个方程变形而增加的解，叫做原方程的增根。

因为在解分式方程时，需要在方程两边乘以同一个整式，故有产生增根的可能。因此，我們必須把变形后的整式方程的根代入原分式方程檢驗，并去掉增根。或代入所乘的整式来进行檢驗，就是使所乘的整式等于“0”的根是原方程的增根。

例 1. 解方程 $$\frac{3}{x-2}=7.$$

解 两边乘以 $x-2$，得

$$3=7(x-2),$$

$$3=7x-14,$$

$$-7x=-17,$$

$$\therefore\ x=\frac{17}{7}.$$

檢驗：将 $x=\frac{17}{7}$ 代入原方程，得

$$\text{左：}\ \frac{3}{\frac{17}{7}-2}=\frac{3}{\frac{3}{7}}=7,$$

$$\therefore\ \frac{17}{7}\text{是原方程的解。}$$