大學叢書

工程數學

尹伯平
尹仲容 合譯

商務印書館發行

譯　序

余等習工程時，讀數學每病其繁簡不能適中。蓋普通工程大學數學僅注意於微積分之應用，高深者或略涉微分方程，而與工程極有關係之複數，諸函數分析，或然原理及最小二乘冪法等，論及者蓋鮮。偶閱 Prof. Ralph E. Root 之 The Mathematics of Engineering，覺其於前述諸點，皆能注意，而於數學之基本原理，如極限論等，亦皆有適當之啓發，能使學者知方程式公式之眞實意義，而不僅依之以爲運算之工具，致陷知其然不知所以然之譏。因於公暇合力譯之，以爲大學課本之一種。其他則原序述之已瀋，不復贅。再，此書原本假之於顏任光博士，譯竟又承其一再校閱，協助尤多，並於此誌謝。

尹伯平　尹仲容　二十八年五月四日

原序

本書爲應美國海軍大學研究所（Postgraduate School, United States Naval Academy）學生數學的需要，經著者十三年之努力所產生。開始時，著者編著數章以補充當時用作教本之某標準微積分學之不足，以後復寫數章以代替教本上之某數章，就學者之所需，逐漸增加，遂成此書。自 1923 年以來，即以油印本在海軍大學研究所用作教科書，其形式與現今付印者大致相同。所中學生預備專攻之工程科各異，有機械，電機，土木工程，航空工程，無線電通信，氣象，海軍建築工程，及數種軍械工程等科。每組學生最後分別送至以該組學生所攻各專科見長之大學或專門學校修習一年或數年。故此處所選教材若果適於海軍學生，則著者必認識工程教育之趨勢，一般近代工程師所需之數學知識當不出此書範圍。

或以爲第五章與第七章可略去，因讀本書之學生應早了解此二章內容。但著者過去發現此二章能以極短時間令學生溫習一遍，爲益匪小。善教者且可以第七章爲初等解析幾何教本，但此章與第五章均係將學生已學各點作簡明扼要之重述。或有人願保留供參考之用。微積分初步亦係溫習性質，研究所學生習此書時已先讀初等微積分學，其他學校情形當有與此相同者。

本書敍述較高深部分恐不甚合一般數學家之胃口，因所論不甚詳盡。但本書包括題材甚廣，每題僅就最合工程師所需者討論，故只能作簡略之敍述。

陳述命題與證明命題之謹嚴本書不能處處一致。但仍力求其精密妥當，俾讀者充分了解，不致誤用所舉諸原則。在淺近部分，證明或甚詳盡，或僅舉大略，或僅有提示，或全部略去。對於高深之部分，則更注意於正確解釋，而稍忽略數學的謹嚴性之發揮。爲簡便計，較難

之命題多述而不證，求其能致用足矣。

凡教科書自須留教師補充之部分，編輯本書時，亦假定學生能教室內之討論獲益。若未讀大學一年級數學課程，必須取代數學，三角學，及解析幾何學之標準教本預備充分始能閱讀本書。讀畢此書後。欲作進一步之研究，可讀 Wilson 氏 "Advanced Calculus", Osgood氏 "Advanced Calculus", Goursat-Hedrick 二氏 "Mathematical Analysis" 及其他關於或然率，最小二乘冪法，福利 (Fourier) 氏級數，諧函數分析，及微分方程式等之專書。本書章末多列有參考書目，俾學者自由選讀，一方面足以補充各章所論，一方面得知與此有關之題材。

本書爲工程師而作，編輯時力求其便用便查，但此書並無手册 (Handbook) 之性質。讀者必須另備工程學方面之手册及數學表。對數表，三角函數表，指數函數表，或然率積分表，簡單積分表，均爲不可少之工具。能備雙曲線函數表，自然對數表，橢圓積分表等更妙。

爲保持工程師之觀點且維持其興趣起見，藉以說明之例題多採工程上之專門問題，但除用以說明當前數學問題與實際問題的關係外，本書初不欲侵及他科之範圍。多數實用習題之選擇亦同此目的。題中敍述頗詳，俾學生不必查考其他專門書籍卽可運用數學原則以解題。研究所學生讀此書時，同時習力學及工程各科。但力學課程如先習畢，數學課程與其他工程科目平行研讀實較便利。

研習本書至相當標準，約須上課 125 至 150 次。程度優良學生自可略去淺近部分。全部習題固非任何學生所能演畢，但著者謹以至誠忠告讀者，至低限度須將全部習題閱讀一遍，因習題中包括豐富之教材，其排列由簡及繁，非完全閱讀無以得其線索也。

習題或自擬或採自他書，不復列舉書名。著者甚感合作同志有價值之批評與指示。Brumble, Rawlins 二教授曾採用此書之油印本數年，對此書貢獻尤多。在校或畢業同學，著者敬謝其改正書中或習題中之誤點。海大研究所當局之勉勵與合作，及其傳達畢業生對此書之批評，著者亦謹於此申謝。 Ralph. E. Root. 1927 年。

目 次

工程數學

第一章　函數及其記法，函數之圖形

第一節　函數關係及其記法

量(quantity)之意義爲人所熟知。量皆有値，表量之値，或以不名數(abstract number)或於數後附通用之單位。在討論某問題時，量之値始終不變者，謂之常量或常數(constant)，如討論時量可變動，或可有不同之値，則謂之變量或變數(variable)。例如以桶盛水，水由一管洩出，可任意以立方呎，立方吋，磅，噸，加侖等表水之量。計算時只用不名數，算得之結果仍須附以適當之單位。設討論桶水洩盡所需之時間，或水面低落之速率，則水量當視作變量，而桶之尺寸則爲常量。如討論水面在一定高度時，桶內各點之壓力，則桶內之水應視爲常量，而水面下各不同深度之壓力爲變量。

變量與常量之不欲標出其特値者可以字母或記號代之。量與量每有相互發生關係者，如此量有定値時彼量亦隨之而定。設變量 y 與變量 x 相關，當 x 定後 y 僅有一個對應値，則 y 稱爲 x 之單値函數(single valued function)。如對於同一 x 値，y 有二個或若干個對應値，則 y 稱爲 x 之雙値或多値函數(double or multiple valued function)。單値多値雖不同，而 y 爲 x 之函數則一。在上述之例中，若桶之尺寸及管之大小已定，則水洩盡所需之時間視水之深淺而定，故時間爲深度之函數。若水之深度及管之大小已定，且桶係圓柱體，則所需時間爲圓柱體半徑之函數。故洩水所需之時間爲水之深度，管之大小，及桶之尺寸三量之函數。事實上引人注意之多種量往往爲數

個變量之函數。若將某一變量以外之其他變量均予以定値，則所欲論之量可視爲某一變量之函數，從而察出此二量間之關係。

函數關係可用各種方法確定之或說明之。最簡單者，卽定一規律，藉以計算對應於 x 各値之 y 値。例如

$$y=3x+3;\quad y=\sqrt{6-x^2};\quad y=\frac{x^3-4}{x+3}$$

各式均由 x 値計算 y 値之規律也。說明 y 與 x 之幾何的或物理的關係，亦爲確定函數關係之一法，例如 y 爲球之體積，x 爲其半徑，或 y 爲某梁(beam)之彎距(deflection)，x 爲梁之擔負(load)，或 y 爲某管洩水之速度。x 爲水頭 (head) 皆是也。將 x 與 y 之各組對應値列表，亦足表函數之關係，如習見之對數表，三角函數表是。第四法以圖形表函數之關係，就圖可推出對應於 x 各値之 y 値。設僅欲表示函數關係，而不欲說明其關係之如何，或函數之關係已定欲以記號表之，常用之記法爲

$$y=f(x),\quad y=F(x),\quad y=\phi(x)\text{等:}$$

讀作 y 爲 x 之 f 函數；或 y 等於 x 之 f；y 等於 x 之 F；y 等於 x 之 ϕ。f, F, ϕ 等字母表示不同之函數。

設變數 y 爲變數 x 之函數，則 x 爲自變數 (independent variable)，y 爲因變數 (dependent variable)。函數之觀念含有二要素：(1)自變數僅能在某一組數內任取一値，此一組數稱爲自變數之變程(range)。(2)變數間必有對應律(law of correspondence)藉以在自變數變程內定因變數之値。苟無對應律，或自變數不在其變程內，雖有函數記法，亦無從確定此函數之特性。

設 y 爲 x 之函數，則當 x 在某變程內，y 有對應之値。此一組 y 値亦可視爲 y 之變程，在此變程內，x 亦可視爲 y 之函數。在 y 之變程內任取一 y 値，其對應 x 値，卽原先藉以求得此 y 値之 x 値也。故自變數與因變數之關係可以互易，惟 y 雖爲 x 之單値函數，x 仍可爲

y 之多值函數。

第二節　函數之分類

函數可按自變數變程之性質分類如下：

(1)分立變數(discrete variable)之函數　例如幾何級數之首項爲 a，公比爲 r，則級數前 n 項之和爲項數 n 之函數，

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

式中自變數 n 祇能爲 1，2，3 等分立值，其變程爲全部正整數。他如某市人口爲時間（以年計）之函數；木樁入地之深度爲捶擊次數之函數，皆屬此類。

(2)連續變數(continuous variable)之函數　此爲更重要之一類。在上列級數求和公式內，設 a 與 n 爲定值，則 s 爲變數 r 之函數，r 可爲任何實數。實數中無有不可爲 r 者，換言之，即 r 之變程內無隔斷之處，故 r 謂之連續變數。在下列各式內，

$$y=\sin^{-1}x\ ,\quad y=\sqrt{4-x^2}\ ,\quad y=\log x$$

變數 x 皆爲連續變數，若 y 之值以實數爲限則第一例之變程爲自 -1 至 $+1$ 之一切實數（包括 ±1 在內），第二例之變程自 -2 至 $+2$，第三例之變程則包括全部正實數。

實數一名詞，所以別於複數(complex number)，複數者含負數偶次方根之數也。數旣有實有複，函數亦有實變數函數與複變數函數之別。複變數函數爲高等數學中重要之一門，本書雖論複數，但對於函數之研究，則大都限於自變數變程之爲實數者。

以對應律之性質爲函數分類之根據較上述分類法更爲重要。此法覘因變數如何由自變數求出以爲分類之標準。

(1)代數函數　在此類函數中將自變數 x 作有限次數之算術運算卽得 y 之值。代數函數復可分爲：

(a)有理代數函數 (rational algebraic functions) 運算僅包括加減乘除者屬於此類。多項式(polgnomials)爲此類之特例，式中僅有加減乘而無除。加減乘除謂之有理運算。玆舉此類函數之例如下：

$$x^3-\frac{5}{3}x+9\text{（多項式）。}\quad \frac{x-2}{x+5},\quad x^4-\frac{6}{x}$$

(b)無理函數(irrational functions) 此類除加減乘除外，多一開方之運算

$$\sqrt{x+1}\,,\ \sqrt[3]{1-x^2}\,,\ x+\sqrt{1-x}\,,\ \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\text{等。}$$

(2)超越函數(transcendental functions) 此爲非代數的函數，不能以有限次數的運算求得函數之值。此類函數雖完全能用數學術語確定之，但根據此等函數定義祇能求得計算函數近似值之法（近似之程度則可隨人之所欲）。此類函數每有一定之名稱與記法，其值並列爲表以便查。重要之超越函數有：

(a)三角函數 如 $\sin x$, $\cos 2x$, $\tan\frac{1}{2}x$ 等。

(b)反三角函數 如 $\sin^{-1}x$, $\sec^{-1}x$ 等。

(c)指數函數 如 10^x, e^{2x} 等。

(d)對數函數 如 $\log x$, $\log(1-x^2)$等。

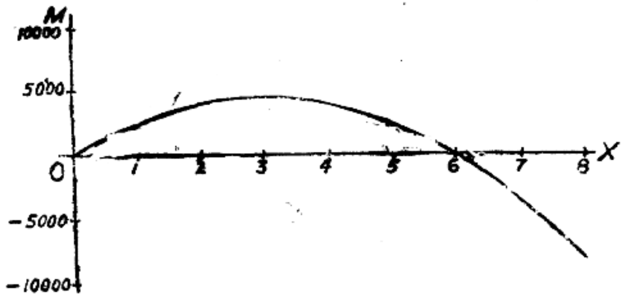
(3)經驗函數(empirical functions) 此類函數之定義不能用數學術語表出。其函數關係（即對應律）藉科學之術語如物理學，醫學，社會學，經濟學中之術語以確定之。對應於各個不同之自變數之函數值，係以量度，觀察，或計數定之，通常僅能得其近似值。每組因變數自變數之值或列表或繪圖以記錄之，有時經驗函數可與某代數函數或超越函數相近，爲便於運算起見即以之代替經驗函數。此類函數至爲重要，本書於第十三章內詳論之。

第三節　簡單函數之圖形

本節討論不以圖形表示之函數應如何就其式以繪出函數圖形之法。欲製函數之圖形必假設函數值已列成一表，或已知藉以求函數值之對應律。如函數尙未列成一表，繪圖之第一步卽據對應律，選擇適當之自變數以求對應之函數值，製成一表。第二步爲選定自變數之比例尺，繪於一水平線上，此線謂之橫坐標軸(axis of abscissas)。單位之選擇以能使變數之變程或其待研究之部分在繪圖紙上有適當之長度。第三步爲選定因變數之比例尺，繪於一垂直線上，此線謂之縱坐標軸(axis of ordinates)。單位之選擇須使函數之極端值能繪於紙上。兩變數所代表之量性質各異，故縱橫坐標軸上之單位無甚重要之關係，但遇一部分幾何問題，則二軸上宜用相同之單位。第四步卽以紙上之點代表表上各組相對應之數值，每點之位置正對縱橫二坐標軸上該點所代表之一組數值之處。如製表時自變數選擇適當，則以線連接諸點，卽得函數之圖形。圖上沿水平方向量得之值曰橫坐標(abscissa)，沿垂直方向量得之值曰縱坐標(ordinates)。

玆以第二節所舉各函數爲例以說明之。關於分立變數之函數可捨而不論，蓋此等函數，按上法製得之點，各各獨立，無須以線連之，爲醒目起見，不妨以若干段直線連接之，如是而已。對於連續函數，則問題不如是之簡單，玆就前述連續函數之分類法，依次討論之。

(1)代數函數　設 $y=f(x)$，而 $f(x)$ 爲 x 之代數函數。此二變數之變程或囿於一部分之實數，或推至於無限大，或有正有負。將各值列表後，則應注意各點可以顯出，且可爲選定 x,y 在圖上比例尺之助。



第 1 圖

例：設有長 8 呎之梁，固定其一端，而支柱其他端，其擔負爲每呎 1,000 磅。其彎曲矩(M)可以下列公式表之：

$$M=3000x-500x^2$$

式內 x 爲自支柱端之距離（以呎爲單位），M 之單位爲磅呎。將各值列表，x 之變程自 0 至 8，在此變程內，M 之變程爲 -8000 至 4500。故選擇比例尺俾函數之關係得以顯出，頗屬易事。表上各點標出後，以光滑之曲線連之，假定由其他 x 值計算而得之一組 x, M 值亦可以曲線上一點表之。

x······	0	1	2	3	4	5	6	7	8
M······	0	2500	4000	4500	4000	2500	0	-3500	-8000

例 2. 向上拋球，其初速度(initial velocity)爲每秒 64 呎，試以球與出發點距離 h 之函數表速度 v。設重力加速度 g 爲向下每秒每秒 32 呎，則

$$v=\sqrt{v_0^2-2gh}=\sqrt{4096-64h}$$

式中 v 爲速度（單位爲每秒呎），h 爲球高出出發點之距離（單位爲呎）。令 h 之值爲 8 之倍數，則計算較易，h 之最大值以 64 爲限，h 之負值可捨而不論。h 在 56 與 64 之間 v 變動極速，故表中加 $h=60$, $v=\pm16.0$。表內 $h=8,24,40$ 之對應 v 值即不算出，亦無損於