

大學叢書

工程數學

尹伯平
尹仲容
合譯

商務印書館發行

譯 序

余等習工程時，讀數學每病其繁簡不能適中。蓋普通工程大學數學僅注意於微積分之應用，高深者或略涉微分方程，而與工程極有關係之複數，諸函數分析，或然原理及最小二乘羈法等，論及者蓋鮮。偶閱 Prof. Ralph E. Root 之 The Mathematics of Engineering，覺其於前述諸點，皆能注意，而於數學之基本原理，如極限論等，亦皆有適當之啓發，能使學者知方程式公式之真實意義，而不僅依之以爲運算之工具，致陷知其然不知所以然之譏。因於公暇合力譯之，以爲大學課本之一種。其他則原序述之已備，不復贅。再，此書原本假之於顏任光博士，譯竟又承其一再校閱，協助尤多，並於此誌謝。

尹伯平 尹仲容 二十八年五月四日

原 序

本書為應美國海軍大學研究所 (Postgraduate School, United States Naval Academy) 學生數學的需要，經著者十三年之努力所產生。開始時，著者編著數章以補充當時用作教本之某標準微積分學之不足，以後復寫數章以代替教本上之某數章，就學者之所需，逐漸增加，遂成此書。自 1923 年以來，即以油印本在海軍大學研究所用作教科書，其形式與現今付印者大致相同。所中學生預備專攻之工程科各異，有機械，電機，土木工程，航空工程，無線電通信，氣象，海軍建築工程，及數種軍械工程等科。每組學生最後分別送至以該組學生所攻各專科見長之大學或專門學校修習一年或數年。故此處所選教材若果適於海軍學生，則著者必認識工程教育之趨勢，一般近代工程師所需之數學知識當不出此書範圍。

或以為第五章與第七章可略去，因讀本書之學生應早了解此二章內容。但著者過去發現此二章能以極短時間令學生溫習一遍，為益匪小。善教者且可以第七章為初等解析幾何教本，但此章與第五章均係將學生已學各點作簡明扼要之重述。或有人願保留供參考之用。微積分初步亦係溫習性質，研究所學生習此書時已先讀初等微積分學，其他學校情形當有與此相同者。

本書敘述較高深部分恐不甚合一般數學家之胃口，因所論不甚詳盡。但本書包括題材甚廣，每題僅就最合工程師所需者討論，故只能作簡略之敘述。

陳述命題與證明命題之謹嚴本書不能處處一致。但仍力求其精密妥當，俾讀者充分了解，不致誤用所舉諸原則。在淺近部分，證明或甚詳盡，或僅舉大略，或僅有提示，或全部略去。對於高深之部分，則更注意於正確解釋，而稍忽略數學的謹嚴性之發揮。為簡便計，較難

之命題多述而不證，求其能致用足矣。

凡教科書自須留教師補充之部分，編輯本書時，亦假定學生能教室內之討論獲益。若未讀大學一年級數學課程，必須取代數學，三角學，及解析幾何學之標準教本預備充分始能閱讀本書。讀畢此書後，欲作進一步之研究，可讀 Wilson 氏 “Advanced Calculus”，Osgood 氏 “Advanced Calculus”，Goursat-Hedrick 二氏 “Mathematical Analysis” 及其他關於或然率，最小二乘羈法，福利 (Fourier) 氏級數，譜函數分析，及微分方程式等之專書。本書章末多列有參考書目，俾學者自由選讀，一方面足以補充各章所論，一方面得知與此有關之題材。

本書為工程師而作，編輯時力求其便用便查，但此書並無手冊 (Handbook) 之性質。讀者必須另備工程學方面之手冊及數學表。對數表，三角函數表，指數函數表，或然率積分表，簡單積分表，均為不可少之工具。能備雙曲線函數表，自然對數表，橢圓積分表等更妙。

為保持工程師之觀點且維持其興趣起見，藉以說明之例題多採工程上之專門問題，但除用以說明當前數學問題與實際問題的關係外，本書初不欲侵及他科之範圍。多數實用習題之選擇亦同此目的。題中敘述頗詳，俾學生不必查考其他專門書籍即可運用數學原則以解題。研究所學生讀此書時，同時習力學及工程各科。但力學課程如先習畢，數學課程與其他工程科目平行研讀實較便利。

研習本書至相當標準，約須上課 125 至 150 次。程度優良學生自可略去淺近部分。全部習題固非任何學生所能演畢，但著者謹以至誠忠告讀者，至低限度須將全部習題閱讀一遍，因習題中包括豐富之教材，其排列由簡及繁，非完全閱讀無以得其線索也。

習題或自擬或採自他書，不復列舉書名。著者甚感合作同志有價值之批評與指示。Brumble, Rawlins 二教授曾採用此書之油印本數年，對此書貢獻尤多。在校或畢業同學，著者敬謝其改正書中或習題中之誤點。海大研究所當局之勉勵與合作，及其傳達畢業生對此書之批評，著者亦謹於此申謝。

Ralph. E. Root. 1927 年。

目次

第一章 函數及其記法,函數之圖形	1
第一節 函數關係及其記法	1
第二節 函數之分類	3
第三節 簡單函數之圖形	5
習題一	13
第四節 複合函數之圖形	15
習題二	19
第二章 極限與連續性	21
第五節 函數之極限	21
習題三	26
第六節 無固變值	28
習題四	32
第七節 函數之連續性	35
習題五	38
第三章 函數之導微函數	40
第八節 導微函數之意義	40
習題六	44
第九節 求導微函數之通則	45
第十節 代數函數之導微函數	50
習題七	52

第十一節 三角函數及反三角函數之導微函數	54
習題八	58
第十二節 指數及對數函數之導微函數	59
習題九	62
第十三節 間接確定之函數	64
習題十	67
第十四節 高級導微函數	68
習題十一	71
第四章 函數之積分	73
第十五節 微分法之逆運算	73
習題十二	76
第十六節 積分法之公式	77
習題十三	80
第十七節 定積分	82
習題十四	84
第十八節 微分之和之極限	85
習題十五	90
第五章 方程式之解法	91
第十九節 代數方程式，恰合根	91
習題十六	98
第二十節 行列式及消去法	99
習題十七	108
第二十一節 三角變易解方程式	110
習題十八	115
第二十二節 對數變易解方程式法	116

習題十九	117
第二十三節 方程式之近似解	118
習題二十	125
第六章 積分運算法	128
第二十四節 代替積分法	128
習題二十一	130
第二十五節 分部積分法	131
習題二十二	132
第二十六節 嘗試積分之應用	133
習題二十三	134
第二十七節 有理分式之積分法	135
習題二十四	139
第二十八節 積分法之限制	140
習題二十五	147
第二十九節 積分表之用法	148
習題二十六	149
第七章 數種標準曲線方程式及其變易	152
第三十節 坐標之數種用法	152
習題二十七	160
第三十一節 直線	161
習題二十八	166
第三十二節 坐標之變易	167
習題二十九	171
第三十三節 圓錐曲線	172
習題三十	182

第三十四節 二次方程式	188
習題三十一	187
第三十五節 數種曲線族及直線族	188
習題三十二	194
第八章 導微函數之數種應用	195
第三十六節 曲線之切線及法線	195
習題三十三	198
第三十七節 導微函數圖形之應用	200
習題三十四	205
第三十八節 極大與極小	206
習題三十五	212
第三十九節 密切圓曲率	213
習題三十六	218
第九章 積分法之應用	220
第四十節 曲線弧之長度	220
習題三十七	222
第四十一節 面積及體積	228
習題三十八	228
第四十二節 矩及平均值	230
習題三十九	235
第四十三節 分配量: 質量, 力	235
習題四十	242
第四十四節 重複積分法	244
習題四十一	250
第四十五節 積分法之代替算法	251

習題四十二	256
第十章 函數定值法	260
第四十六節 不定式	260
習題四十三	268
第四十七節 附尾量之泰羅氏定理	270
習題四十四	273
第四十八節 無限級數	274
習題四十五	281
第四十九節 無限級數之運算	283
習題四十六	291
第十一章 複數表出之量與週期函數	293
第五十節 複數量	293
習題四十七	304
第五十一節 簡諧函數	306
習題四十八	313
第五十二節 週期函數之分析	315
習題四十九	328
第十二章 多元函數	332
第五十三節 幾何的看法	332
習題五十	342
第五十四節 偏導微函數與全導微函數	343
習題五十一	351
第五十五節 偏導微函數與全導微函數之應用	352
習題五十二	361

第五十六節 平面曲線性質舉要	363
習題五十三	370
第五十七節 多元函數之積分	372
習題五十四	389
第十三章 經驗數據之處理法	392
第五十八節 或然率之理論	392
習題五十五	399
第五十九節 最小二乘冪法	401
習題五十六	413
第六十節 精密度之實際效用	416
習題五十七	424
第六十一節 經驗方程式	425
習題五十八	430
第十四章 一級常微分方程式	435
第六十二節 微分方程式之意義	435
習題五十九	438
第六十三節 變數之分隔	439
習題六十	443
第六十四節 適合微分方程式	441
習題六十一	449
第六十五節 高級微分方程式	451
習題六十二	457
第十五章 高級常微分方程式	459
第六十六節 常係數齊次平直方程式	459

習題六十三	462
第六十七節 非齊次平直方程式	465
習題六十四	473
第六十八節 減低方程式之級求解法	475
習題六十五	478
第十六章 多元常微分方程式	480
第六十九節 聯立方程式組	480
習題六十六	487
第七十節 全微分方程式	491
習題六十七	498
第十七章 偏微分方程式	502
第七十一節 偏微分方程式之意義	502
習題六十八	506
第七十二節 一級偏微分方程式	507
習題六十九	513
第七十三節 高級偏微分方程式	514
習題七十	524
第十八章 微分方程式解法雜例	528
第七十四節 微分方程式之近似解法	528
習題七十一	543
第七十五節 用級數求解法	544
習題七十二	549

工程數學

第一章 函數及其記法, 函數之圖形

第一節 函數關係及其記法

量(quantity)之意義爲人所熟知。量皆有值, 表量之值, 或以不名數(abstract number)或於數後附通用之單位。在討論某問題時, 量之值始終不變者, 謂之常量或常數(constant), 如討論時量可變動, 或可有不同之值, 則謂之變量或變數(variable)。例如以桶盛水, 水由一管洩出, 可任意以立方呎, 立方吋, 磅, 噸, 加侖等表水之量。計算時只用不名數, 算得之結果仍須附以適當之單位。設討論桶水洩盡所需之時間, 或水面低落之速率, 則水量當視作變量, 而桶之尺寸則爲常量。如討論水面在一定高度時, 桶內各點之壓力, 則桶內之水應視爲常量, 而水面下各不同深度之壓力爲變量。

變量與常量之不欲標出其特值者可以字母或記號代之。量與量每有相互發生關係者, 如此量有定值時彼量亦隨之而定。設變量 y 與變量 x 相關, 當 x 定後 y 僅有一個對應值, 則 y 稱爲 x 之單值函數(single valued function)。如對於同一 x 值, y 有二個或若干個對應值, 則 y 稱爲 x 之雙值或多值函數(double or multiple valued function)。單值多值雖不同, 而 y 爲 x 之函數則一。在上述之例中, 若桶之尺寸及管之大小已定, 則水洩盡所需之時間視水之深淺而定, 故時間爲深度之函數。若水之深度及管之大小已定, 且桶係圓柱體, 則所需時間爲圓柱體半徑之函數。故洩水所需之時間爲水之深度, 管之大小, 及桶之尺寸三量之函數。事實上引人注意之多種量往往爲數

個變量之函數。若將某一變量以外之其他變量均予以定值，則所欲論之量可視為某一變量之函數，從而察出此二量間之關係。

函數關係可用各種方法確定之或說明之。最簡單者，即定一規律，藉以計算對應於 x 各值之 y 值。例如

$$y = 3x + 3; \quad y = \sqrt{6 - x^2}; \quad y = \frac{x^3 - 4}{x + 3}$$

各式均由 x 值計算 y 值之規律也。說明 y 與 x 之幾何的或物理的關係，亦為確定函數關係之一法，例如 y 為球之體積， x 為其半徑，或 y 為某梁 (beam) 之彎距 (deflection)， x 為梁之擔負 (load)，或 y 為某管洩水之速度， x 為水頭 (head) 皆是也。將 x 與 y 之各組對應值一列表，亦足表函數之關係，如習見之對數表，三角函數表是。第四法以圖形表函數之關係，就圖可推出對應於 x 各值之 y 值。設僅欲表示函數關係，而不欲說明其關係之如何，或函數之關係已定欲以記號表之，常用之記法為

$$y = f(x), \quad y = F(x), \quad y = \phi(x) \text{ 等:}$$

讀作 y 為 x 之 f 函數；或 y 等於 x 之 f ； y 等於 x 之 F ； y 等於 x 之 ϕ 。 f, F, ϕ 等字母表示不同之函數。

設變數 y 為變數 x 之函數，則 x 為自變數 (independent variable)， y 為因變數 (dependent variable)。函數之觀念含有二要素：
 (1) 自變數僅能在某一組數內任取一值，此一組數稱為自變數之變程 (range)。
 (2) 變數間必有對應律 (law of correspondence) 藉以在自變數變程內定因變數之值。苟無對應律，或自變數不在其變程內，雖有函數記法，亦無從確定此函數之特性。

設 y 為 x 之函數，則當 x 在某變程內， y 有對應之值。此一組 y 值亦可視為 y 之變程，在此變程內， x 亦可視為 y 之函數。在 y 之變程內任取一 y 值，其對應 x 值，即原先藉以求得此 y 值之 x 值也。故自變數與因變數之關係可以互易，惟 y 雖為 x 之單值函數， x 仍可為

y 之多值函數。

第二節 函數之分類

函數可按自變數變程之性質分類如下：

(1) 分立變數 (discrete variable) 之函數 例如幾何級數之首項為 a , 公比為 r , 則級數前 n 項之和為項數 n 之函數,

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

式中自變數 n 祇能為 1, 2, 3 等分立值, 其變程為全部正整數。他如某市人口為時間 (以年計) 之函數; 木樁入地之深度為捶擊次數之函數, 皆屬此類。

(2) 連續變數 (continuous variable) 之函數 此為更重要之一類。在上列級數求和公式內, 設 a 與 n 為定值, 則 s 為變數 r 之函數, r 可為任何實數。實數中無有不可為 r 者, 換言之, 即 r 之變程內無隔斷之處, 故 r 謂之連續變數。在下列各式內,

$$y = \sin^{-1} x, \quad y = \sqrt{4-x^2}, \quad y = \log x$$

變數 x 皆為連續變數, 若 y 之值以實數為限則第一例之變程為自 -1 至 $+1$ 之一切實數 (包括 ± 1 在內), 第二例之變程自 -2 至 $+2$, 第三例之變程則包括全部正實數。

實數 一名詞, 所以別於複數 (complex number), 複數者含負數偶次方根之數也。數既有實有複, 函數亦有實變數函數與複變數函數之別。複變數函數為高等數學中重要之一門, 本書雖論複數, 但對於函數之研究, 則大都限於自變數變程之為實數者。

以對應律之性質為函數分類之根據較上述分類法更為重要。此法視因變數如何由自變數求出以為分類之標準。

(1) 代數函數 在此類函數中將自變數 x 作有限次數之算術運算即得 y 之值。代數函數復可分為：

(a) 有理代數函數 (rational algebraic functions) 運算僅包括加減乘除者屬於此類。多項式 (polynomials) 爲此類之特例，式中僅有加減乘而無除。加減乘除謂之有理運算。茲舉此類函數之例如下：

$$x^3 - \frac{5}{3}x + 9 \text{ (多項式)}, \quad \frac{x-2}{x+5}, \quad x^4 - \frac{6}{x}$$

(b) 無理函數 (irrational functions) 此類除加減乘除外，多一開方之運算

$$\sqrt{x+1}, \quad \sqrt[3]{1-x^2}, \quad x + \sqrt{1-x}, \quad \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} \text{ 等。}$$

(2) 超越函數 (transcendental functions) 此爲非代數的函數，不能以有限次數的運算求得函數之值。此類函數雖完全能用數學術語確定之，但根據此等函數定義祇能求得計算函數近似值之法（近似之程度則可隨人之所欲）。此類函數每有一定之名稱與記法，其值並列爲表以便查。重要之超越函數有：

(a) 三角函數 如 $\sin x$, $\cos 2x$, $\tan \frac{1}{2}x$ 等。

(b) 反三角函數 如 $\sin^{-1}x$, $\sec^{-1}x$ 等。

(c) 指數函數 如 10^x , e^{2x} 等。

(d) 對數函數 如 $\log x$, $\log(1-x^2)$ 等。

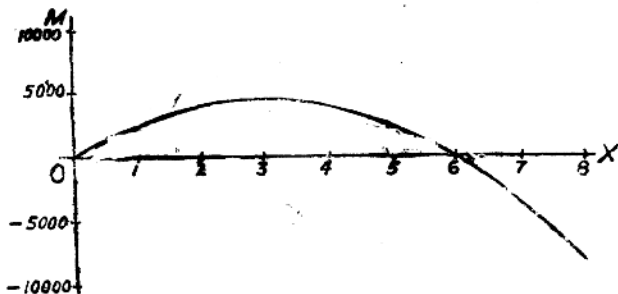
(3) 經驗函數 (empirical functions) 此類函數之定義不能用數學術語表出。其函數關係（即對應律）藉科學之術語如物理學，醫學，社會學，經濟學中之術語以確定之。對應於各個不同之自變數之函數值，係以量度，觀察，或計數定之，通常僅能得其近似值。每組因變數自變數之值或列表或繪圖以記錄之，有時經驗函數可與某代數函數或超越函數相近，爲便於運算起見即以之代替經驗函數。此類函數至爲重要，本書於第十三章內詳論之。

第三節 簡單函數之圖形

本節討論不以圖形表示之函數應如何就其式以繪出函數圖形之法。欲製函數之圖形必假設函數值已列成一表, 或已知藉以求函數值之對應律。如函數尚未列成一表, 繪圖之第一步即據對應律, 選擇適當之自變數以求對應之函數值, 製成一表。第二步為選定自變數之比例尺, 繪於一水平線上, 此線謂之橫坐標軸 (axis of abscissas)。單位之選擇以能使變數之變程或其待研究之部分在繪圖紙上有適當之長度。第三步為選定因變數之比例尺, 繪於一垂直線上, 此線謂之縱坐標軸 (axis of ordinates)。單位之選擇須使函數之極端值能繪於紙上。兩變數所代表之量性質各異, 故縱橫坐標軸上之單位無甚重要之關係, 但遇一部分幾何問題, 則二軸上宜用相同之單位。第四步即以紙上之點代表表上各組相對應之數值, 每點之位置正對縱橫二坐標軸上該點所代表之一組數值之處。如製表時自變數選擇適當, 則以線連接諸點, 即得函數之圖形。圖上沿水平方向量得之值曰橫坐標 (abscissa), 沿垂直方向量得之值曰縱坐標 (ordinates)。

茲以第二節所舉各函數為例以說明之。關於分立變數之函數可捨而不論, 蓋此等函數, 按上法製得之點, 各各獨立, 無須以線連之, 為醒目起見, 不妨以若干段直線連接之, 如是而已。對於連續函數, 則問題不如是之簡單, 茲就前述連續函數之分類法, 依次討論之。

(1) 代數函數 設 $y=f(x)$, 而 $f(x)$ 為 x 之代數函數。此二變數之變程或囿於一部分之實數, 或推至於無限大, 或有正有負。將各值列表後, 則應注意各點可以顯出, 且可為選定 x, y 在圖上比例尺之助。



第 1 圖

例：設有長 8 呎之梁，固定其一端，而支柱其他端，其擔負為每呎 1,000 磅。其彎曲矩(M)可以下列公式表之：

$$M = 3000x - 500x^2$$

式內 x 為自支柱端之距離 (以呎為單位)， M 之單位為磅呎。將各值列表， x 之變程自 0 至 8，在此變程內， M 之變程為 -8000 至 4500 。故選擇比例尺俾函數之關係得以顯出，頗屬易事。表上各點標出後，以光滑之曲線連之，假定由其他 x 值計算而得之一組 x ， M 值亦可以曲線上一點表之。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
M	0	2500	4000	4500	4000	2500	0	-3500	-8000

例 2. 向上拋球，其初速度(initial velocity)為每秒 64 呎，試以球與出發點距離 h 之函數表速度 v 。設重力加速度 g 為向下每秒每秒 32 呎，則

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{4096 - 64h}$$

式中 v 為速度 (單位為每秒呎)， h 為球高出出發點之距離 (單位為呎)。令 h 之值為 8 之倍數，則計算較易， h 之最大值以 64 為限， h 之負值可捨而不論。 h 在 56 與 64 之間 v 變動極速，故表中加 $h = 60$ ， $v = \pm 16.0$ 。表內 $h = 8, 24, 40$ 之對應 v 值即不算出，亦無損於