高等数学

（下册）

杨宁　周海东　胡成　何瑞文　编

涂汉生　主审

西南交通大学出版社

高　等　数　学

（下册）

杨　宁　周海东
胡　成　何瑞文　编

涂汉生　主审

西南交通大学出版社
·成都·

内 容 提 要

本书是结合近年来的教学实践，并根据“高等数学课程教学基本要求”编写而成的.

全书分上、下两册. 本册为下册，内容包括微分方程、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数等. 书末附有习题答案.

本书可作为高等学校工科专业高等数学课程的教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 杨宁，周海东，胡成，何瑞文编.
成都：西南交通大学出版社，2004.1
ISBN 7-81057-749-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①杨… ②周… ③胡… ④何… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 113342 号

高 等 数 学
（下册）

杨宁 周海东
胡成 何瑞文 编

*

责任编辑 刘婷婷
封面设计 肖 勤
西南交通大学出版社出版发行
(成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行部电话：87600564)
http: //press.swjtu.edu.cn
E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷

*

开本：787 mm × 960 mm 1/16 印张：20.25
字数：354 千字
2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 7-81057-749-2/O · 055
定价：24.80 元

前　　言

此书是结合近年来的教学实践，并根据“高等数学课程教学基本要求”编写而成的。

全书分为上、下两册。上册内容包括函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用；下册内容包括微分方程、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。空间解析几何与向量代数的内容则纳入到《线性代数》教材中。

本书适用学时（课内）为 170 学时左右，分两学期安排，周学时为 5。本书可作为高等学校工科专业高等数学课程的教材或教学参考书。书中有“*”部分内容，可选讲或自学。

参加本书编写工作的有：何瑞文（第一、二、三章）、胡成（第四、五、六、十一章）、杨宁（第七、八章）、周海东（第九、十章），并由涂汉生主审。

在本书编写过程中，得到西南交通大学应用数学系（特别是高等数学教研室）和西南交通大学出版社的大力支持与帮助。在此我们一并表示衷心的感谢。

由于受我们的水平和经验所限，本书不妥之处在所难免，敬请同行专家及广大读者给予批评指正。

编　者

2003.1 于西南交大

目　录

第七章　微 分 方 程

在解决实际问题的过程中，人们常常希望能确定反映客观事物内部联系的数量关系，即确定所讨论的变量之间的函数关系．然而往往有些问题不容易直接找出所需要的函数关系，但是根据具体问题的实际背景和数学分析的方法，有时却比较容易建立起含有自变量、待求函数及其导数(或微分)之间的关系式．这种联系着自变量、未知函数及它的导数的关系式就是所谓的"微分方程"．微分方程是利用一元微积分的知识解决几何问题、物理问题和其他各类实际问题的重要数学工具，也是对各种客观现象进行数学抽象，建立数学模型的重要方法，有着广泛的应用．微分方程本身是一个独立的、内容十分丰富的数学分支．对微分方程进行研究，通过一定的数学方法求出满足方程的未知函数来，就是"解微分方程"．本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的微分方程的经典解法．

第一节　基 本 概 念

为了说明微分方程的基本概念，我们先看下面两个简单的例子．

一、引　例

例 7－1　已知一曲线通过点(1,2)，且在该曲线上任一点 $M(x,y)$处的切线的斜率为 $2x$，求此曲线的方程．

解　设所求曲线的方程为 $y=y(x)$，根据导数的几何意义，$y=y(x)$应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x. \tag{1}$$

因为所求曲线过点(1,2)，所以 $y=y(x)$还应满足条件

$$y|_{x=1}=2, \tag{2}$$

对(1)式两边积分，得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C, \tag{3}$$

其中 C 是任意常数.

把条件(2)代入(3)式,得 $2=1^2+C$,由此得到 $C=1$,故所求曲线方程为

$$y=x^2+1. \tag{4}$$

例 7-2(自由落体) 一质量为 m 的物体在重力作用下下落. 已知物体下落($t=0$)时的初始位置为 s_0,初始速度为 v_0,若不计空气阻力,求物体下落时路程随时间的变化规律.

解 取坐标系如图 7-1 所示. 设物体的运动规律为 $s=s(t)$,由牛顿 (Newton)第二定律知 $s=s(t)$ 应满足关系式

$$F=m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2},$$

现在 $F=mg$(g 为重力加速度),所以

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g. \tag{5}$$

此外,$s(t)$还应满足条件

$$s\Big|_{t=0}=s_0,\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_0, \tag{6}$$

图 7-1

将(5)式积分一次,得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt+C_1, \tag{7}$$

再积分一次,得

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{8}$$

其中 C_1,C_2 都是任意常数.

将条件(6)式分别代入(7)式、(8)式两式可求得

$$C_1=v_0,\quad C_2=s_0,$$

故所求的物体运动规律为

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0. \tag{9}$$

二、微分方程的基本概念

1. 微分方程

凡表示自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)之间关系的方程叫做**微分方程**. 在微分方程中,自变量及未知函数可以不出现,但未知函数的导数

必须出现.

未知函数是一元函数的微分方程也叫**常微分方程**. 例如,方程(1)、方程(5)都是常微分方程. 本章只讨论常微分方程,并简称之为**微分方程**(有时也简称为方程).

2. 微分方程的阶

微分方程中所出现的未知函数的导数的最高阶数,叫做**微分方程的阶**.

例如,方程(1)是一阶微分方程,方程(5)是二阶微分方程,而 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$ 是三阶微分方程.

3. 微分方程的解

如果在区间 I 上有定义的某个函数满足微分方程,即将这个函数代入微分方程后能使微分方程成为恒等式,就称该函数是微分方程在区间 I 上的**解**.

例如,函数(3)和函数(4)都是方程(1)在$(-\infty,+\infty)$区间上的解.

如果微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数(即不能通过运算而合并的常数)的个数恰好和方程的阶数相等,这种解叫微分方程的**通解**.

例如,函数(3)是方程(1)的通解;函数(8)是方程(5)的通解.

4. 定解条件、初始条件;定解问题、初值问题;特解

用来确定微分方程通解中所有任意常数的附加条件叫做微分方程的**定解条件**. 当定解条件是由某一点处未知函数的值及导数值给出时,则特称之为**初始条件**.

例如条件(2)和条件(6)就是初始条件,它反映了曲线在某一点的特定状态或运动物体的初始状态.

求满足某种定解条件的微分方程解的问题称为**定解问题**. 特别地,求微分方程满足指定初始条件的解的问题,称为**初值问题或Cauchy (柯西)问题**.

微分方程的不含任意常数的解,称为**特解**. 一般它可利用定解条件(例如初始条件)由通解确定出其中的任意常数后得到.

例如(4)式是方程(1)满足初始条件(2)的特解;而(9)式是方程(5)满足初始条件(6)的特解.

微分方程的特解的几何图形是一条平面曲线,叫**积分曲线**;而通解表示一族曲线,叫**积分曲线族**.

例如,例 7－1 中的抛物线 $y=x^2+1$就是方程(1)的积分曲线族中经过点(1,2)的那一条积分曲线,如图 7－2 所示.

二阶方程的初值问题

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'), \\ y\big|_{x=x_0}=a_1,\ y'\big|_{x=x_0}=a_2 \end{cases}$$

的几何意义是求微分方程的通过点(x_0,a_1)且在该点处的切线斜率为 a_2 的那条积分曲线.

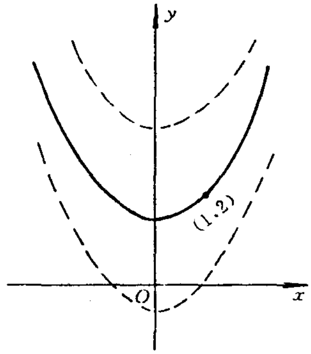

图 7-2

注 1 微分方程的解也可用隐函数的形式给出. 如果由方程

$$\Phi(x,y)=0 \tag{10}$$

所确定的隐函数 $y=y(x)$是一个微分方程的解，则方程(10)就叫做所讨论的微分方程的**隐式解**. 隐式通解的意义读者可以类推. 例如直接验算就知

$$x^2+y^2=C \quad (C>0\text{ 且为任意常数})$$

是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$$

的隐式解，而且还是隐式通解.

注 2 n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{11}$$

其中 F 是 $n+2$ 个变量的函数.

一般说，n 阶微分方程的通解有 n 个独立的任意常数，其定解条件也有 n 个. 其初值问题的表示式为

$$\begin{cases} F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \\ y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}, \end{cases} \tag{12}$$

其中 $y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}$是已知实数.

在问题(12)中，先求出通解 $\Phi(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是 n 个任意常数. 如果由初始条件 $y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$确定出 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，便可得特解 $\varphi(x,y)=0$.

本章主要研究一阶、二阶微分方程.

习 题 7-1

1. 下列等式中哪些是微分方程?

(1) $y''-3y'+2y=x$;　　(2) $y^2-3y+2=0$;

(3) $y'=2x+6$;　　(4) $y=2x+6$;

(5) $\mathrm{d}y+(2x+6)\mathrm{d}x=0$;　　(6) $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\sin t$.

2. 说出下列微分方程的阶.

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}=0$;　　(2) $s''+3s'+2s=\cos t$;

(3) $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-y=\mathrm{e}^x$;　　(4) $\sin x\cos y\mathrm{d}x+\cos x\sin y\mathrm{d}y=0$.

3. 验证下列各题中所给函数是微分方程的解.

(1) $x^2-xy+y^2=C$,　$(x-2y)y'=2x-y$;

(2) $y=\ln(xy)$,　$x(y-1)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$;

(3) $y=x+C\mathrm{e}^y$,　$(x-y+1)y'=1$.

4. 已知曲线族,求出它相应的微分方程(其中 C,C_1,C_2 均为常数).

(1) $(x+C)^2+y^2=1$;　　(2) $(y-C_2)^2=4C_1x$;

(3) $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$.

5. 写出下列条件确定的曲线所满足的微分方程.

(1) 曲线在点(x,y)处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

(2) 曲线上点 $P(x,y)$处的法线与 x 轴的交点为 Q,且线段 PQ 被 y 轴平分;

(3) 曲线上点 $P(x,y)$处的切线与 y 轴的交点为 Q,线段 PQ 的长度为 2,且曲线通过点(2,0).

第二节　可分离变量方程与齐次方程

微分方程理论发展的古典时期,即从 17 世纪后期 Newton 和 Leibnitz 发明微积分以后直到 18 世纪末,研究的主题是:尽可能设法把当时遇到的一些类型的微分方程的求解问题化成积分(求原函数)问题.这类方法习惯上称为**初等积分法**.本节至第四节所介绍的求解方法都可归结为初等积分法.

本节和下节先介绍几种一阶方程的解法.一阶方程的一般形式是 $F(x,y,y')=0$,这里讨论已解出导数的方程,即形如 $y'=f(x,y)$的方程,这种方程还可以写成微分的形式

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

一、可分离变量方程

1. 形　式

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{1}$$

或
$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0 \tag{2}$$

的方程叫做**可分离变量方程**. 这种方程的特点是：对(1)式来说，右端是只含 x 的函数和只含 y 的函数的乘积.

例如，$y'=3ye^x$，$3x^2+5x-5y'=0$，$(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$ 都是可分离变量方程.

2. 解　法

假设 $f(x)$在区间 $a<x<b$ 上连续，$g(y)$在区间 $c<y<d$ 上连续，且 $g(y)\neq0$：

(1) 将方程(1)分离变量

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx, \tag{3}$$

使方程的两边都只包含一个变量及其微分.

(2) 将方程(3)两边积分

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx, \tag{4}$$

设积分结果为

$$G(y)=H(x)+C, \tag{5}$$

其中 $G(y)=\int\frac{dy}{g(y)}$和 $H(x)=\int f(x)dx$ 分别是$\frac{1}{g(y)}$和 $f(x)$的某一个原函数，C 是任意常数.

则由(5)式确定的隐函数 $y=y(x,C)$在其可导区间上是方程(1)的通解. 如果能从(5)式中解出 y，

$$y=G^{-1}[H(x)+C]\quad(G^{-1}\text{表示 } G \text{ 的反函数}) \tag{6}$$

则称它为方程(1)通解的显式表达式，而(5)式是通解的隐式表达式.

注意到将方程(1)分离变量化为方程(3)时，需要 $g(y)\neq0$，如果存在常数 y_0，使 $g(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 显然也是方程(1)的解. 如果 $y=y_0$ 包含在(5)式中(即它可由(5)式中 C 取某特定常数得到)，那么，我们也把包含 $y=y_0$ 的(5)式理解为方程(1)的通解.

例 7-3 求 $y'=\frac{y}{1+4x^2}$的通解.

解 此为可分离变量方程，设 $y\neq0$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2},$$

两端积分，得

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\arctan2x+C_1,$$

即
$$|y|=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\arctan2x+C_1}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\arctan2x}\cdot\mathrm{e}^{C_1}$$

或
$$y=C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\arctan2x},$$

其中 $C_2=\pm\mathrm{e}^{C_1}$是非零的任意常数.

由于 $y=0$ 也是原方程的解，令 C 为任意常数，即得所给方程的通解

$$y=C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\arctan2x}.$$

例 7-4（铀衰变） 放射性元素铀，由于不断地有原子放射出微粒子而变成其他元素，铀的含量就不断减少，这种现象叫做衰变. 由原子物理学知道，铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量 M 成正比. 已知 $t=0$ 时，铀的含量为 M_0，求在衰变过程中铀的含量 $M(t)$随时间 t 变化的规律.

解 铀的衰变速度就是 $M(t)$对时间 t 的导数$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$. 依题意可得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\lambda M,\tag{7}$$

其中 $\lambda>0$ 叫衰变常数，λ 前置负号是由于当 t 增加时，M 单调减少，即$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}<0$ 的缘故.

初始条件为 $M|_{t=0}=M_0$，方程(7)是可分离变量方程，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=-\lambda\mathrm{d}t,$$

两边积分，注意到 $M>0$，并以 $\ln C$ 表示任意常数，得

$$\ln M=-\lambda t+\ln C,$$

即
$$M=C\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

代入初始条件可求得 $C=M_0$，所以

$$M=M_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

当 $M=\frac{1}{2}M_0$ 时，可得 $t^*=\frac{\ln2}{\lambda}$，它叫做半衰期，如图 7-3 所示.

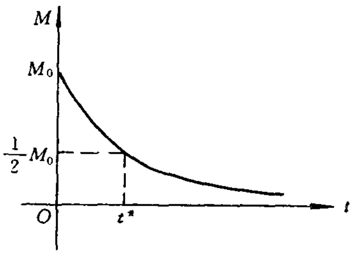

图 7-3

例 7-5（Logistic 方程） 在一个动物群体中，个体的生长率是平均出生率与平均死亡率

之差. 设某群体的平均出生率为正的常数 β,由于拥挤以及对食物的竞争加剧等原因,个体的平均死亡率与群体的大小成正比,其比例常数为 $\delta(>0)$,若以 $P(t)$表示 t 时刻的群体总量,则 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$就是该群体的生长率,每个个体的生长率为 $\frac{1}{P}\cdot\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$. 设 $P(0)=P_0$,试写出描述群体总量 $P(t)$的微分方程,并求解.

解 由题设条件,个体的平均死亡率为 δP,从而个体的生长率为 $\beta-\delta P$,则

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\beta-\delta P,$$

也即

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P(\beta-\delta P). \tag{8}$$

此微分方程称为 Logistic 方程,它与条件 $P(0)=P_0$ 合在一起,构成了一个初值问题,它的解描述了一个群体的生长规律.

对(8)式分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}P}{P(\beta-\delta P)}=\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}P}{P(\beta-\delta P)}=\int\mathrm{d}t=t+C, \tag{9}$$

对(9)式左端部分分式后再求积分,得

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}P}{P(\beta-\delta P)}&=\int\frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}P}{P}+\frac{\delta}{\beta}\int\frac{\mathrm{d}P}{\beta-\delta P}\\&=\frac{1}{\beta}\ln P-\frac{1}{\beta}\ln(\beta-\delta P)=t+C,\end{aligned}$$

所以

$$\ln\left(\frac{P}{\beta-\delta P}\right)^{\frac{1}{\beta}}=t+C,$$

即

$$\left(\frac{P}{\beta-\delta P}\right)^{\frac{1}{\beta}}=\mathrm{e}^C\mathrm{e}^t=C_1\mathrm{e}^t.$$

从而

$$\frac{P}{\beta-\delta P}=C_2\mathrm{e}^{\beta t},\quad (\text{其中 } C_2=C_1^\beta).$$

由初始条件 $P(0)=P_0$,易得 $C_2=\frac{P_0}{\beta-\delta P_0}$,将 C_2 代入,整理便得

$$P(t)=\frac{\beta}{\delta+\left(\frac{\beta}{P_0}-\delta\right)\mathrm{e}^{-\beta t}}.$$

若取 $\delta=0.001,\beta=0.4,P(0)=300$,则可求得 $P(10)=398$.

例 7-6 有高为 1 m 的半球形容器,水从它的底部小孔流出. 小孔横截面面积 $S=1\ \mathrm{cm}^2$(图 7-4),开始时容器内盛满了水,求水从小孔流出过程中,容器里水面的高度 h 随时间 t 的变化规律.

解　由 Torricelli 定律可知，水从容器中流出的速度 $v=0.62\sqrt{2gh}$，故在 $[t,t+\mathrm{d}t]$时间内流出的水的体积为

$$\mathrm{d}V=0.62S\sqrt{2gh}\mathrm{d}t=0.62\sqrt{2gh}\mathrm{d}t.$$

另一方面，容器内水面高度在$[t,t+\mathrm{d}t]$时间内由 h 降至 $h+\mathrm{d}h(\mathrm{d}h<0)$，从而

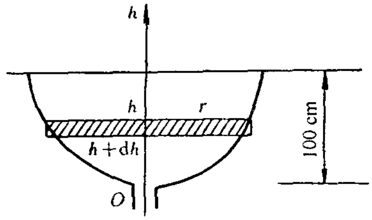

图　7-4

$$\mathrm{d}V=-\pi r^2\mathrm{d}h=-\pi[100^2-(100-h)^2]\mathrm{d}h$$

$$=-\pi(200h-h^2)\mathrm{d}h,$$（因为 $\mathrm{d}V>0,\mathrm{d}h<0$，所以前面应有"－"号）

故

$$0.62\sqrt{2gh}\mathrm{d}t=-\pi(200h-h^2)\mathrm{d}h, \tag{10}$$

初始条件为

$$h\big|_{t=0}=100, \tag{11}$$

将式(10)分离变量，有

$$\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(200h^{\frac{1}{2}}-h^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}h,$$

积分得

$$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}h^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}\right)+C, \tag{12}$$

把初始条件(11)代入(12)式，得

$$0=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}\times100^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}\times100^{\frac{5}{2}}\right)+C.$$

因此

$$C=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{4}{3}\times10^5-\frac{2}{5}\times10^5\right)=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\times\frac{14}{15}\times10^5,$$

将 C 代入(12)式并化简，得

$$t=\frac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7\times10^5-10^3h^{\frac{3}{2}}+3h^{\frac{5}{2}}).$$

本例是通过对微小量 $\mathrm{d}V$ 的分析得到方程(10)的，这种微小量分析的方法也是建立微分方程的一种常用方法.

二、齐次方程

1. 形　式

形如

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{13}$$

的方程叫做齐次方程.

例如，$y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$，$(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$，$xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$ 都是齐次方程. 因为第二个和第三个方程都可以化为(13)式的形式，即化为

$$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \text{ 和 } y'=\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}.$$

2. 解 法

在齐次方程(13)中，通过引进新的未知函数 $u=\dfrac{y}{x}$，就可以把它化为可分离变量的方程.

令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=ux$，从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入方程(13)，得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u),$$

即
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\varphi(u)-u}{x}.$$

这是一个可分离变量方程.

分离变量，得
$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分，得
$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C.$$

记 $\Phi(u)$ 为 $\dfrac{1}{\varphi(u)-u}$ 的一个原函数，则得通解

$$\Phi(u)=\ln|x|+C,$$

再用 $\dfrac{y}{x}$ 代替解中的 u，便得到齐次方程(13)的通解.

例 7-7 求微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=2\sqrt{xy}$ 的通解.

解 将方程两边同除以 x，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}=2\sqrt{\frac{y}{x}},$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 代入上式，得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{u}, \tag{14}$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分，得

$$\sqrt{u}=\ln|x|+C_1,$$

即
$$e^{\sqrt{u}}=\tilde{C}_1|x|=Cx.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入便得所求方程的通解
$$e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}=Cx.$$

易见 $u=0$ 是方程(14)的一个解，即 $y=0$ 是原方程的一个解，但它不含在通解的表达式中.

例 7-8　求一曲线族，使其在任意点 P 处的切线在 y 轴上的截距等于原点到点 P 的距离 $|OP|$.

解　设所求的曲线族为 $y=f(x,C)$，则曲线上任意点 $P(x,y)$ 处的切线方程为
$$Y-y=y'(X-x)$$

或
$$Y-y'X=-y'x+y,$$

所以切线在 y 轴上的截距为 $-y'x+y$. 又 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$，由题意得 $y=f(x,C)$ 满足的微分方程为
$$-y'x+y=\sqrt{x^2+y^2}$$

或
$$y'=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}, \tag{15}$$

当 $x>0$ 时，方程(15)为
$$y'=\frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, \tag{16}$$

令 $\dfrac{y}{x}=u$，则方程(16)化为
$$u+x\frac{du}{dx}=u-\sqrt{1+u^2},$$

即
$$x\frac{du}{dx}=-\sqrt{1+u^2}. \tag{17}$$

用分离变量解方程(17)，得通解为
$$\frac{1}{u+\sqrt{1+u^2}}=C_1x\quad(C_1>0).$$

由 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式，得方程(16)的通解为
$$\frac{1}{\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}}=C_1x$$

或
$$x^2+2C_2y-C_2^2=0\quad\left(C_2=\frac{1}{C_1}\right);$$