·中学教学法丛书·

JIAO XUE FA CONGSHU

中学三角教学法

林 琤
叶世雄
黄 聪

广东人民出版社

·中学教学法丛书·

中学三角教学法

林　琤　叶世雄　黄　聪　编著

广东人民出版社

中学三角教学法

林　琤 叶世雄 黄　聪　编著

*

广东人民出版社出版

广东省新华书店发行

广东新华印刷厂印刷

737×1092毫米32开本　13印张　255,000字

1983年3月第1版　1983年3月第1次印刷

印数1—59,860册

书号7111·1189　定价1.05元

出版说明

教学法是研究教学规律的一门科学，是教育学的一个重要分支。提高教学质量，贵在得法。为帮助广大中、小学教师不断改进教学方法，提高教学质量，更多更快地为祖国的“四化”培养人材，广东、广西、湖北、湖南、河南五省（区）人民出版社共同协作，决定以较好的质量、较快的速度编辑出版《中学教学法丛书》和《小学教学法丛书》各一套，计分中学语文、英语、历史、地理、代数、几何、三角、物理、化学、生物、体育，小学语文、数学、自然常识、音乐、美术、体育等共十七册，在全国发行。

教学有法，但无定法。这两套丛书的出版，由于时间仓促，未能在五省（区）广泛征求教育工作者的意见，兼采博取各家之长，因此，疏漏谬误之处在所难免，切望同志们提出批评建议，以便再版时补充订正。

一九八二年十二月

目　　录

第一章　中学三角教学的一般问题

第一节　　绪　论

1.1　中学三角教学法的基本内容

我国1978年以后编写的全日制中学数学教材有了较大的改革，三角不再独立设科．它的内容已分别编在初中几何（或代数）和高中“代数与初等函数”部分．为了便于谈论，我们仍把它们合称为中学三角。

中学三角是中学数学的一部分．三角教学法具有中学数学教学法的共性，而中学数学教学法主要为探讨中学数学教学规律而设，它的基本任务是要解决中学数学应该“教什么”和“怎样教与怎样学”这两个问题．因此中学三角教学法的任务是研究中学三角的教学目的和要求；教学内容和它的体系；具体教材分析与教学方法探讨以及典型教学经验总结；各类三角习题的选编与处理．

数学教学法又是一门综合性的独立的边缘学科，既与数学学科和教学论有密切的关系，又与心理学、逻辑学有关．它所涉及的不仅是所谓一招一式的教学技巧，而是研究如何提高中学教学质量的重大课题．当前国际上中学数学教学法理

论正处于重大变革阶段，很多重大课题还需要讨论研究。

本章着重研究中学三角的教学目的、教学要求、教学内容和它的安排以及三角作业等一般问题. 至于具体的教材分析、教法探讨与习题选编将分别在下面各章讨论.

1.2 三角学的发展简史和研究对象

一、三角学的发展简史

我们研究三角学的发展史，目的在于更好地掌握三角的内容、应用和它的研究方法.

三角的产生和它的初期发展是与天文学、几何学分不开的. “三角学”一词，来自希腊文“三角形的测量”之意，也就是解三角形，这是三角学的基本问题之一. 后来随着人类认识与活动范围的扩大，三角又成为研究三角函数及其应用的一个数学分支. 而中学三角既包含解三角形的内容，又包括研究三角函数的内容. 回顾三角学的发展，大约可分为四个时期.

第一时期是三角学萌芽时期(从远古到公元十一世纪). 在此期间，三角学只是作为天文学的一种计算工具，尚未形成自己的任何理论体系. 人们只是利用当时具有的几何知识，使用各种各样的计算方法来确定星球的位置，编制了一些粗糙的计算弦长的表，汇积了许多互相无关的资料.

古埃及人建造了金字塔，表明他们已具有一定的几何、三角知识. 后来，希腊学者塔利斯利用相似三角形的道理测量出金字塔的高. 这是西方国家在三角测量方面的代表作.

我国古代天文学很发达，因而很早就具有一定的测量知识。在公元前一世纪的数学书《周髀算经*》里已经有平面测量术的记载。

《周髀算经》卷上之一，载有商高关于矩的用途说明：

平矩以正绳，偃（仰）矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方。

这几句话在中国数学史上有极其重要的地位，可据此确定商高时代（周朝）的测量技术以至整个数学水平。因用矩测量要借助相似形性质。从这里我们可以看到，我国早在商高时代就已经知道利用相似关系来进行测量，这比西方国家学者用同类方法去测量金字塔的高度早了五个世纪。

商高时代又用什么方法去测量“不可达”物的高、深和远呢？估计是用陈子测日法（陈子是周公的后人）。陈子曰“日中立竿测影”。但他把大地面假设为平的，导致测日地距离的结果误差甚大。陈子测日比希腊的阿利斯塔卡早三、四个世纪。

公元三世纪刘徽推广了陈子测日法，使“重差术*”发扬光大起来。

---

* 髀原义是股即大腿或股骨．这里指的是长八尺用以测量日影的表．周是周代．《周髀算经》是公元前一百年左右的作品，分上下两卷，有关数学的论述载在卷上之一、之二．这本书在数学方面的主要成就有三方面：1．勾股定理；2．测量术；3．分数运算．

* 重是重复，差是日影的相差，测两次并求日影的差，就可以算出距离，这叫做重差术．

刘徽认为“重差”是一种测量“可望而不可即的目标”的方法. 他选择了若干典型问题编成章. 因为第一题是测定海岛，所以称为《海岛算经》.

刘徽计算了以单位长为半径的圆内接正六边形、正十二边形等的边长. 公元十三世纪赵友钦计算了圆内接正四边形等的边长. 这些工作中，实际上已经求得了某些特殊角的正弦值.

西方三角学的最早奠基者是天文学家依巴谷（*Hipparchus*公元前180—125年）. 早期的三角学是伴随着天文学而产生的. 天文学家对于球面上的大圆弧构成的球面三角形的边和角之间的关系感到兴趣. 依巴谷发现“岁差”，可知那时他已采用了经纬度表示天空上星的位置. 他为了天文观测的需要，作了一个和现今三角函数表相仿的“弦表”，就是在固定半径的圆内，不同圆心角所对的弦长的表，一般几何教科书中的“托勒密定理”（圆内接四边形两对角线之积等于两组对边之积的和），就是托勒密从依巴谷的书中摘出的.

托勒密（*Ptolomy*约公元85—165年）所编的《天文集》是西方古代天文学的总结，这本书载有从0°到90°每隔半度的“弦表”. 他采用60进制，把圆周分为360度. 又把半径分为60等份，每份分为60小份，每一小份又分为60个更小的份*.

托勒密利用圆内接正五边形和正十边形的边长推导出

* 这三级小份拉丁文的名称就是以后度、分、秒名称的来源.

36°与72°的弦长．其它角度相应的弦长，是根据“托勒密定理”来推导的，由此制出“弦表”．

托勒密用“托勒密定理”推出正弦、余弦的两角和、差公式．实质上他已经得到与下列公式

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x)$$

等价的公式．

托勒密把半径定为60个单位记作60^p，60°的弦长就是60^p(等于半径)，90°的弦长就是$\sqrt{2}\,60^p=84^p51'10''$．

公元四世纪以后，希腊的数学停滞不前．在欧洲出现了科学萧条，数学的发展中心移到了印度、中亚细亚和阿拉伯国家．阿利耶毗陀（*Āryabhata* 约公元476—550）是印度数学家，在三角方面的贡献很大．他制作一个正弦表，利用弦长之半即弧的正弦来计算．他依照希腊人的习惯将圆周分为360度，每度又分为60分，整个圆周分为21600分，再由$2\pi R=21600$得$R\approx3438$，依此计算出第一象限内每隔3°45'的正弦长，如$\sin 30°=1719$，$\sin 45°=2431$．他比托勒密前进了一步，默认了曲线与直线可用同一单位来量度，这就孕育了弧度制的思想．

阿利耶毗陀称半弦（或全弦）为*Jiva*，是希腊人的弓弦的意思，后来辗转误传为胸膛凹处．十二世纪柏拉图（*Plato*）

将它意译成拉丁文 *sinus*，这是 *sine*（正弦）一词的来源。1631年我国邓玉涵与汤若宝等人编的《测量》一书，译*sinus*为正半弦，简称正弦。

中亚细亚在三角方面贡献最大的是阿尔—巴坦尼（*AL-Bâ-Trânî*，850—929）．他是著名的天文学家，积四十年经验著有《星的科学》一书，测得地球远日点的运动．他也把正弦译成*Sinus*，他采用半弦，并发现球面三角的余弦定律．他竖一根杆子在地上，求日影长 b，以测定太阳的仰角．竖直在地上的杆投影在地上的影长 b 的拉丁文译名叫直阴影，后变成余切（*cotangent*）．而水平插在墙上的杆投影在墙上的影长叫做反阴长，后来变成正切（*tangent*），920年左右阿尔—巴坦尼造出0°到90°相隔1°各个角的余切表．

第二时期是三角发展成为独立科目时期，即公元十一世纪到十八世纪．在这个时期编制了大量的三角函数表．

在使三角学脱离天文学成为独立的一个数学分支的工作中，首先要提及中亚细亚人的贡献．阿夫拉（*Aflah*，十一世纪后半叶）与阿塞尔拜疆的天文学家纳速爱定（*Nasir Eddin*，1201—1274）是这方面工作的先驱者．纳速爱定有三角、天文、几何、星盘等方面的著作．在三角方面，他指出：在已知球面半径的球面三角形中，不仅可以由三条边求三个角，而且可以反过来由三个角求三条边．这是球面三角与平面三角差异的重要标志．中亚细亚人约于公元七至十五世纪，引入了几种新的三角函数，建立平面三角与球面三角的若干公式，制造了大量的三角函数表．但他们最重要的贡献

是于十一世纪开始使三角脱离天文学而独立成科。

十二世纪初，随着大量阿拉伯文的书籍被翻译成拉丁文，西方的数学在东方影响下开始发展起来。文艺复兴时期德国的约翰·米勒（*John Mulles*），又叫列吉蒙坦（*Regiomontanne*，1436—1476）著的《论各类三角形》五卷（约完成于1464年），是欧洲第一本有系统的三角学，正式使三角学脱离天文学而成为独立的科目。这本书记载有三角定律和三角函数表。此外，他还首创了正切定理。

十六世纪，欧洲人在天文学与力学方面有巨大的成就。天文学家哥白尼(1473—1543)提倡地动说，他的弟子利提克斯(*Rhoe licus*，1514—1576）为天文观测推算了详细的三角数值表。他令半径等于10^{15}，作每隔10″的各个角的正弦、正切和正割表。至此，三角函数表已被比较精密地算出。英国人纳皮尔（*John Napier*，1550—1617)于1614年发现的对数可以大大简化三角的计算，促进了三角恒等变形的发展。十六、十七世纪，欧洲数学与其他自然科学互相促进，急促地向前发展。那时自然科学的研究中心是运动问题，与周期运动有关的发现有伽利略(*Galileo*, 1564—1642)观察摆的周期振动；牛顿(*Newton*，1642—1727)解释声波在一个周期内的空气扰动；惠更斯(*Huygens*，1629—1695)提出了光的波动学说。这些都激发了三角函数的产生。在数学方面，由于要表示运动的规律，就自然而然地引入了变量与函数的概念，开始了数学的变量时期。在十七世纪以前，那时函数概念未被充分认识，绝大多数的函数如$\log x$，a^x，$\sin x$等等都是当

作曲线来研究的．正弦曲线的出现，是1634年Roberval研究旋轮线时，把正弦型曲线 $y=a\sin\frac{x}{a}$（其中a是母圆的半径）当作它的伴侣曲线（伴旋轮线）而引入数学的（见美M·克莱因著《古今数学思想》第Ⅱ卷）．瓦里士(Wallis，1616—1703)在他的"力学"中给正弦曲线画了两个周期的图．约1673年牛顿与莱布尼兹(Leibniz，1646—1716)给出了实数的三角函数的无穷级数展开式；约翰·贝努利(John Bernoulli)等人给出了两角和与两角差的三角函数公式．此后，圣彼得堡科学院的第一批成员在和、差公式的基础上推导出其它的三角恒等式．棣美弗(Abraham de Moivre1667—1754)给出有名的"棣美弗定理"：

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$$

1714年科兹（Reger Cotes 1682—1716）给出公式，$ix=Ln(\cos x+i\sin x)$所有这些都大大丰富了三角学的内容．

第三时期是十八世纪以后，三角学成为研究三角函数的一个分析数学的分支．

欧拉(Euler1707—1783)在他的《无穷小分析引论》里，第一次用解析的方法叙述三角学的理论．对于三角学来说它也是一本划时代的著作．

首先，欧拉提出三角函数是对应的函数线与圆半径的比值，明确三角函数值是数．而在欧拉以前，三角函数实际上是在固定半径的圆内各函数线的长．欧拉还令圆半径为1，使三角的研究大为简便．

其次，欧拉在他的《引论》中创用a、b、c表示三角形的三边，用A、B、C表示它们分别对应的三个角。使用这些新的代数符号，大大简化了三角公式，同时使三角学摆脱几何的形式。

再次，欧拉引入弧度制*（他得出$\sin\pi=0, \sin\frac{\pi}{2}=1$），将度量直线和圆弧的单位统一起来，简化了高等数学中有关三角函数的公式和计算。1743年欧拉写出展开式：

$$\cos Z = 1-\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^4}{4!}-\frac{Z^6}{6!}+\cdots\cdots;$$

$$\sin Z = Z-\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^5}{5!}-\frac{Z^7}{7!}+\cdots\cdots.$$

（Z为复数）

并指出关系：

$$\sin Z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\ \cos Z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.$$

也是从欧拉时代开始，数值变数的三角函数已经作为一个独立的初等超越函数而存在。三角函数不仅是解三角形的主要工具，而且是学习高等数学、物理学和各种科学技术的基础知识，特别是在研究周期运动的时候。所有这些，都标志着三角学从研究三角形解法进一步转变成为研究三角函数及其应用的一个分析数学的分支。在复变函数论里，$\sin Z$，

* 弧度单位的书写在1881年用ρ表示，如用πρ表示π弧度。1907年—1925年用π^c表示π弧度，近年来习惯把这些记号省略。