二十一世纪青少年科学素质教育全书

数学的奥秘

☆ 新课标 新知识 图文版

☆ 开拓学习视野 启迪智慧窗口

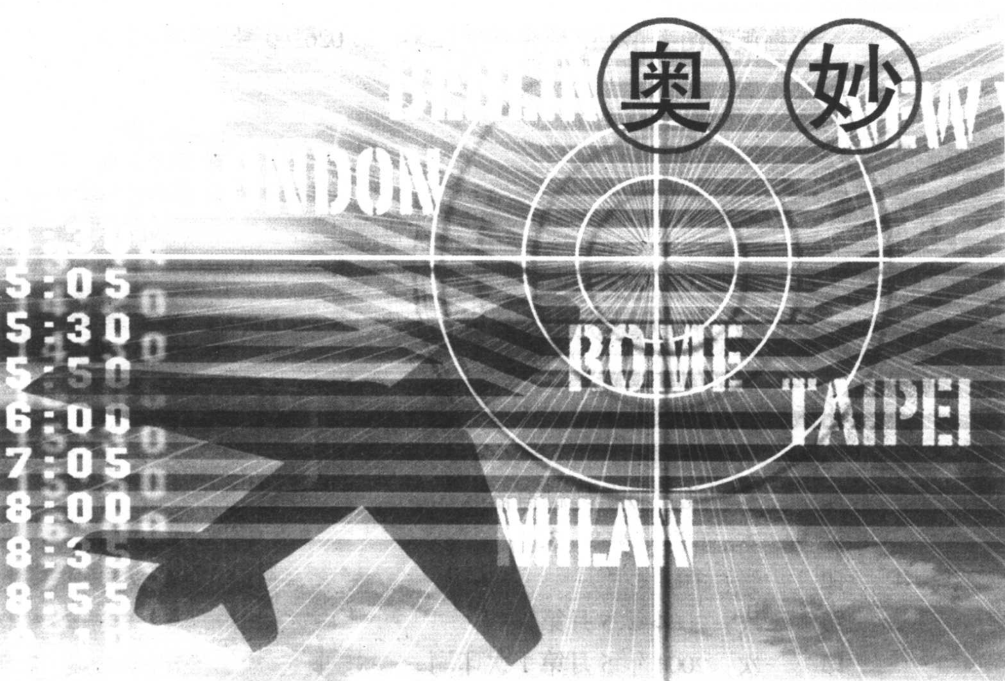
☆ 21世纪青少年获取新世纪

新公民科技身份证的必由之路

内蒙古人民出版社

21世纪青少年科学素质教育全书

数学的奥妙



内蒙古人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

21世纪青少年科学素质教育全书/韩泰伦等编.
—呼和浩特:内蒙古人民出版社,2004.4
ISBN 7-204-06381-3

Ⅰ.2… Ⅱ.韩… Ⅲ.自然科学—青少年读物
Ⅳ.N49

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第026160号

21世纪青少年科学素质教育全书(全48册)

出版发行: 内蒙古人民出版社出版发行
(呼和浩特市新城西街20号)
印　　刷: 北京金华印刷有限公司
开　　本: 850×1168　32开
印　　张: 310
版　　次: 2004年5月第1版
印　　次: 2004年5月第1次印刷
书　　号: ISBN 7-204-06381-3/G·1438
定　　价: 760.00元(全48册)

《21世纪青少年科学素质教育全书》

编　委　会

目　录

第一章　数学趣闻

测量太阳高度

古人很早就知道,用小小直角尺(矩)可以量出相当高的高度。他们把角尺直立在水平位置上,对准要测量的物体,使物体的最高点与角尺两边上的两点成一直线,利用相似直角三角形对应边成比例的性质,就可以把物体的高度算出来了。这里的条件是:直尺的直角点到物体垂直于水平面的线的距离是能够用尺直接测量出来。

两千多年以前,汉代的天文学家又招这种方法推广到计算太阳的高度,这是古代一个十分有趣的天文问题,也是一个很有意义的数学问题。我们现在知道,太阳与地球是宇宙中两个椭圆形的天体,它们之间的平均距离有 14960 万公里。可是古代的人想知道太阳的高度有多少,他们又是怎样去测量的呢?

原来,那时有的天文学家,认为天是圆的(指球形),地是方的。地球是一望无际的平地,挂在天空中的太阳,尽管一年四季千变万化,但在特定的时间和地点,它的高度是可以测量

计算的。于是,这些天文学家用一根八尺长的标杆(p),选定夏至这一天,在南北相隔一千里的两个地方,(A,B),分别测出太阳的影子长度(m,n)。设太阳离地面的高度为 h+p,A 点到太阳在地面的垂足的距离为 d,根据相似直角形对应边成正比例的性质,得

$$\begin{cases} \dfrac{h}{p}=\dfrac{d}{m} & (1) \\ \dfrac{h}{p}=\dfrac{d+AB}{n} & (2) \end{cases}$$

解方程组得

$$h=\frac{p\times AB}{n-m} \qquad (3)$$

汉代的天文学家认为,北面 B 点的影子 n 与南面 A 点的影长 m 恰恰相差 1 寸。因此,$n-m=1$ 寸,$p=8$ 尺,$AB=1000$ 里,代入(3)式得

$$h=\frac{8\text{尺}\times 1000\text{公里}}{0.1\text{尺}}=80000\text{里}$$

将 80000 里再加上标杆的长度 8 尺,便是太阳离地面的高度(当然,这个结论是不符合实际的)。从(3)式中我们知道,h 的高度等于北面影子与杆竿长之比减去南面影子与标杆长之比去除南北两点间的距离。同样,用这两个比值的差除以南面影长,便得到 A 点到太阳在地面的垂足的距离。因此,南北两点的距离确定以后,太阳离地面的高度主要决定于标杆影长与标杆长的两个比值之差。但是,因为他们假设地面是平的,不符合实际情况,因而得出错误的结果。然而,我国古代这种数学方法是正确的,汉代天文学家把这种计算方法称

为“重差术”。公元第三世纪大数学家刘徽,系统地总结了这种办法,写成专门的一章,也是叫做“重差”,附在古代数学名著《九章算术》之后。唐代初年,国子监整理出版古代数学著作时,把这一章作为《算经十书》之一,单独发行。因为它第一个问题是测出一个海岛的高度和距离,所以又把它称为《海岛算经》,这本书一直流传到现在。

国王赏不起的米

古印度有个大名鼎鼎的国王,非常爱玩游戏。

有一次,他突发奇想,下令在全国张贴招贤榜:如果谁能替国王找到奇妙的游戏,将给予重赏。

一个术士揭了招贤榜。他发明了一种棋,使国王玩得舍不得放手。国王高兴地问术士道:“你对本王的赏赐要求些什么?”术士赶忙拜倒:“大王陛下在上,小小术士没有特殊的要求,只请大王在那棋盘的第一个格子里放下一粒米,在第二个格子里放下两粒米,在第三个格子里放下 4 粒米,然后在以后的每一个格子里都放进比前一个格子多一倍的米,64 个格子放满了,也就是我要求的奖赏了。”国王一听,这点米算什么,就一口答应了。可是,当找来算师一五一十地算了以后,使国王大吃一惊,原来这些米可以覆盖全地球,全世界要几百年才能生产出来,根本无法赏给这位术士。

为什么这个棋盘里的米会有这么多呢?

让我们算一算看:

第一个格子里是 1 粒,第二个格子里是 2 粒,一共有 3

粒，或者，等于：

$$2\times2-1=3。$$

加上第三个格子的4粒，一共是7粒，即

$$2\times2\times2-1=7$$

再加上第四个格子的8粒，共有15粒，即

$$2\times2\times2\times2-1=15。$$

也等于：

$$2^4-1=15$$

所以，从第一格到第四格的米粒数就等于2的4次乘方减去1。那么，从第1格到第64格的米粒数，将等于2的64次乘方减去1，即：

$$\underbrace{2\times2\times2\cdots\cdots\times2}_{64\text{次}}-1=2^{64}-1$$

$$=18446744073709551615。$$

为什么这个数字会这么惊人呢？原来这个术士聪明地运用了数学上的几何级数，那是把2作为基本倍数，棋盘上的格数作为这个基本倍数的乘方，即2的n次方。棋盘上一共有64格，n就等于64，但是要减去第一格上那一粒米的数值，即$2^{64}-1$；然后再除以基本倍数减去第一格上数值的差，即2－1。这样，

$$\frac{2^n-1}{2-1}=\frac{2^{64}-1}{1}=2^{64}-1。$$

看来，一粒米、两粒米这个数目很小，算不得什么，可是，用几何级数一算，却成为一个不可想象的巨大数字。愚蠢的国王怎能领会几何级数的奥妙呢。

墓碑上的数学

丢番都是古代希腊著名的数学家，关于他的年龄在任何书上都没有明确的记载，可是，在他的墓碑上却刻下了关于他的生平资料。如果依据墓碑上提供的生平资料，用数学方法去解答，就能算出数学家丢番都的年龄，这就是人们所说的“墓碑上的数学”。

丢番都的墓碑上到底刻了些什么呢？

“过路人，丢番都长眠在此。倘若你懂得碑文的奥秘，它就会告诉你丢番都一生寿命究竟有多长。

“他的生命的六分之一是幸福的童年；再活了他生命的十二分之一，他度过了愉快的青年时代；后来丢番都结了婚，这样又度过了一生的七分之一；再过五年，他得了第一个儿子，感到很幸福，可是命运给这个孩子在世界上的光辉灿烂的生命只有他父亲寿命的一半；自从儿子死了以后，他努力在数学研究中寻求慰藉，又过了四年，终于结束了尘世的生涯。”

现在让我们从碑文中去寻求解答问题的各种数量关系。

先用方程解。我们假设丢番都的年龄是 x 岁；他的生命的六分之一是童年，童年便是$\frac{x}{6}$；再活了他生命的十二分之一，就是再活了$\frac{x}{12}$；他结婚又度过了一生的七分之一，便是$\frac{x}{7}$；再过五年生了儿子，儿子的生命是父亲寿命的一半，那就是$\frac{x}{2}$；儿子死后的四年，他结束了一生。

根据以上分析可以列出方程：

$$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$$

解：

$$84x=14x+7x+12x+42x+756$$

$$9x=756$$

$$x=84$$

这就是说，丢番都活了84岁。

也可用算术方法解。我们把丢番都的年龄看做整体“1”，童年是$\frac{1}{6}$，青年是$\frac{1}{12}$，结婚后度过了一生的$\frac{1}{7}$，又过了5年生儿子，儿子年龄是他父亲生命的$\frac{1}{2}$，又过4年，结束了一生。

由此说明(4+5)年恰好是他一生的$(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{7}-\frac{1}{2})$。列式为：

$$(4+5)\div(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{7}-\frac{1}{2})$$

$$=9\div\frac{84-14-7-12-42}{84}$$

$$=9\div\frac{9}{84}$$

$$=84(岁)$$

由此可以得知，丢番都21岁结婚，38岁做了爸爸，儿子只活了42岁，儿子死的时候，丢番都是80岁，儿子死后4年，这位84岁的老人给自己的一生画了一个句号。

丢番都的主要著作有《算术》一书。在书中，除了记述代

数原理外，还记述了不定方程及其解法。丢番都研究的不定方程问题，对后来的数学研究影响很大，后人也把不定方程称为“丢番都方程”。

朋友与“亲和数”

传说在公元前500多年，古希腊的克罗托那城中，毕达哥拉斯学派正在讨论“数对于万物的作用”，一位学者问“在我们交朋友时，存在数的作用吗？”伟大的数学家毕达哥拉斯答到：“朋友是你灵魂的倩影，要像220与284一样亲密。”他的话使人感到蹊跷，接着他宣布：神默示我们，220的全部真因子之和 $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$ 恰好等于284，而284的全部真因子之和 $1+2+4+71+142$ 又恰好等于220，它们是一对奇妙的“亲和数”。毕达哥拉斯的妙喻，简直使学者们惊呆了，不过在此后的一段漫长的时间里，人们知道的亲和数就只有这一对。

直到公元七世纪，在古老的巴格达城中，出现了一位伟大的博学者泰比特·伊本柯拉。他是医生、哲学家和天文学家，并且酷爱数学，他对亲和数的特性潜心思索，竟惊人地发现了一个求亲和数的公式。即 $a=3\cdot2^x-1$，$b=3\cdot2^{x-1}-1$，$c=9\cdot2^{2x-1}-1$，这里 x 是大于1的正整数，则当 a、b 和 c 为素数时，2^xab 和 2^xc 是一对亲和数，同时给出了公式的证明，并验证当 $X=2$ 时，求得的亲和数就是220和284。然而令人惋惜的是泰比特·伊本柯拉并没有给出新的亲和数。

又过了700多年，法国数学家费尔马在1636年再度独立

地证明了泰比特·伊本柯拉公式并且给出了第二对亲和数 17296 和 18416。继而另一位数学大师笛卡尔在给一位朋友的信中又确切地给出了第三对亲和数 9363584 和 9437056。这新的发现震动了数学界,吸引了许多数学家像寻宝一样投身于这场“寻数”的竞争。

直至 1750 年,诞生在瑞士国土上的伟大数学奇才欧拉宣布:他一举求出如 2620 和 2924,5020 和 5564,6232 和 6368 等六十对亲和数(一说五十九对),使他在寻数竞争中独占鳌头。

又过了一百多年,奇迹出现了,1866 年,一位年仅十六岁的孩子竟正确地指出,前辈们丢掉了第二对较小的亲和数 1184 和 1210,这戏剧性的发现使数学家们大为惊讶,据本世纪七十年代统计,人们已经找出一千二百多对亲和数,数学真是一个深不可测的海洋,它蕴藏着无穷无尽的奥妙。

“换一根短的杠杆”

据传说,在阿基米德晚年,他的家乡叙拉古城被强大的罗马帝国围困,在保卫城墙的战斗中,阿基米德充分动用了他的智慧和才能,发明许多特种武器,给敌人以沉重的打击,使得久攻不下的罗马军队只得弃强攻为封锁,后来,叙拉古城由于矢尽粮绝,才被罗马军队占领。

在保卫古城堡的最后一天,阿基米德看到城堡的一角,几名将士正用一根既沉重又长的杠杆在运一块大石,准备消灭入侵之敌。他好像突然想起什么似的猛然站起来高声喊到:“不要那么长的杠杆,换一根短的。”将士们惊呆了,用短杠杆