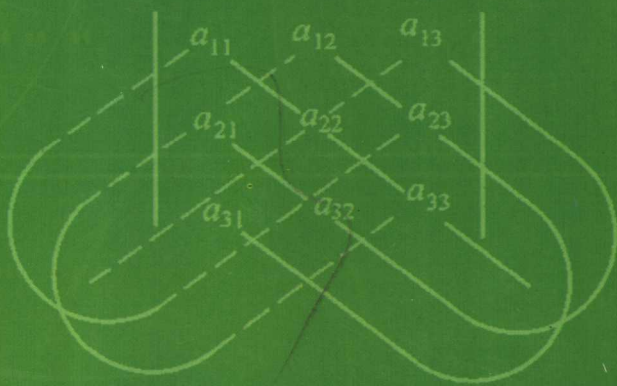


应用数学习题解答

YINGYONG SHUXUE XITI JIEDA

主编 王东红 耿悦敏



华南理工大学出版社

029

43A

2007

应用数学习题解答

主编 王东红 耿悦敏

主审 徐振昌

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目 (CIP) 数据

应用数学习题解答/王东红, 耿悦敏主编. —广州: 华南理工大学出版社, 2007.2

ISBN 978-7-5623-2552-9

I. 应… II. ①王… ②耿… III. 应用数学-高等学校-解题 IV. O29-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 008784 号

总发行: 华南理工大学出版社 (广州五山华南理工大学 17 号楼, 邮编 510640)

营销部电话: 020-87113487 87110964 87111048 (传真)

E-mail: scutc13@scut.edu.cn

http: //www.scutpress.com.cn

责任编辑: 吴兆强

印刷者: 湛江日报社印刷厂

开本: 787mm×1092mm 1/16 **印张:** 15.25 **字数:** 372 千

版次: 2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1~3 000 册

版权所有 盗版必究

前 言

本书是与高职高专教材《应用数学》完全配套的辅导教材，是高职高专相关专业学生不可缺少的学习资料。《应用数学习题解答》内容详尽，以方便学生在学习过程中参考，提高学生的学习效率，节省教学时间，也为自学应用数学者打开方便之门。

教材与辅导材料相辅相成，同步使用，以达到培养学生的思维、逻辑推理能力、运算能力及运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

本书由广东交通职业技术学院的王东红、耿悦敏担任主编，敖屹兰副教授也参加了编写工作，由徐振昌副教授担任主审。

本书在编写过程中得到广东交通职业技术学院领导和华南理工大学出版社的大力支持，在此，编者对他们表示衷心的感谢。

由于水平有限，编写时间也比较仓促，书中难免存在一些缺点和错误，敬请读者批评指正。

编 者

2006 年 12 月

目 录

第一章	行列式	(1)
第二章	矩阵	(7)
第三章	n 维向量	(18)
第四章	线性方程组	(23)
第五章	随机事件及其概率	(31)
第六章	随机变量及其分布	(40)
第七章	随机变量的数学特征	(50)
第八章	总体、样本和统计量	(57)
第九章	参数估计	(59)
第十章	假设检验	(64)

第一章

行列式

习 题 一

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 6 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}; \quad (5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad (6) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix};$$

$$(7) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}; \quad (8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(9) \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

解

$$(1) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2+c_1} \begin{vmatrix} a & a+b+c & 1 \\ b & a+b+c & 1 \\ c & a+b+c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 6 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+2r_1} \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \times 8 \times (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times (-9) = -18.$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} \\ = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3+c_4]{c_1+c_4} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{c_2-c_1} -8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

$$(6) \text{ 解法 1 } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3-2c_1}{c_4+c_1} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -11 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -11 & -1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -11 & -1 \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{r_2+r_3} 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & -1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 40.$$

$$\text{解法 2 } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2-3r_1}{r_3+r_1}{r_4-3r_1} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2}{r_4-r_2} \\ 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4+3r_3} 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 40.$$

$$(7) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_2 \\ c_2-c_1}]{c_4-c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3-c_2 \\ c_3-c_1}]{c_4-c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 4 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 4 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 4 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_4+r_1}]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-c_1}]{c_2-c_1} 10 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 10 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} 10 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} \\ = -40 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -40 \times (-4) = 160.$$

(9) 将各行都加到第一行后, 再提出第一行的公因数 $[x+(n-1)a]$, 得到

$$D = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \\ \xrightarrow[\substack{c_4-c_1 \\ \vdots \\ c_n-c_1}]{c_2-c_1} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\ = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

2. 解下列方程:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ x^2 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 0; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2x+1 & x \\ 1 & x+1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

解

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ x^2 & 9 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3-c_1}]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 3-x & 4-x \\ x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 4-x \\ 9-x^2 & 16-x^2 \end{vmatrix} \\ = (3-x)(4-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3+x & 4+x \end{vmatrix} = (3-x)(4-x).$$

令 $(3-x)(4-x)=0$, 解得 $x=3$ 或 $x=4$.

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2x+1 & x \\ 1 & x+1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 2x+1 & 0 \\ 1 & x+1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 2x+1 \end{vmatrix} \\ = (x-1)(x+1).$$

令 $(x-1)(x+1)=0$, 解得 $x=1$ 或 $x=-1$.

3. 用克莱姆法则解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10; \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 6x_1 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

$$(4) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}.$$

解

$$(1) D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -10 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 30,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -100,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 40.$$

由克莱姆法则, 得方程组的解是:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{30}{2} = 15 \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-100}{2} = -50. \\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{40}{2} = 20 \end{cases}$$

$$(2) D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 12 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -84,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} = -84,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 84.$$

所以得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-84}{-14} = 6 \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-84}{-14} = 6 \\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{84}{-14} = -6 \end{cases}.$$

$$(3) D = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5.$$

所以该方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-5}{-5} = 1 \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{5}{-5} = -1 \\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{5}{-5} = -1 \\ x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{-5}{-5} = 1 \end{cases}.$$

$$(4) D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27.$$

所以该方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3 \\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4 \\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1 \\ x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1 \end{cases}.$$

4. 问 λ 取何值时, 齐次线性方程组有非零解?

$$(1) \begin{cases} (\lambda - 1) x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (\lambda + 2) x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + (\lambda + 2) x_3 = 0 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} (1 - \lambda) x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3 - \lambda) x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1 - \lambda) x_3 = 0 \end{cases}.$$

解

$$(1) D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ 0 & \lambda - 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_3} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda + 6 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ 2 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 7).$$

当 $D=0$ 即 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-7$ 时, 齐次线性方程组有非零解.

$$(2) D = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 - (1 - \lambda) c_1}} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \lambda - 3 & 3 + 2\lambda - \lambda^2 \\ 2 & 1 - \lambda & 2\lambda - 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 3 + 2\lambda - \lambda^2 \\ 1 - \lambda & 2\lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & -\lambda - 1 \\ 1 - \lambda & 2\lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda (\lambda - 3) (2 - \lambda).$$

当 $D=0$ 即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 或 $\lambda=3$ 时, 齐次线性方程组有非零解.

第二章

矩 阵

习 题 二

1. 已知

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

求: (1) $3A + 2B$; (2) $2B - 4A$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad 3A + 2B &= 3 \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 3 & -3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 10 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 19 \\ 5 & 7 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad 2B - 4A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 10 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 4 & -4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -16 \\ -2 & 14 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. 设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

且 $A + 2X = B$, 求 X .

解 由 $A + 2X = B$, 得

$$X = \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7-3 & 5-(-1) & -2-2 & 4-0 \\ 5-1 & 1-5 & 9-7 & 7-9 \\ 3-2 & 2-4 & -1-6 & 6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

3. 计算下列各式:

$$(1) [-1, 3, 2, 5] \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad (2) \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} [-1, 3, 2, 5];$$

$$(3) [4, 2, 3] \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(5) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^2; \quad (6) [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

解

$$(1) [-1, 3, 2, 5] \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} = [-5].$$

$$(2) \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} [-1, 3, 2, 5] = \begin{bmatrix} -4 & 12 & 8 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 21 & 14 & 35 \\ 3 & -9 & -6 & -15 \end{bmatrix}.$$

$$(3) [4, 2, 3] \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} = [12, 21, -10, 20].$$

$$(4) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$(5) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 1 \\ 6 & 13 & 8 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$(6) [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3, a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{31}x_3x_1].$$

4. 设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

求: (1) AB ; (2) BA ; (3) $AB - BA$.

解

$$(1) AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(2) BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(3) AB - BA = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

5. 求解下列矩阵方程:

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad (2) X \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

解

$$(1) \text{ 设 } X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}, \text{ 则有}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{11} + 5x_{21} & 2x_{12} + 5x_{22} \\ 6x_{11} + 3x_{21} & 6x_{12} + 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

由矩阵相等的定义可得

$$\begin{cases} 2x_{11} + 5x_{21} = 4 \\ 2x_{12} + 5x_{22} = -6 \\ 6x_{11} + 3x_{21} = 3 \\ 6x_{12} + 3x_{22} = 2 \end{cases}.$$

解方程组得 $x_{11} = \frac{1}{8}$, $x_{12} = \frac{7}{6}$, $x_{21} = \frac{3}{4}$, $x_{22} = -\frac{5}{3}$.

故有

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{6} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

$$(2) \text{ 设 } X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}, \text{ 则有}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{11} + 4x_{12} & 5x_{11} + 3x_{12} \\ 2x_{21} + 4x_{22} & 5x_{21} + 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

于是得方程组

$$\begin{cases} 2x_{11} + 4x_{12} = 4 \\ 5x_{11} + 3x_{12} = -6 \\ 2x_{21} + 4x_{22} = 2 \\ 5x_{21} + 3x_{22} = 4 \end{cases}.$$

解得 $x_{11} = -\frac{18}{7}$, $x_{12} = \frac{16}{7}$, $x_{21} = \frac{5}{7}$, $x_{22} = \frac{1}{7}$, 故有

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\frac{18}{7} & \frac{16}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

6. 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 验证:

(1) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$; (2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$;

(3) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$; (4) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

解

$$(1) \text{ 因为 } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

所以 $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

$$(2) \text{ 因为 } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{AC} + \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

所以

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}.$$

(3) 因为 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T.$$

(4) 因为 $(\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

所以

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

7. 利用伴随矩阵求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}; (2) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; (3) \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

解

$$(1) \text{ 因为 } |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20.$$

$$A_{11} = 0, A_{12} = -5, A_{21} = -4, A_{22} = 2.$$

$$\text{所以 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = -\frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

$$(2) \text{ 因为 } |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

行列式 $|\mathbf{B}|$ 中所有元素的代数余子式为

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, B_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, B_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$B_{21} = -2, B_{22} = 1, B_{23} = 0, B_{31} = -3, B_{32} = 0, B_{33} = 1$$

$$\text{矩阵 } \mathbf{B} \text{ 的伴随矩阵为 } \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{故 } \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{B}|} \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) 解法 1:

方阵 $\mathbf{C}$ 的行列式

$$|\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

行列式 $|C|$ 中的所有元素的代数余子式为

$$\begin{aligned} C_{11} &= 1, & C_{12} &= -2, & C_{13} &= 0, & C_{14} &= 0. \\ C_{21} &= -2, & C_{22} &= 5, & C_{23} &= 0, & C_{24} &= 0. \\ C_{31} &= 0, & C_{32} &= 0, & C_{33} &= 2, & C_{34} &= -5. \\ C_{41} &= 0, & C_{42} &= 0, & C_{43} &= -3, & C_{44} &= 8. \end{aligned}$$

矩阵 C 的伴随矩阵为

$$C^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\text{故 } C^{-1} = \frac{1}{|C|} C^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

解法 2:

$$\text{设 } C = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} C_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\text{则 } |C_{11}| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{11}^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad |C_{22}| = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

$$C_{22}^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}, \quad C_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\text{故 } C^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & C_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}.$$

8. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

解 (1) 将方程改写成矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

$$\text{其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$