学习新坐标书系

思维竞技

高三·数学

SIWEI JINGJI

依据2001年新教材编写；创设基础思路训练、创新拓展训练、综合开放训练等思维竞技平台；培养思维和实践应用能力。

吉林教育出版社

思维竞技

□选题策划　李　静　周卫国　徐　谦
□市场策划　于　辉　尹英俊　陈　忱

前　言

根据新的教育改革和考试改革的要求，我们于 2000 年 7 月曾出版了《创新思维》系列丛书。该套书出版后社会反响十分强烈，很多读者纷纷来信，称赞我们为广大师生出版了一套高质量、颇具创新意识的教辅图书。这套书虽经历了不到一年的时间，却已成为国内的名牌教辅图书。

师生们的鼓励和赞扬，是对我们最大的鞭策。根据广大师生的要求，我们依据最新修订的教学大纲和教材，我们又策划出版了这套科学性、实效性、应战性较强的《思维竞技》书系，与《创新思维》相配套。

《创新思维》重在给学生以思路、方法、技巧、规律的指导；《思维竞技》则重在以各种灵活、多变、综合的题型强化训练学生的思维能力和实践应用能力。

关于培养能力，2001 年新的教学大纲和教材都提出了特殊的要求。总的说来，有这些方面的能力：观察能力、实验能力、运算能力、自学能力、处理科学信息能力、探究能力、综合运用语言能力、分析和解决问题能力、思维能力等等。“思维能力是培养能力的核心”。学生在具体的学习实践中，是否能完成学习任务，是否能实现学习目标，很重要的是，要看自己的抽象与概括、分析与综合、推理与判断的思维能力如何。然而，思维能力的培养和提高，则需要大量的实践训练。

为了有助于学生的学习和思维能力的提高，我们为学生学习和考试——这些具有思维竞技性质和意义的学习实践活动，策划出版了这套《思维竞技》丛书。

在书中，我们大体上创设了三个层面上的思维竞技平台：**（一）基础思路训练**。这一部分是对学生掌握课堂知识情况的检验。这些知识是学生必须要牢固掌握，并能熟练运用的基础知识，是最基本的素质要求，就如同竞技前的热身活动，或是预赛。**（二）创新拓展训练**。我们把它视为竞技的开始。这一部分训练题的难度，相当于中、高考中的一般性难度的试题。训练明确，题量适中。在循序渐进的同时，也做到了适当的拓展和延伸。训练前有言简意赅的方法与技巧方面的指导。**（三）综合开放训练**。这一部分内容有一定难度。训练的难度系数加大，主要体现在训练题注重综合性、灵活性、实践性和开放性，具有参加“半决赛”和“决赛”的性质，闯过这一关，就等于踢好了临门一脚。中考和高考丢分的试题常常在这一部分中出现。这一部分的讲解较为详细、具体。比如，针对“高考 3 + x”中的综合题的跨学科的特点，常常指出某一学科的某一知识点与其他学科的哪一个知识点有可能进行结合等关键性问题。

在层面训练之后，都附有“答案与点拨”。它不是简单地给出“A、B、C”，而是告诉学生“为什么”。同时，对于关键的环节或可能让学生“卡壳”的地方，进行及时地“点拨”。

思维竞技的平台，思维竞技的空间，创造了思维较量的场所和条件。如果你把各种考试看作是不同的思维竞技活动的话，也许会给你学习带来一些乐趣和几分轻松。

走上思维竞技的平台，获取知识，展示能力，满怀信心，冲上去！

我们相信你能做到！

三编室

目录

同步部分

专题部分

同步部分

第一章

幂函数　指数函数　对数函数

基础思路训练

竞技平台

一、选择题

1.（1998. 上海高考试题）设全集为 R，$A=\{x|x^2-5x-6>0\}$，$B=\{x||x-5|<a\}$（a 为常数）且 $11\in B$，则　（　）

A. $\overline{A}\cup B=R$　　B. $A\cup\overline{B}=R$

C. $\overline{A}\cup\overline{B}=R$　　D $A\cup B=R$

2.（1995. 全国高考试题）已知 I 为全集，集合 $M,N\subset I$，若 $M\cap N=N$，则　（　）

A. $\overline{M}\supseteq\overline{N}$　B. $M\subseteq\overline{N}$　C. $\overline{M}\subseteq\overline{N}$　D. $M\supseteq\overline{N}$

3.（1996. 全国高考试题）已知全集 $I=N$，集合 $A=\{x|x=2n,n\in Z\}$，$B=\{x|x=4n,\ n\in N\}$

A. $I=A\cup B$　　B. $I=\overline{A}\cup B$

C. $I=A\cup\overline{B}$　　D. $I=\overline{A}\cup\overline{B}$

4. 与函数 $y=x$ 有相同图像的一个函数是　（　）

A. $y=\sqrt{x^2}$　　B. $y=\frac{x^2}{x}$

C. $y=a^{\log_a x}$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$

D. $y=\log_a a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$

5.（1991．全国高考试题）已知函数 $y=\frac{6x+5}{x-1}$（$x\in R$ 且 $x\neq 1$），那么它的反函数为（　）

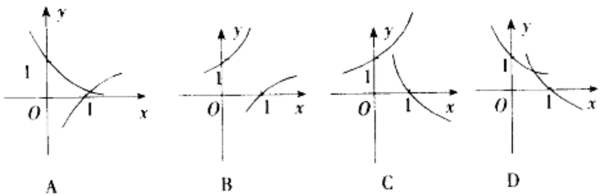
A. $y=\frac{6x+5}{x-1}$（$x\in R$ 且 $x\neq 1$）

B. $y=\frac{x+5}{x-6}$（$x\in R$ 且 $x\neq 6$）

C. $y=\frac{x-1}{6x+5}$（$x\in R$ 且 $x\neq -\frac{5}{6}$）

D. $y=\frac{x-6}{x+5}$（$x\in R$ 且 $x\neq -5$）

6.（1996．全国高考试题）当 $a>1$ 时，在同一直角坐标系中，函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图像是（　）



7.（1990．全国高考试题）已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且 $f(-2)=10$，那么 $f(2)$ 等于（　）

A. -26　B. -18　C. -10　D. 10

8.（1997．上海高考试题）三个数 $6^{0.7}$，0.7^6，$\log_{0.7}6$ 的大小顺序是（　）

A. $0.7^6<\log_{0.7}6<6^{0.7}$　　B. $0.7^6<6^{0.7}<\log_{0.7}6$

C. $\log_{0.7}6<6^{0.7}<0.7^6$　　D. $\log_{0.7}6<0.7^6<6^{0.7}$

9. 方程 $2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$ 的解是　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. $x=\frac{1}{9}$　　B. $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $x=\sqrt{3}$　　D. $x=9$

10. “$a=b$” 是 “$\lg a=\lg b$” 的　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

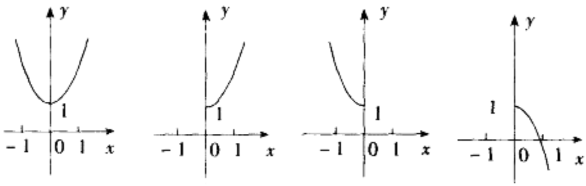
D. 既不充分也不必要条件

11. 下列函数中，既是奇函数，又在其定义域内单调递减的是（　　）

A. $y=-x^3$　　　　B. $y=\lg x$

C. $y=(\frac{1}{2})^x$　　　　D. $y=-\log_2 x$

12. 函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的反函数的图像是　　　　　　　　　　　　　　（　　）



A　　　　B　　　　C　　　　D

13. 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二根为 -2, 3，那么 $ax^2+bx+c>0$（$a<0$）的解集为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. $\{x|x>3$ 或 $x<-2\}$　　　　B. $\{x|x>3\}$

C. $\{x|-2<x<3\}$　　　　D. $\{x|x>2$ 或 $x<-3\}$

14. 不等式 $1\leqslant|x-2|\leqslant7$ 的解集是　　　　　　　　　　　　（　　）

A. $\{x|x\leqslant1$ 或 $x\geqslant3\}$　　　　B. $\{x|1\leqslant x\leqslant3\}$

C. $\{x|-5\leqslant x\leqslant9\}$　　　　D. $\{x|-5\leqslant x\leqslant1$ 或 $3\leqslant x\leqslant9\}$

15. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且在 $[0,\infty)$ 上是减函数，则 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上的单调性为　　　　　　　　（　　）

A. 减函数　　　　B. 增函数

C. 有时增有时减　　D. 以上答案都不对

二、填空题

16. 设 $A=\{x\mid x^2-px+15=0\}$，$B=\{x\mid x^2+qx+r=0\}$，若 $A\cap B=\{3\}$，$A\cup B=\{2,3,5\}$，则 $p=$ ________，$q=$ ________.

17. 设 $A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\mid x>a\}$，$A\cap B=\emptyset$，则实数 a 的取值范围为 ________.

18. 函数 $y=\dfrac{1-3x}{x+1}$ 的值域是 ________.

19. 若点 $(1,2)$ 同时在 $y=\sqrt{ax+b}$ 及其反函数的图像上，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

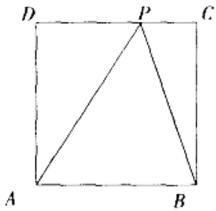
20. 函数 $y=\log_2(x-4x^2)$，$x\in[\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{6}]$ 的值域是 ________.

三、解答题

21. 已知集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值.

22. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0\}$ 且 $A\cap R^+=\emptyset$，求实数 p 的取值范围.

23. 在边长为4的正方形 $ABCD$ 的边上有一点 P，沿着折线 $BCDA$，由 B（起点）向 A（终点）移动，设 P 点移动的路程为 x，$\triangle ABP$ 的面积为 y.



(1) 写出 $\triangle ABP$ 的面积与点 P 移动的路程间的函数关系式.

(2) 作出函数的图像.

24. 奇函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的减函数，对任意实数 x，恒有 $f(kx)+f(-x^2+x-2)>0$ 成立，求实数 k 的取值范围.

25. 已知函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)$ $(a>0$，且 $a\neq1)$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域；

(2) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(3) 解方程：$f(2x)=f^{-1}(x)$.

答案与点拨

一、选择题

1. D 2. C 3. C 4. D 5. B 6. A 7. A 8. D 9. A 10. B 11. A 12. B 13. C 14. D 15. A

二、填空题

16. $p=8$, $q=-5$, $r=6$

17. $\{a \mid a\geqslant 3\}$

18. $\{y \mid y\neq -3\}$

19. $a=-3$, $b=7$

20. $[\log_2 3-6, -1-2\log_2 3]$

三、解答题

21. $a=-1$

22. $p>-4$

23. (1) 函数关系式为：

$$y=f(x)=\begin{cases}2x & x\in[0,4]\\ 8 & x\in(4,8]\\ 24-2x & x\in(8,12]\end{cases}$$ (2) 略

24. $-\sqrt{2}-1<k<\sqrt{2}-1$

25. (1) 当 $a>1$ 时，定义域为 $(0, +\infty)$，当 $0<a<1$ 时，定义域为 $(-\infty, 0)$

(2) 当 $a>1$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$在$(-\infty,0)$上是增函数

(3) 提示：由$f(x)=\log_a(a^x-1)$求出$f^{-1}(x)=\log_a(a^x+1)$，方程$f(2x)=f^{-1}(x)$，即$\log_a(a^{2x}-1)=\log_a(a^x+1)$，整理得：$a^{2x}-a^x-2=0$，所以 $a^x=2$ 或 $a^x=-1$(舍)，解得 $x=\log_a 2$

创新拓展训练

训练指要

1. 熟练掌握集合间的相互关系以及集合的运算，能解决集合同方程、函数、不等式等的综合应用问题.

2. 在熟练掌握了几种基本函数的概念、图像和性质的基础上，提高灵活解决问题的能力.

3. 能利用几种基本函数的性质解决一些相应的问题，比如不等式问题、方程问题等.

4. 提高分析问题和解决问题的能力，理解化归转化、分类讨论等数学思想在解决具体问题中的应用.

例1 已知函数$f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}(a,b,c\in Z)$是奇函数；又$f(1)=2$，$f(2)<3$，且$f(x)$在$[1,+\infty)$上递增.

(1) 求a、b、c的值；

(2) 当$x<0$时，讨论$f(x)$的单调性.

▲分析 本题考查函数的奇偶性、单调性的综合知识，培养学生的分类讨论数学思想，由函数是奇函数知$f(-x)=-f(x)$及$f(1)=2$，$f(2)<3$，a、b、$c\in Z$可求得a、b、c的值，其次根据$f(x_2)-f(x_1)$符号确定函数的单调性.

▲解 (1) ∵ 函数$f(x)$是奇函数，

∴ $f(-x)=-f(x)$，即$\dfrac{ax^2+1}{-bx+c}=-\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$，

也就是$-\dfrac{ax^2+1}{bx-c}=-\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$.

比较等式两边的系数知$c=0$，∴ $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx}$.

∵ $f(1)=2$，∴ $2=\dfrac{a+1}{b}$，即$2b=a+1$.

又∵ $f(2)<3, f(1)=2$，且 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，

∴ $2<f(2)<3$.

即 $2<\dfrac{4a+1}{2b}<3$，将 $2b=a+1$ 代入 $2<\dfrac{4a+1}{a+1}<3$，解得 $\dfrac{1}{2}<a<2$.

∵ $a\in Z$，∴ $a=1$，则 $b=1$.

综上所述 $a=b=1$，$c=0$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$，即 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. 设 $x_1<x_2<0$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(x_2)-f(x_1)&=x_2+\frac{1}{x_1}-x_1-\frac{1}{x_1}=(x_2-x_1)+\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\\&=(x_2-x_1)(1-\frac{1}{x_1x_2})\\&=(x_2-x_1)(\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}).\end{aligned}$$

∵ $x_1<x_2<0$，∴ $x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$.

当 $x_1<x_2\leqslant -1$ 时，$x_1x_2-1>0$.

此时 $f(x_2)-f(x_1)>0$，∴ $f(x_2)>f(x_1)$.

当 $-1\leqslant x_1<x_2<0$ 时，$x_1x_2-1<0$.

此时 $f(x_2)-f(x_1)<0$，$f(x_2)<f(x_1)$.

综上所述，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上是增函数，在 $[-1,0)$ 上是减函数.

例 2 设 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\lg\dfrac{1-x}{1+x}$

(1) 试判断函数 $f(x)$ 的单调性，并证明；

(2) 若 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，证明：方程 $f^{-1}(x)=0$ 有惟一解；

(3) 解关于 x 的不等式：$f[x(x-\dfrac{1}{2})]<\dfrac{1}{2}$.

▲分析 本题考查函数的单调性，以及反函数概念. 为判断函数 $f(x)$ 的单调性，需先求出 $f(x)$ 的定义域，在定义域内利用单调性的定义作出判定；判断方程 $f^{-1}(x)$ 有惟一解，不需要求出 $f^{-1}(x)$，而是用反函数定义来证明. 此外，在解含有对数的不等式时，要注意真数为正这

个条件.

△解 (1)由函数$f(x)=\frac{1}{x+2}+\lg\frac{1-x}{1+x}$可知$\begin{cases}\frac{1-x}{1+x}>0\\x+2\neq 0\end{cases}$解得$-1<x<1$

即函数$f(x)$的定义域为$(-1,1)$.

设$-1<x_1<x_2<1$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(\frac{1}{x_2+2}-\frac{1}{x_1+2}\right)+\left(\lg\frac{1-x_2}{1+x_2}-\lg\frac{1-x_1}{1+x_1}\right)$$
$$=\frac{x_1-x_2}{(x_1+2)(x_2+2)}+\lg\frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)}$$

又$(x_1+2)(x_2+2)>0$，$x_1-x_2<0$，

$\therefore\quad \frac{x_1-x_2}{(x_1+2)(x_2+2)}<0$.

又$(1+x_1)(1-x_2)>0$，$(1-x_1)(1+x_2)>0$，

$\therefore\quad 0<\frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)}=\frac{1+x_1-x_2-x_1x_2}{1+x_2-x_1-x_1x_2}<1$.

$\therefore\quad \lg\frac{(1+x_1)(1-x_2)}{(1-x_1)(1+x_2)}<0$.

$\therefore\quad f(x_2)-f(x_1)<0$，即$f(x_2)<f(x_1)$.

故函数$f(x)$在区间$(-1,1)$内是减函数.

(2) $\because\quad f(0)=\frac{1}{2}$，

$\therefore\quad f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$，即$x=\frac{1}{2}$是方程$f^{-1}(x)=0$的一个解.

若方程$f^{-1}(x)=0$还有另一解$x_0\neq\frac{1}{2}$，则$f^{-1}(x_0)=0$.

又由反函数的定义知$f(0)=x_0\neq\frac{1}{2}$，这与函数定义矛盾.

故方程$f^{-1}(x)=0$有惟一解.

(3) 方程$f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]<\frac{1}{2}$，也即

$f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]<f(0)$

由于函数$f(x)$单调递减且定义域为$(-1,1)$，所以上述不等式等价于不等式组：

$$\begin{cases}-1<x(x-\frac{1}{2})<1\\x(x-\frac{1}{2})>0\end{cases}$$

即$\begin{cases}x(x-\frac{1}{2})>0\\x(x-\frac{1}{2})<1\end{cases}$

解得$\begin{cases}x>\frac{1}{2}\text{或 }x<0\\\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}\end{cases}$

∴ 原不等式的解集为$\left\{x\mid\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x<0\text{或}\frac{1}{2}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$

例3 是否存在实数a使得函数$f(x)=\log_a(ax-\sqrt{x})$在区间$[2,4]$上是增函数．若存在，求出a的取值范围，若不存在，请说明理由．

▲解法1 设$2\leqslant x_1<x_2\leqslant 4$．

(1) 若$0<a<1$，则有$\begin{cases}ax_1-\sqrt{x_1}>ax_2-\sqrt{x_2} & ①\\ax_2-\sqrt{x_2}>0 & ②\end{cases}$

由①得 $a(x_1-x_2)>\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$

∵ $x_1-x_2<0$

∴ $a<\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$

又∵ $2\leqslant x_1<x_2\leqslant 4$，∴ $2\sqrt{2}<\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}<4$，

∴ $\frac{1}{4}<\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}<\frac{\sqrt{2}}{4}$

∴ $0<a\leqslant\frac{1}{4}$ ③

由②得 $a\sqrt{x_2}(\sqrt{x_2}-\frac{1}{a})>0$，∴ $\frac{1}{a}<\sqrt{x_2}$

∴ $\frac{1}{a}\leqslant\sqrt{2}<\sqrt{x_2}\leqslant2$

∴ $a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④

由③，④知此时无解.

(2) 当 $a>1$ 时，则有

$$\begin{cases}ax_1-\sqrt{x_1}<ax_2-\sqrt{x_2} & ⑤\\ ax_1-\sqrt{x_1}>0 & ⑥\end{cases}$$

由⑤得 $a(x_1-x_2)<\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$

∴ $a>\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$

∴ $a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$

由⑥得 $a\sqrt{x_1}(\sqrt{x_1}-\frac{1}{a})>0$，即 $\frac{1}{a}<\sqrt{x_1}$

∴ $\frac{1}{a}\leqslant\sqrt{2}$，即 $a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$

综上，a 的取值范围为 $a>1$.

▲解法 2 设 $t=\sqrt{x}\in[\sqrt{2},2]$，则 $u(t)=at^2-t=a(t-\frac{1}{2a})^2-\frac{1}{4a}$

当 $a>1$ 时，有 $\begin{cases}\frac{1}{2a}\leqslant\sqrt{2}\\ u(\sqrt{2})=2a-\sqrt{2}>0\end{cases}$

解得 $a>1$.

当 $0<a<1$ 时，有 $\begin{cases}\frac{1}{2a}\geqslant2\\ u(2)=4a-2>0\end{cases}$

解得 $a\in\emptyset$

∴ a 的取值范围为 $a>1$.

△说明 本题主要考查对数函数以及二次函数的性质，解题过程中要注意：

(1) 在理解透题意的基础上将问题加以转化是解决问题的关键.

(2) 在讨论函数的单调性的时候，不要忽略了函数的定义域.

竞技平台

一、选择题

1. 集合 $A=\{(x,y)\mid y=a\mid x\mid\}$, $B=\{(x,y)\mid y=x+a\}$, $C=A\cap B$, 且集合 C 为单元素集合，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $|a|\leqslant 1$　　B. $|a|>1$ 或 $0<|a|<1$

C. $a>1$　　D. $a>1$ 或 $a<0$

2. 已知抛物线 $y=4x^2-5x+k^2$ 与 x 轴的交点在原点的右侧，则 k 的取值范围是 ( )

A. $k\in R$　　B. $-\frac{5}{4}\leqslant k\leqslant\frac{5}{4}$

C. $k\geqslant\frac{5}{4}$ 或 $k\leqslant-\frac{5}{4}$　　D. $-\frac{5}{4}\leqslant k\leqslant\frac{5}{4}$ 且 $k\neq 0$

3. 要使方程 $x^2-(m-2)x-(m+3)=0$ 的两根的平方和最小，m 的值应为 ( )

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. 2

4. 某函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，值域为 $[1,2]$，则函数 $y=f(x+2)$ 的定义域和值域分别是 ( )

A. $[0,1]$, $[1,2]$　　B. $[2,3]$, $[3,4]$

C. $[-2,-1]$, $[1,2]$　　D. $[-1,2]$, $[3,4]$

5. 设 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$，那么当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)$ 的表示式为 ( )

A. $f(x)=-x(1+\sqrt[3]{x})$　　B. $f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$

C. $f(x)=-x(1-\sqrt[3]{x})$　　D. $f(x)=x(1-\sqrt[3]{x})$