李忠义　金　声　张义轩　编著

GUAN LI SHU XUE

管理数学

辽宁大学出版社

管理数学

（上）

李忠义 金 声 张义轩 编

辽宁大学出版社

一九八八年·沈阳

责任编辑　张春光
封面设计　邹本忠
责任校对　群　芳

管　理　数　学

（上）

李忠义　金　声　张义轩　编

*

辽宁大学出版社出版发行（沈阳市崇山西路3段4号）
沈阳市第六印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32印张：12.875　字数：320千
1988年8月第1版　1988年8月第1次印刷
印数：1—6,000

*

ISBN　7-5610-0294-7
O·8　　定价：3.70 元

前　言

为适应经济类各专业《管理数学》的教学需要，抚顺大学、沈阳财经学院、辽宁大学经济管理学院共同编写本套教材。

全书分上、下两册：上册包括函数与极限，一元函数微积分，多元函数微积分；下册包括线性代数，线性规划与投入产出，概率与数理统计等。

本书从着重考虑经济类各专业学生应必备的高等数学基础知识出发，从高等数学与经济应用、管理应用的结合上编排体例和内容。既有满足要求的覆盖面，又有突出经济类的特色。

本书为了便于自学，在叙述方法上做到由浅入深，直观性强，通俗易懂。对于每一个新概念的引入，都从初学者易于接受的若干实例出发，概括出数学定义，然后再加以简明的理论推导，力求简明扼要，重点突出，并注重了理论联系实际，将理论应用到解决实际问题中去。书中对重点内容和较难理解与掌握的内容均给予了必要的注释。

本书第一篇微积分由抚顺大学李忠义同志（第一、二两章）、金声同志（第三、四两章），辽宁大学张义轩同志（第五章）编写；第二篇线性代数由沈阳财经学院于云鹏同志（第一、二、三章），线性规划及投入产出由辽宁大学朱恩全同志（第四、五章）编写；第三篇概率与数理统计由辽宁大学吴素文同志编写。并由李忠义同志编撰了本书上册，吴素文同志编撰了本书下册。全书承蒙朱绍范、李福龙两位副教授分别审阅，他们提出了许多宝贵的意见。在编写过程中我们参阅了

一些兄弟院校的教材，在此表示衷心感谢！

由于我们水平有限，经验不足，书中一定有不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

编　者　1988年3月

目　录

第一篇　微　积　分

第一章　函数

第四章 一元函数积分法

第五章 多元函数微积分

第一章 函　　数

函数是微积分研究的对象也是高等数学中最重要的基本概念。在中学数学里，对函数概念及其性质已有较祥细的讨论，所以本章将在复习函数有关知识的基础上，适当地把它加深和扩充，为学习以后各章内容打下基础。

§1·1 函数概念

我们知道在同一现象或技术过程中，往往同时出现几个变量，而这些变量又往往是相互联系、相互依赖的，微积分学不是孤立地研究每一个变量，而是着重研究变量之间的确定的依赖关系，这种关系在数学上称为函数关系。

定义　设有两个变量x与y，如果x在其变化范围D内每取一个确定的值时，y按照某一对应规律f有唯一确定的值和它对应，则称y是x的函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

x称为自变量，y称为因变量。x的变化范围D叫做函数的定义域。

如果自变量取某一数值x_0时，函数$y = f(x)$有确定的值和它对应，则称函数在x_0处有定义，且记x_0处的函数值为$f(x_0)$或$y|x = x_0$，所以，函数的定义域也就是使函数有定义的x值的全体，而相应的函数值的全体称为函数的值域。

关于函数概念，要注意以下几点：

1．确定函数的要素

函数概念反映了自变量和因变量之间的依从关系。它涉及

到定义域、对应规律和值域。很明显，只要定义域和对应规律确定了，值域也就随之确定了，即值域是派生的。因此，对应规律（表达方式）和定义域是确定函数的两个要素，只要两个函数的对应规律和定义域都相同，那么这两个函数就是同一函数；若这两个要素之一不相同，那就是两个不同的函数。

2. 关于函数的记号

函数记号f（x）按其实质来说是指对应规律。其意义是：x被对应规律f作用后，得出函数值f（x）．对应规律是指对于自变量x的一个确定的值（定义域内）应以怎样的方式求出因变量y的对应值。对应规律一般可以用f、φ、F等字母来表示，它可以是解析式，也可以是图象或表格，甚至可以是任何形式的约定。因此，f是表示函数一个关系或一个约定。

3. 关于单值函数与多值函数

在上述函数定义中，规定对于每个$x\in D$，有且仅有y的一个值与之对应，这样的函数称为单值函数；若对于每个$x\in D$，有y的多个值与之对应，则不符合我们上述函数定义，把这种情况称为多值函数。以后如果不加特别说明，所有函数均指单值函数。

4. 常函数

在今后的研究中，常把常量$y=c$（c为常数）看作是x的函数，即无论x取何值，y都以同一数c与之对应，这种函数称为常数函数，简称常函数。这是符合函数定义的，因为在函数的定义中，并没有要求自变量变化时，函数值一定要变，重要的是，当自变量x在定义域中任取一数值时，函数有唯一确定的值和它对应。也可以说，函数概念中重要的不是“自变”引起“因变”的现象，而是它们的对应规律。例如，$y=\sin^2x+$

$\cos^2 x$ 不论x取什么实数值，对应于y的值始终是1。

5. 分段函数

函数定义中对表示函数的方式未加任何限制。即使用解析式表示，也没有规定只用一个式子表示，有时恰好需要在不同的范围中用不同的式子来表示一个函数。例如，脉冲发生器产生一个如图1—1所示的三角波，它的电压u与时间 t 的函数关系为

$$u=\begin{cases}\frac{3}{2}t,\ 0\leqslant t\leqslant 10;\\ -\frac{3}{2}(t-20),10<t\leqslant 20.\end{cases}$$

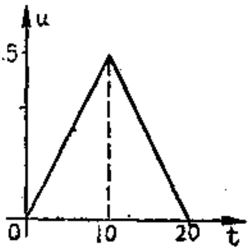

图1—1

它表示了在不同时间范围内，电压变化的不同规律。

又如 $$y=f(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

是确定在区间$(-\infty,+\infty)$上的一个函数，它的图象如图1—2.

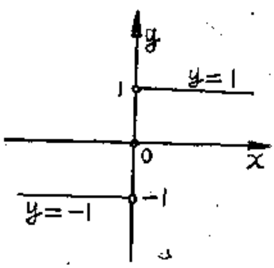

图1—2

这种用几个式子分段表示的函数称为分段函数，它在自变量变化的不同范围内虽有不同的表达式，但它只是一个函数，而不是几个函数。

例 试确定函数

$$y=\arcsin\frac{1}{x-1}+\lg[1-\lg(x^2-5x+16)]$$

的定义域.

分析 确定函数的定义域要注意以下几点:

1. 若函数式中含有分式，则必须去掉使其分母为零的自变量值;

2. 若函数式中含有偶次根式，则根号内的整个式子必须非负;

3. 若函数式中含有对数记号，则要使真数为正;

4. 若函数式中含有正切或余切函数，则正切、余切符号下的式子的值分别不能等于

$$k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots);$$

5. 若函数式中含有反正弦或反余弦函数，则反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于1;

6. 复合函数的定义域是其"成员函数"定义域的交集;

7. 复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域，应使得"内层函数"$\varphi(x)$的值域，不超出"外层函数"$y=f(u)$的定义域;

8. 解决实际问题时，要根据变量的实际变化范围来确定函数的定义域。

解 由$\arcsin\frac{1}{x-1}$，须$\left|\frac{1}{x-1}\right|\leqslant1\Rightarrow x\leqslant0$或$x\geqslant2$;

由$\lg(x^2-5x+16)$，须 $x^2-5x+16>0\Rightarrow x\in R$;

由$\lg[1-\lg(x^2-5x+16)]$，须$1-\lg(x^2-5x+16)>0\Rightarrow x^2-5x+16<10\Rightarrow2<x<3$.

综上，函数的定义域为

$\{x|x\leqslant0$或$x\geqslant2\}\cap(2,\ 3)\cap R=(2,\ 3)$。

§1·2　经济中常用的函数

一　总成本函数

某种产品的总成本是由固定成本和变动成本两部分组成的。固定成本由折旧费，车间经费及企业管理费等构成，这些费用不随产品产量的增加或减少而变化，是一个常量；变动成本是由主要原材料费，直接参加生产的工人工资等构成，它随着产品产量的增加或减少而变化，是一个变量。

例1 设某厂生产某种产品的最大生产能力为b个单位，至少要生产a个单位，固定费用为C_1元，每生产一个单位产品，变动费用是C_2元，试求总成本函数。

解　设q表示总产量，则q只能在$[a, b]$内取值，生产q个单位的变动成本为C_2q，所以，总成本

$$C = C_1 + C_2q, \qquad q\in[a, b].$$

二　价格函数

商品的价格与市场的供求情况有密切关系。一般地，价格是销售量的函数。

例2 设某批发站批发订价为70元的某种牌号手表一万只给零售商。若批发站每次再多批发3000只该牌号手表，市面上该种手表的价格就相应地降低3元，现批发站最多只能批发2万只手表给零售商，最小销量为一万只，试求价格函数（即销售量对价格的影响）。

解　设q代表手表总销售量，则$q\in[10000,20000]$.按每多销售3000只，价格相应降3元的比例，多销售$q-10000$只，价格相应减少$3\times\frac{q-10000}{3000}$. 故价格函数为

$$P = 70 - 3 \times \frac{q - 10000}{3000},$$

即 $$P = 80 - \frac{1}{1000}q, \quad q \in [10000, 20000].$$

三 需求函数

在例 2 中是把价格看作是销售量（需求量）的函数。我们还可以反过来，把需求量看作是价格的函数。一般地，需求量是随着价格的提高而减少的。

例3·若我们把例 2 中的条件改为："手表价格 70 元 时，销售量为10000只．当手表价格每提高 3 元时，需求量就减少3000只"则我们可得出需求函数为

$$q = 10000 - \frac{p - 70}{3} \times 3000.$$

即 $q = 1000(80 - p)$.

从这个关系式可以知道，该牌号的手表价格不得超过80元，否则无销路。

四 供求函数

如果我们考虑市场供应的一方，当商品提供者能得到的商品价格增加时，我们可望供应者增加它们的产品的供应量，因此供应量也是价格的函数。

例4 设手表的价格为70元时，手表厂可提供 1 万只手表，当价格每增加 3 元时，手表厂可多提供300只手表，试求供应函数。

解 设P代表手表的价格，q代表手表供应量，则依题意有

$$q = 10000 + 300 \times \frac{p - 70}{3},$$

即 $$q = 100\ (30 + p).$$

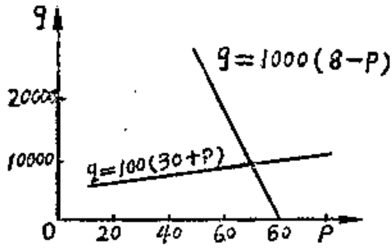

图1—8

如果我们把例3的需求函数和例4的供应函数的图象作在同一个坐标系内(图1—3)它们的交点所对应的价格，就是供求平衡价格（70元）低于这个价格则求大于供，高于这个价格则供大于求。

五　收益函数

收益函数就是销量与价格的乘积。以q代表销量，P代表价格，R代表收益，则有

$$R=p\cdot q.$$

如果把P看作q的函数p＝P（q），则收益也是q的函数，即

$$R=q\cdot P(q)=R(q).$$

六　利润函数

收益与成本之差就是利润L：

$$L=R(q)-C(q).$$

七　平均成本函数

平均成本就是单位产品的成本。设产量为q，总成本为C（q），则平均成本（记为A·C·）为

$$A\cdot C\cdot=\frac{C(q)}{q}.$$

例5　设在某工厂产品的总成本中，固定费用C_1为20000元，单位产品（每台）变动费用C_2为3000元，单位产品售价P为5000元。求产量q对总成本C、销售收益R、利润L以及单位

成本A·C·的影响。

解 销售收入

$$R = P \cdot q = 5000q,$$

总成本

$$C = C_1 + C_2 q = 20000 + 3000q,$$

利润

$$L = R - C = 5000q - 20000 - 3000q = 2000q - 20000,$$

单位成本

$$A.C. = \frac{c}{q} = \frac{c_1 + c_2 q}{q} = \frac{c_1}{q} + c_2 = \frac{20000}{q} + 3000.$$

若求出$R = P \cdot q$与$C = C_1 + C_2 q$两图象的交点的横坐标q_0，q_0就是损益分歧点，产量q大于q_0则盈利，小于q_0则亏损，等于q_0则收支相抵。在$q = q_0$时，有

$$q_0 P = C_1 + C_2 q_0,$$

即
$$q_0 = \frac{c_1}{p - c_2} = \frac{20000}{5000 - 3000} = 10\text{（台）}.$$

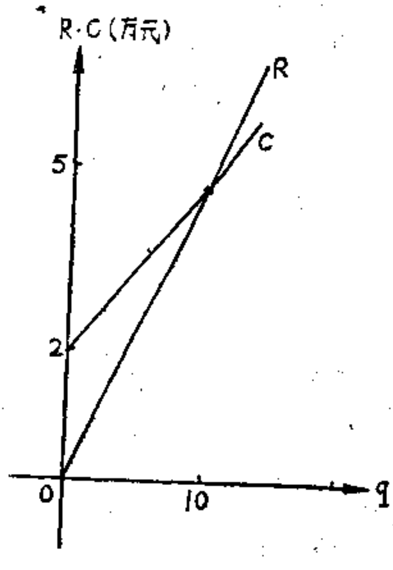

图1—4

通过图1—4企业就可以根据市场对产品的需要情况，合理安排生产计划，求得理想的产品成本和盈利。

八 库存问题

设某厂在计划期T内，对某种物品总需要量为Q，把全部需要量一次进货，显然不合理。今考虑均匀地分u

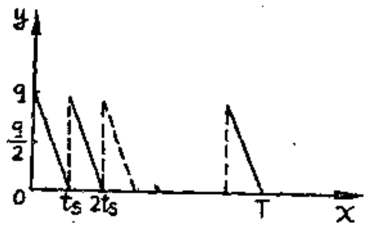

图 1—5

次进货。每次进货批量 $q=\frac{Q}{n}$，进货周期为 $t_s=\frac{T}{n}$，按规定不允许发生缺货停工。已知每件物品贮存单位时间的费用为 C_1，每次进货费用为 C_2，假设每次进货量相同，进货速度相当快，可以不考虑进货时间，每次进货间隔时间不变，均等于 t_s，并且在 t_s 时间间隔内，以匀速消耗贮存物品，则平均库存量为 $\bar{q}=\frac{q}{2}$。图 1—5 表示这个模型的库存曲线图。

在时间T内的总费用E由两部分组成：

1．贮存费：仓库及其设备的折旧、管理人员的工资、管理费用、物资消耗费用和资金积压损失等。因为已知每件物品贮存单位时间的费用为 C_1，故这部分的费用为

$$\bar{q}\cdot C_1\cdot T=\frac{1}{2}C_1Tq.$$

2．进货费用：采购人员差旅费，签订合同手续费等．已知每次这项费用为 C_2，进货 $n=\frac{Q}{q}$ 次，则总进货费用为

$$C_2\cdot n=C_2\cdot\frac{Q}{q}.$$

所以，总费用为

$$E=\frac{1}{2}C_1Tq+C_2\frac{Q}{q}.$$

由上式可知总费用E是批量q的一元函数，即 $E=f(q)$，其定义域为 $(0,Q)$，但视实际情况可作些调整。

九　其他问题

例6 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在a公里以内，每公里k元，超过a公里，每增加一公里为$\frac{4}{5}$k元。运价m与里程s之间的函数关系为：

$$m=\begin{cases} ks, & 0<s\leqslant a; \\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), & s>a. \end{cases}$$

定义域为（0，+∞）．这里运价和里程s间的函数关系是用分段函数表示的。

例7 有一工厂A与铁路的垂直距离为a公里，它的垂足B到火车站C的铁路长为b公里，工厂的产品必须经火车站C才能转销外地，已知汽车运费是m元/吨公里，火车运费是n元/吨公里，（m>n），为使运费最省，想在铁路上另修一小站作为转运站，（如图1—6）那么运费的多少决定于M的地点，试将运费表为距离|BM|的函数。

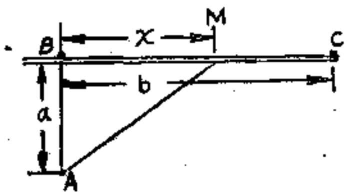

图1—6

解　设　|BM|＝x，运费为y，

依题意，$|AM|=\sqrt{a^2+x^2}$，$|MC|=b-x$，则

$$y=m\sqrt{a^2+x^2}+n(b-x),\ x\in[0,b].$$

§1·3　函数的简单性质

研究一个给定的函数，就是研究它所具有的特性。当然，我们掌握的方法愈多，函数的性态就被揭示得愈深刻。在中学