高等学校应用型教材

● 公共基础系列

高等数学（高职版）

GAODENG SHUXUE

刘巍 张和平 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高 等 数 学

(高职版)

刘　巍　张和平　主编
韩可众　副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书充分体现高等职业教育的特色，理论与技能并重。理论知识既体现“必须”、“够用”、“实用”的原则，又着眼为学生未来的发展提供可持续提高的知识保证；突出自学能力、数学基本运用能力、数学基本技能和数学建模能力的训练、培养和提高。本书的主要内容有：函数与连续、一元微积分、空间解析、多元微积分、微分方程、级数、行列式与矩阵、线性方程组等。

本书在内容的选编上同时兼顾学生专升本、专接本的升学需要，并在相应章节的例题、习题中选配了精选的往届专升本、专接本部分典型试题。

本书内容通俗易懂，直观精练，便于自学，注重技能；突出实用性、应用性、现代性。本书可作为高职高专各专业的高等数学教材，也可供参加专升本、专接本入学考试的考生复习参考。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：高职版 / 刘巍，张和平主编. —北京：北京理工大学出版社，2006.8

ISBN 7-5640-0795-8

I.高… II.①刘… ②张… III.高等数学-高等学校：技术学校-教材 IV.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 101556 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京市业和印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 27.5
字　　数 / 600 千字
版　　次 / 2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷　　责任校对 / 张　宏
定　　价 / 32.00 元　　责任印制 / 母长新

图书出现印装质量问题，本社负责调换

前　言

为适应我国高等职业教育的飞速发展，加强教材的配套建设，根据教育部加强高职高专课程与教材建设的有关精神，以培养应用型、技能型人才为目的而编写了本书。

在本书的编写过程中，充分考虑了以下几个方面：

1. 充分体现高职高专的特点，理论与技能并重。理论知识既体现“必须”、“够用”、“实用”的原则，又着眼为学生未来的发展提供可持续提高的知识保证。

2. 突出高职高专的特色，切实有效地提高学生的数学思维能力和分析解决实际问题的能力，特别是数学基本运用技能和数学建模能力的培养。书中的基本技能训练题、例题和习题占了较大篇幅，为师生的教与学提供了较大的选择空间。

3. 以学生为本，便于自学，注重培养学生自学能力和拓宽、发展知识的能力。每一章中注重对知识精髓、解题方法思路、规律技巧等进行详细的归纳总结。

4. 本书在内容的选编上同时兼顾有专升本、专接本的升学需要，除依据全国专升本、专接本《高等数学》考试大纲外，还在相应章节的例题、习题中选配了精选的往届专升本、专接本部分典型试题。

5. 参考了全国二十几所高职院校关于高等数学的课程内容设置和课时分配，附录 1 给出了高等数学各类专业选讲内容与课时分配参考。建议不要再低于此课时，以保证本课程的正常开设。

参加本书编写的有(以撰写章节先后为序)：刘巍(第 1、5 章)；张菊(第 2 章)；晁世萍(第 3 章)；孙丽萍(第 4 章)；孟祥忠(第 6 章)；陈振兴(第 7 章)；孟祥清、于丽萍(第 8 章)；张和平(第 9 章)；吴玉堂(第 10 章)；韩可众(第 11 章)；杨建(第 12 章)；王爱丽(附录)。全书由刘巍统稿。

由于时间仓促，加之编者水平有限，不足之处在所难免。在深表歉意的同时，更希望读者批评指正。

编　者

目　录

第 1 章　函　　数 1

1.1　集合、区间与邻域 1
1.2　函数的概念 4
1.3　函数的性质 9
1.4　初 等 函 数 11
1.5　函数应用与数学建模 17
第 1 章　习题 27

第 2 章　极限与连续 30

2.1　数列的极限 30
2.2　函数的极限 33
2.3　无穷小量与无穷大量 36
2.4　极限的四则运算 38
2.5　无穷小量的比较 47
2.6　函数的连续性 50
第 2 章　习题 60

第 3 章　导数与微分 66

3.1　导数的概念 66
3.2　导数的基本公式和求导方法 74
3.3　函数的微分 85
第 3 章　习题 93

第 4 章　微分中值定理与导数的应用 97

4.1　微分中值定理 97
4.2　罗必塔法则 101
4.3　函数的极值 105
4.4　函数的最值 110
4.5　曲线的凹凸及拐点 113
4.6　简单函数的作图 116
4.7　边际分析与弹性分析 119
第 4 章　习题 124

第 5 章　不定积分 130

5.1　不定积分的概念与性质 130
5.2　换元积分法 135
5.3　分部积分法 147
5.4　积分表的使用 151
5.5　经济应用举例 153
第 5 章　习题 155

第 6 章　定积分及其应用 159

6.1　定积分的概念 159
6.2　定积分的基本性质 166
6.3　微积分的基本定理 168
6.4　定积分的计算 173
6.5　广义积分 178
6.6　定积分的应用 181
第 6 章　习题 191

第 7 章　向量代数与空间解析几何 197

7.1　行列式 197
7.2　向量及线性运算 200
7.3　空间直角坐标系与向量的坐标表示 202
7.4　向量的乘法 206
7.5　平面方程 211
7.6　空间直线的方程 214
7.7　二次曲面与空间曲线 217
第 7 章　习题 221

第 8 章　多元函数微积分学 224

8.1　二元函数的概念、极限与连续 224
8.2　偏导数 228
8.3　全微分 230
8.4　多元复合函数的求导法则 233
8.5　隐函数的求导法则 235
8.6　二元函数的极值和最值 236
8.7　偏导数的应用 240
8.8　二重积分 248

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

8.9 曲线积分......258
第 8 章 习题......267

第 9 章 微分方程......273

9.1 微分方程的一般概念......273
9.2 一阶微分方程......275
9.3 二阶微分方程......279
9.4 可降阶的高阶微分方程......287
9.5 微分方程应用举例......292
第 9 章 习题......294

第 10 章 无穷级数......297

10.1 数项级数的概念及其基本性质......297
10.2 数项级数的敛散性......299
10.3 幂级数......302
10.4 函数的幂级数展开......306
10.5 傅里叶级数......310
10.6 正弦级数和余弦级数......313
第 10 章 习题......315

第 11 章 矩阵......319

11.1 行列式......319
11.2 矩阵的概念......333
11.3 矩阵的运算......337
11.4 逆矩阵......341
11.5 分块矩阵......344
11.6 矩阵的初等变换......346
11.7 矩阵的秩......351
第 11 章 习题......353

第 12 章 线性方程组......361

12.1 线性方程组有解的条件......361
12.2 *n* 维向量......370
12.3 向量间的线性关系......372
12.4 线性方程组的解的结构......381
第 12 章 习题......389

附录 1 高等数学各类专业选讲内容与课时参考......393

附录 2 常用积分公式表......394

附录 3 习题参考答案......403

参考文献......432

第 1 章　函　数

初等数学是高等数学的基石，高等数学是初等数学的继续和发展，本书将在初等数学的基础上，进一步介绍研究大学阶段不可或缺的重要基础学科——高等数学.

函数是高等数学中最重要的基本概念和研究对象，本章将在初等数学的基础上，对函数及相关知识做简要的回顾和总结.

1.1　集合、区间与邻域

1.1.1　集合

集合是高等数学中最基本的通用工具. 集合在数学中是一个不定义概念，只能给出直观的描述.

1. 定义

具有某种属性的对象的全体称为**集合**，组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**. 通常集合用大写字母 A、B、C…表示，元素用小写字母 a、b、c…表示.

如果 a 是集合 M 的元素记作 $a \in M$ (读作 a 属于集合 M)； a 不是集合 M 的元素记作 $a \notin M$ (读作 a 不属于集合 M).

注意理解集合的三要素：特征(属性)、对象、范围.

一个集合认为已经给定，如果对于任何所考查的对象能判定它是否属于这个集合. 因此，要给定一个集合，实质上就是要给出一个判定法则，据此法则，对任一对象 a，能判定 $a \in M$ 或 $a \notin M$.

2. 集合的性质

集合的性质有整体性和确定性.

3. 集合的表示方法

集合的表示方法包括列举法、描述法、图示法.

4. 集合的分类

(1) 按元素的属性分类：数集、点集、数对集.

(2) 按元素的个数分类：有限集、无限集、空集 $\varnothing$.

5. 集合间的关系

(1) 包含关系 $\begin{cases} \text{子集：} A \text{ 是 } B \text{ 的子集，记作 } A \subseteq B\text{，读作 } A \text{ 包含于 } B. \\ \text{真子集：} A \text{ 是 } B \text{ 的真子集，记作 } A \subset B\text{，读作 } A \text{ 真包含于 } B. \\ \text{全集：} I. \end{cases}$

(2) 相等关系：集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$，读作 A 等于 B.

(3) 运算关系 $\begin{cases}\text{交集：} A \text{ 与 } B \text{ 的交集记作} A\cap B\text{，即} A\cap B=\{x|x\in A\text{且} x\in B\}. \\ \text{并集：} A \text{ 与 } B \text{ 的并集记作} A\cup B\text{，即} A\cup B=\{x|x\in A\text{或} x\in B\}. \\ \text{补集：} A \text{ 在 } I \text{ 中的的补集记作} \overline{A}\text{，即} \overline{A}=\{x|x\in I\text{且} x\notin A\}.\end{cases}$

6. 集合的常用运算性质与运算律

(1) 交集运算性质：$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap I=A$.

(2) 并集运算性质：$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup I=I$.

(3) 补集运算性质：$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=I$，$\overline{\overline{A}}=A$.

(4) 运算律：①交、补运算满足交换律.

②交、补运算满足结合律.

③分配率：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(5) 对偶法则(D.Morgan 定理)：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

7. 有限集合的子集个数与元素个数公式

有 n 个元素的集合 A 的子集个数为：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

其中，真子集个数为 2^n-1（个），非空真子集个数为 2^n-2（个).

8. 有限集合间元素的个数公式

设有限集合 A 的元素个数为 $n(A)$，则

(1) $n(A)+n(\overline{A})=n(I)$

(2) $n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\overline{B})=n(B)-n(B\cap\overline{A})$

(3) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

9. 常用数集的符号

$\mathbf{N}$—自然数集　$\mathbf{Z}$—整数集　$\mathbf{Q}$—有理数集　$\mathbf{R}$—实数集　$\mathbf{C}$—复数集

$\mathbf{Z}^-$—负整数集　$\mathbf{Q}^+$—正有理数集　$\mathbf{Q}^-$—负有理数集　$\overline{\mathbf{Q}}$—无理数集

$\mathbf{R}^-$— 负实数集　$\overline{\mathbf{Z}^+}$—非正实数集　$\{2n-1\}$—奇数集　$\{2n\}$—偶数集

1.1.2 区间

高等数学中用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如无特别声明，以后提到的数均指实数. 在初等数学中，实数与数轴上的点是一一对应的. 在数轴上，一个范围内的实数直观地给出了区间的概念.

区间：介于两个实数之间的全体实数称为**区间**，这两个实数称为区间的**端点**.

设 a、$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b). 同理定义其他区间，如图 1-1 所示.

(1) 开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；(2) 闭区间：$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$

(3) 半开区间：$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 或 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$

开区间、闭区间、半开区间统称为**有限区间**(图 1-1)．a、b 分别称为区间的**左端点**和**右端点**．有限区间两端点之间的距离 $b-a$ 称为**区间长**.

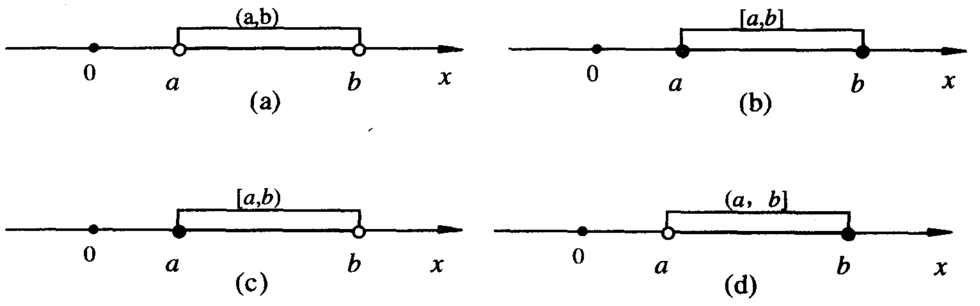


图 1-1

用$+\infty$表示正无穷大，用$-\infty$表示负无穷大，则全体实数用区间表示为$(+\infty,-\infty)$，称为**无限开区间**，于是有如下定义.

(4) 无限开区间　$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$

$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}$

$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}$

(5) 无限半开区间　$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$

$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$

无限开区间、无限半开区间都至少有一个无限端点，统称为**无限区间**.

无限区间$[a,+\infty)$、$(-\infty,b)$如图 1-2 所示.

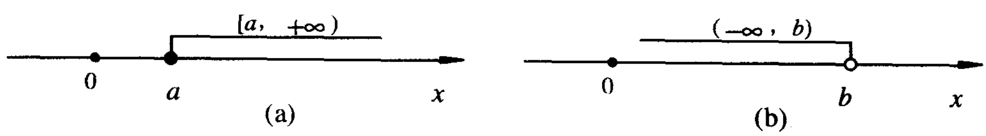


图 1-2

1.1.3　邻域

在高等数学中，经常要研究变量在某点附近的变化情况，从而产生了邻域的概念.

1. 邻域

设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

点 a 叫做 $U(a,\delta)$的**中心**，δ 叫做 $U(a,\delta)$的**半径**．点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$以点 a 为中心，其**长度**为 2δ，如图 1-3(a)所示.

有时要经常用到去掉中心的邻域.

2. 去心邻域

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为**点 a 去心的 δ 邻域**(空心邻域)，记作$U(\bar{a},\delta)$，

即$U(\overline{a},\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$(图 1-3 (b))。

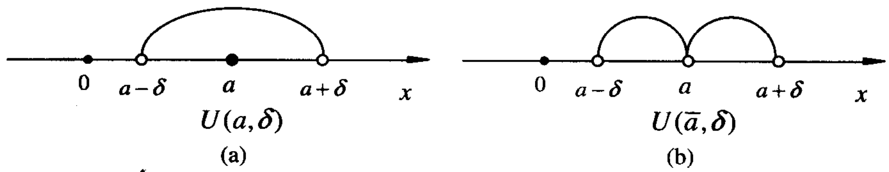


图 1-3

例　填空(技能训练题)

(1) 点 6 的 0.2 邻域记为_______，表示区间为_______，用不等式表示为________.

(2) 不等式$|x-3|<0.5$表示以点$x=$ __ 为中心、$\delta=$ ____为半径的开区间_________，记为 _________.

(3) 不等式$0<|x-2|<0.1$表示以点 $x=$ ___为中心，$\delta=$ ____为半径的去心邻域_________，记作__________.

解：(1) $U(6,0.2)$，$(5.8,6.2)$，$|x-6|<0.2$

(2) 3，0.5，$(2.5,3.5)$，$U(3,0.5)$

(3) 2，0.1，$(1.9,2)\cup(2,2.1)$，$U(\overline{2},0.1)$

1.2　函数的概念

1.2.1　常量和变量

数学的主要研究内容是数量关系和空间形式. 其中数量又可以分为两大类：常量和变量.

在研究某一问题的过程中，数值保持不变的量称为**常量**，数值发生变化的量称为**变量**. 如大家所熟知的圆的面积由数学公式$S=\pi r^2$刻划，半径r和圆的面积S就是变量，而圆周率π就是常量.

常量通常用字母a、b、c等表示，变量通常用字母x、y、t等表示.

注意：常量与变量是相对“过程”而言的. 例如就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量.

1.2.2　函数的定义

在某一问题的变化过程中，通常并不是只有一个量独立变化，而是两个或多个变量，这些变量之间并不是彼此孤立的，而是相互联系制约着. 这些变量是怎么变化的？它们之间有何联系？存在什么规律？怎样找到这些规律，从而达到人们了解、掌握、预测、控制这一问题的目的？这些正是高等数学所要研究和解决的问题. 本章只讨论两个变量的情况，看下面的例子.

例 1　自由落体运动，设物体下落的时间为t，下落的距离为s，假定开始下落的时刻

为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的依赖关系由下式给定：

$$s=\frac{1}{2}g t^2$$

其中 g 是重力加速度，假定下落物体着地的时间为 $t=T$，那么当时间 t 在 $[0,T]$ 上任取一数值时，由上式就可以计算出确定的 s 值与之对应.

例 2　运输公司对运输的物品采用分段计费，并根据运输里程的长短给予相应的打折优惠. 设路程为 x，运费打折情况如下：

$x<250$	不打折
$250\leqslant x<500$	2%折扣
$500\leqslant x<1000$	5%折扣
$1000\leqslant x<2000$	8%折扣
$2000\leqslant x<3000$	10%折扣
$3000\leqslant x$	15%折扣

设吨/千米的基本运费为 a，货物的质量为 b，折扣为 $c\%$，则总运费 y 的计算公式为：

$$y=abx(1-c\%)$$

当路程 x 确定时，由此公式就可以计算出确定的运费 y 与之对应.

上面两个例子均反映了两个变量之间的依赖关系，每个依赖关系对应了一个法则，根据这个法则，当其中一个变量在某一范围内取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应，这种对应正是函数概念的实质.

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每一个 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，函数 y 的对应值 y_0 称为函数在点 x_0 处的函数值，记作：

$$y_0=f(x_0)\qquad 或 \qquad y|_{x=x_0}=f(x_0)$$

当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**.

注 1：在函数 $y=f(x)$ 中，记号 f 表示自变量 x 与因变量 y 的对应关系，也可以用其他字母如 F、ϕ、f_1、f_2 等表示，这时函数记作 $y=F(x)$，$y=\phi(x)$，$y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$.

注 2：注意对函数定义中的两个关键词“有”、“确定”的深层理解. 函数 y 的值无论是通过公式计算、查表、看图，还是查阅资料、叙述、口答等任何形式，只要“有”“确定”的值即可. 所以函数涵义的深远宽广是初学者难以想象的，人们身边的万事万物都存在着函数关系，函数无处不在. 但在高等数学中主要研究由解析式给出的函数.

注 3：函数不仅揭示了事物相互联系的规律，也向人们揭示了一种思想：**“通过某一事实的信息去推知探究另一事实”**. 这种思想的认知、理解、掌握、运用将会使人们终身受用.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

2. 函数的两要素

定义域 D、对应关系(法则) f 构成了函数的两要素，二者缺一不可. 所以要判断两个函数是否相同，只要看它们的定义域和对应法则是否相同即可.

函数定义域的确定是研究函数的基本前提.

(1) **在实际问题中**，定义域由实际意义确定. 如在例 1 中，定义域 $D=[0,T]$；在例 2 中，定义域 $D=[0,+\infty]$.

(2) **在数学中**，如没有指明变量的具体意义或特别声明，这里约定，函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的全体实数.

例 3 求函数 $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{\lg 5-x}{x-3}$ 的定义域.

解：要使函数 $f(x)$ 有意义，必须有：

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ 5-x>0 \\ x-3\neq 0 \end{cases} \qquad \text{即} \begin{cases} x\geqslant 2 \\ x<5 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

所求定义域为：$2\leqslant x<5$ 且 $x\neq 3$，即 $[2,3)\cup(3,5)$.

3. 单值与多值函数

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，这种函数叫做**单值函数**，否则叫做**多值函数**. 例 1、例 2 中的函数都是单值函数. 而函数 $y^2=x$，对于任意正实数 x 都有一对互为相反数的实数 $y=\pm\sqrt{x}$ 与之对应，故是多值函数. 以后凡没有特别的说明，本书讨论的都是单值函数.

1.2.3 函数的图像

设函数的定义域为 D，对任 $x\in D$，通过函数 $y=f(x)$ 有确定的 y 值与之对应. 以 x 为横坐标、y 为纵坐标在平面直角坐标系 xOy 上确定一个点 $M(x,y)$，当 x 取遍定义域 D 中的所有数值时，点 $M(x,y)$ 的集合称为函数 $y=f(x)$ 的图像. 一个函数的图像通常是一条曲线，所以以后常称函数的 $y=f(x)$ 的图像为曲线 $y=f(x)$.

1.2.4 函数的表示法

在函数的定义中，并没有规定用什么方法来表示函数. 为了能很好地研究函数的规律，就应该采用适当的方法来表示函数. 函数的表示法通常有四种：解析法、图示法、列表法和叙述法.

1. 解析法

用数学式子表示函数的方法叫**解析法**，也叫公式法. 如例 1、例 2. 解析法的优点是简单、明确，便于计算、分析和理论研究；缺点是直观性差，确定解析式有时比较困难，有的函数不能用解析式表示.

2. 列表法

用表格形式表示函数的方法叫**列表法**，又叫表格法. 如大家所熟悉的三角函数表、对数表、成绩单以及企业的产量表、利润表等. 列表法的优点是使用方便，可以直接得到函数值；缺点是数据不全，缺乏直观性，不便于运算和理论研究.

3. 图示法

用图形表示函数的方法叫函数的**图示法**. 如地图、工作流程图、雷达散点图、人的心电图等. 图示法的优点是直观形象，可直接看到函数的变化趋势；缺点是精确度受条件的限制，不便于数据分析研究. 这种方法在工程技术上应用较普遍.

4. 叙述法

用语言或各种专业语言直接叙述函数的方法称为**叙述法**. 如：设 $x\in \mathbf{R}$，函数 $y=[x]$ 为不超过 x 的最大整数. 叙述法常用于专业性的理论研究，简单易行，但具有局限性.

函数的四种表示法各有优缺点，不同的问题可以采用不同的表示方法，有时为了研究函数的方便，往往同时使用两种以上的表示法. 在高等数学中，常采用解析法表示函数，为了直观，又辅以图示法画出图形，以配合分析研究.

为了以后叙述的方便，如函数 $y=f(x)$在 x 取某定值 x_0 时有确定的对应值 $f(x_0)$，则称函数在点 x_0 处**有定义**；否则就称函数在点 x_0 处**没有定义**. 如果函数 $y=f(x)$在某区间上的每一点处都有定义，则称函数在该**区间上有定义**.

为了方便，又引入记号：$\forall$ —— 任给；$\exists$ —— 存在；>| —— 使得.

用以上记号，函数的概念可表述为：$\forall x\in D$，$\exists\ f$，>| $y=f(x)$.

1.2.5 分段函数

例 4 某旅游景区“十一”黄金周举办水果采摘节，每位游客可免费采摘不超过 2.5 kg 的水果，超过 2.5 kg 而不超过 10 kg 的部分每千克交费 3 元，超过 10 kg 的部分每千克交费 2 元.

(1) 求采摘水果费用与重量间的函数关系.

(2) 求采摘水果质量分别为 2 kg、10 kg、15 kg 时应交的费用.

(3) 一家三口共采摘水果 21 kg，怎样才能使交费最少.

解：(1) 设水果质量为 x kg，应交费用为 y 元，根据题意，应分以下 3 种情况考虑.

① 当 $x\in[0,\ 2.5]$ 时，$y=0$

② 当 $x\in(2.5,\ 10)$ 时，$y=3\,(x-2.5)$

③ 当 $x\in(10,\ +\infty)$ 时，$y=3\,(10-2.5)+2\,(x-10)=22.5+2\,(x-10)=2\,x+2.5$

所求函数关系式为：

$$y=\begin{cases}0 & x\in[0,2.5]\\ 3(x-2.5) & x\in(2.5,10]\\ 2\,x+2.5 & x\in(10,+\infty)\end{cases}$$

(2) 因为 $2\in[0,2.5]$ 所以 $f(2)=0$

因为 $10\in(2.5,10]$ 所以 $f(10)=3(x-2.5)\big|_{x=10}=3(10-2.5)=22.5$(元)

因为 $15\in(10,+\infty)$ 所以 $f(15)=(2x+2.5)\big|_{x=15}=2\times15+2.5=32.5$(元)

(3) 两人分别各带 2.5 kg 不交费，余下 $21-2\times2.5=16$ kg 由第三人带，交费最少，为：

$$y_{\min}=f(2.5)+f(2.5)+f(16)=0+0+(2x+2.5)\big|_{x=16}=2\times16+2.5=34.5\text{(元)}$$

在本例中，函数的定义域为 $x>0$，对其定义域内自变量 x 取不同的值，却不能用一个统一的数学解析式表示，而是在自变量的不同区段对应不同的解析式，称这样的函数为分段函数.

1. **分段函数定义**

在定义域的不同范围具有不同解析式的函数，称为**分段函数**.

在求分段函数的函数值时，务必先确定自变量所在的区段，再找本区段对应的解析式，然后代入求值.

2. **求函数值的步骤**

一定段，二定式，三代入，四求值.

分段函数在数学、工程技术上，特别是在工作和日常生活中都会经常遇到，平时接触的好多实际问题的数学模型都是分段函数，熟练掌握建立分段函数解析式的方法、规律、技巧具有非常重要的实际意义.

例 5 (技能训练题)

旅客乘坐汽车可免费携带不超过 10 kg 的物品，超过 10 kg 而不超过 25 kg 的部分每千克费 0.12 元，超过 25 kg 而不超过 100 kg 的部分，每千克收费 0.2 元.

(1) 列出携带物品收费的解析式.

(2) 求携带物品分别为 9 kg、25 kg、26 kg 时应交的费用.

1.2.6 反函数

世界万物，变化万千，交替往复. 运动的变量相互依赖、相互关联又相互转化. 函数的自变量与因变量的主从关系在实际问题中随着时间的推移、环境的变化、要求的改变也会发生位置的交换，原来的自变量(因变量)就变成了因变量(自变量)，这就产生了反函数的概念.

1. **反函数的定义**

设 $y=f(x)$，$x\in D$，$y\in W$. 如对于 W 中的每一个 y 值，都可以由关系式 $y=f(x)$ 确定出唯一的 x 值 $(x\in D)$ 与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的新函数 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 W，值域为 D. $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，或称它们互为反函数.

考虑作图、研究、思维等多方面因素，习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以将 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，定义域为 $x\in W$，值域为 $y\in D$.

2. 求反函数步骤

(1)反解——由 $y=f(x)$ 反解出 $x=f^{-1}(y)$.

(2)改写——x、y 互换，得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

(3)换域——反函数的定义域为原函数的值域.

3. 反函数的图像

$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

注 1：互为反函数的定义域与值域正好互换.

注 2：并不是所有的函数都有反函数，如 $y=c$ (常量) 就无反函数.

注 3：只有 x 与 y 是一一对应时函数才有反函数，即反对应关系是单值的，多值对应无反函数. 多值对应时，可将定义域适当分段，使函数在所分各段上的反对应关系是单值的，再分别求出各段的反函数.

如 $y=x^2$，$x\in\mathbf{R}$，$x=\pm\sqrt{y}$ 多值，无反函数.

但如把原定义域分成 $\mathbf{R}=(-\infty,0)\cup[0,+\infty)$ 则

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y=x^2$ 有反函数 $x=-\sqrt{y}$，即 $y=-\sqrt{x}$.

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$y=x^2$ 有反函数 $x=\sqrt{y}$，即 $y=\sqrt{x}$.

注 4：一个函数若有反函数，则有恒等式：$f^{-1}[f(x)]\equiv x$，$x\in D$；

相应地有：$f[f^{-1}(y)]\equiv y$，$y\in W$.

1.3 函数的性质

函数的性质反映了函数动态(或静态)的变化规律、特点、特征，为大家更好地认识、研究、掌握函数，进而达到可测、可控、可用的目的提供了理论帮助. 在初等数学中已经学习了函数的部分性质，现归纳如下.

1. 单调性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义，$\forall x_1,x_2\in D$，$x_1<x_2$

(1) 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加，用符号 ↗ 表示.

(2) 若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少，用符号 ↘ 表示.

单调增加与单调减少的函数统称为**单调函数**，使函数 $f(x)$ 单调的区间称为**单调区间**.

定义给出了判断函数单调的方法，待学习导数后，本书第 4 章将给出更简捷有效的判定方法.

2. 奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，$\forall x\in D$，恒有：

(1) $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

例如：函数 $y=x^2$，$y=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数.

函数 $y=x^3$，$y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数.

函数 $y=\sin x+\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是非奇非偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

注：显然，在定义中，定义域关于原点对称的条件是必要的，因为在非对称区间上根本就谈不上奇偶性. 如 $y=x^2$ 在 $x\in[1,8)$ 上无从说及奇偶性. 所以研究函数奇偶性时必须指明对称区间.

3. 周期性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在 $D=(-\infty,+\infty)$ 上有定义. $\forall x\in D$，如果 $\exists T>0$，恒有：

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的**周期**.

注意：对每一周期函数而言，定义中的 T 有无穷多个，因为：

如果 $f(x+T)=f(x)$

则 $f(x+2T)=f[(x+T)+T]=f(x+T)=f(x)$

$f(x+3T)=f[(x+2T)+T]=f(x+2T)=f(x)$

……

所以，若 T 是周期函数 $f(x)$ 的周期，则 kT 也是 $f(x)$ 的周期(k 为非零整数).

规定：周期函数的周期指最小正周期.

例 求 $y=\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x$ 的周期.

解：因为 $\sin x$ 的周期为 2π，$\sin 2x$ 的周期为 π，$\sin 3x$ 的周期为 $\frac{2\pi}{3}$，

而 $2\pi,\pi,\frac{2\pi}{3}$ 的最小公倍数是 2π，

所以函数 $y=\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x$ 的周期为 2π.

4. 有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上有定义. $\forall x\in D$，如果 $\exists M>0$，恒有：

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

例如：正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界，因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$.

由定义可知：有界函数的图像必介于两条平行于 x 轴的直线 $y=\pm M$ $(M>0)$ 之间.

如果存在一个实数 G，恒有 $f(x)\leqslant G$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有上界**.

如果存在一个实数 G，恒有 $f(x)\geqslant G$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有下界**.

由有界函数的定义可知：有界函数必有上界和下界，而既有上界又有下界的函数才是有界函数.

注意：当讨论函数的性质时，必须指明函数的定义域和函数在什么范围内具有什么性质.

例如：函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间(0,3)上有下界 $\frac{1}{3}$，但无上界，所以函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间(0,3)上无界. 但是在区间 $[2,+\infty)$ 上，既有上界 $\frac{1}{2}$，又有下界 0，所以函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上有界. 可见，函数的有界性与区间有关.

1.4 初等函数

1.4.1 基本初等函数

在实际问题中遇到的函数是多种多样的，人们在长期的生产实践和科学研究中，经过分析、归纳、综合总结，发现大多数的函数是由 6 种最基本的函数经过加、减、乘、除运算和复合运算构成的. 这 6 种最基本的函数是：常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，统称为**基本初等函数**. 基本初等函数在初等数学中已经作了系统的研究，现简要回顾如下.

1. 常函数： $y = C$（C 为常数）

这是最简单的一类函数，无论 x 取什么值，函数 y 的值永远是常数 C.

定义域：$D = \mathbf{R}$

值域：$W = \{C\}$

见图 1-4.

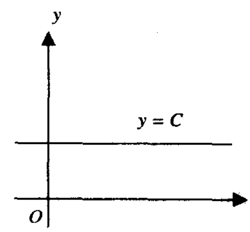


图 1-4

2. 幂函数： $y = x^a$　($a > 0$，$a \neq 1$，a是常数)

见图 1-5.

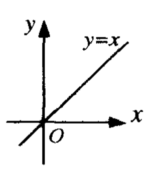
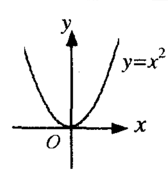
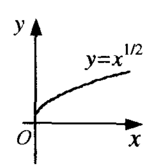
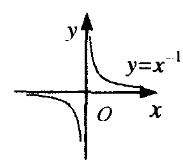
函数	$a=1$	$a=2$	$a=1/2$	$a=-1$
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值　域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty]$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	奇函数
单调性	单调增	$(-\infty,0)$内递减 $[0,+\infty)$内递增	单调增	$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$ 内分别递减

图 1-5

3. 指数函数： $y = a^x$　($a > 0$，$a \neq 1$，a是常数)

见图 1-6.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com