普通高等学校少数民族预科教材（试用）

初等数学

教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会　编

全一册

PUTONG GAODENG XUEXIAO SHAOSHU MINZU YUKE JIAOCAI (SHIYONG)

国家行政学院出版社
红旗出版社

初等数学

普通高等学校少数民族预科教材(试用)

初等数学

(全一册)

教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会　编

主　　编　罗守山
编写人员　罗守山　刘　学
　　　　　熊　苹　章元崧

国家行政学院出版社
红　旗　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

初等数学/教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会编.－北京：国家行政学院出版社，2006
ISBN 7-80140-518-8

Ⅰ. 初... Ⅱ.教... Ⅲ.初等数学－高等教育：少数民族教育－教材 Ⅳ.012

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第082075号

初等数学

（全一册）

教育部普通高等学校少数民族预科教材编写委员会 编

*

国家行政学院出版社
红旗出版社 出版
北京市海淀区长春桥路6号(100089)
新华书店总经销
开封市第一印刷厂印刷
880×1230毫米 1/16开本 23.25印张 465千字
2006年8月第1版 2006年8月第1次印刷
印数：1－10000
ISBN 7-80140-518-8/0·44 定价：36.80元（全二册）

教育部“普通高等学校少数民族预科教材”编写委员会

前 言

为适应普通高等学校少数民族预科教学的需要，教育部民族教育司组织编写了普通高等学校少数民族预科《大学语文》、《汉语精读教程》、《初等数学》、《英语》、《计算机》、《大学预科生入学教育》、《民族理论与民族政策》等系列教材。本套教材的使用对象为普通高等学校少数民族一年制预科与两年制预科的学生。其中《大学语文》、一年制《英语》适用于一年制预科学生；《汉语精读教程》、两年制《英语》适用于两年制预科学生。《初等数学》、《计算机》、《大学预科生入学教育》、《民族理论与民族政策》适用于一年制和两年制预科学生。

本套教材是以教育部制定的各科课程教学大纲为依据，参照近年来预科学生的普遍水平，遵循有利于国家统一、民族团结、贴近生活、贴近社会的原则进行编写的。为保证教材的适用性，教材编写人员与部分预科教学的一线老师进行了充分的沟通。许多预科教学的一线教师承担了一定的编写工作。

本套教材充分考虑了少数民族学生的实际情况，针对预科阶段的教学特点，在高中阶段各科教学内容的基础上，指导学生对应掌握的学科知识进行查漏补缺，补预结合，使之全面提高。同时，教材在编写过程中，渗透了新的教育理念，真正贴近学生的需要，注重对学生学习能力的培养，力求把教材的思想性、科学性、趣味性、综合性统一起来，突出教材的适用性和可操作性，力求做到难易适度，由浅入深，梯度推进，逐步提高，使他们通过一年或两年预科阶段的学习达到教学的目的，成为维护民族团结、促进和谐发展、实现民族复兴的骨干人才。

由于时间仓促，教材中难免有疏漏或不足之处，希望各地有关学校在试用中提出宝贵意见，以待今后进一步修订。

编写说明

由于近十年全国各少数民族自治区、聚居区经济和教育水平的不断提高，加之高中课程改革的不断深入，为了进一步提高全国各少数民族预科院校的教学质量，2005年12月教育部民族教育司在北京召开了编写“普通高校本科少数民族预科系列教材”启动会。

遵照会议精神，以及听取全国各少数民族预科院校师生的宝贵意见和建议，在全国高校民族预科《数学》教材第二版的基础上，结合《新高中数学课程标准》和《高等数学课程教学基本要求》，我们编写了本系列普通高校本科少数民族预科《数学》教材。

在编写过程中，我们保留了全国高校民族预科《数学》教材第二版的主要知识体系，同时找出了书中与目前本科少数民族预科数学教学不适应的方面。对不适应目前教学的章节有所删减，对新课程标准要求的内容有所增补，更加注意了预科教材内容对高中知识和本科知识的衔接作用，增加了例题、习题，同时配有同步练习册，条理清晰、针对性强，部分章节前后有一些数学科学家的名言、生平介绍以及利用数学知识解决的生活中实际问题，增加了教材的人文性、实际应用性。另外，目录中标有*的章节为选学内容，教师可根据学生程度以及各目标院校要求的不同略去或要求自学。

本书及其配套使用的练习册的主编是罗守山。参加编写的人员有罗守山、贾晓芸、高海英、王小妹、蒲明松、刘洪波（第1−5章）、刘学（第6章）、熊苹（第7章）、章元崧（第8章）。刘学、罗守山承担了与编辑部的沟通以及最终书稿的整理工作。

在本书的编写过程中，得到了全国各少数民族预科院校及师生的热情帮助。在本书的修订阶段，中央民族大学数学教研室的黄宁老师，对本书提出了宝贵意见。同时，编者所在院校的领导和老师对本书的编写工作进行全力的支持，在此，我们表示衷心的感谢。由于时间仓促，书中存在的问题及不足之处，敬请广大专家、师生批评指正并给予谅解。

编　者

目　录

第一章　预备知识 …………………………………………………… (1)

1.1　集合 ………………………………………………………………… (1)
1.2　实数集与复数集 ………………………………………………… (8)
1.3　恒等变形与待定系数法 ………………………………………… (12)
1.4　反证法 ……………………………………………………………… (15)
1.5　数学归纳法 ………………………………………………………… (19)
1.6　二项式定理 ………………………………………………………… (24)
本章小结 ………………………………………………………………… (27)
习题 1 …………………………………………………………………… (29)

第二章　整式、分式与根式 ………………………………………… (30)

2.1　整式及其运算 ……………………………………………………… (30)
2.2　分式 ………………………………………………………………… (37)
2.3　根式 ………………………………………………………………… (45)
2.4　零指数、负指数与分数指数幂 …………………………………… (53)
本章小结 ………………………………………………………………… (56)
习题 2 …………………………………………………………………… (59)

第三章　方程与不等式 ……………………………………………… (61)

3.1　一元二次方程 ……………………………………………………… (61)
3.2　分式方程与无理方程 ……………………………………………… (66)
3.3　二元二次方程组 …………………………………………………… (70)
3.4　不等式 ……………………………………………………………… (74)
3.5　几个著名不等式 …………………………………………………… (80)
本章小结 ………………………………………………………………… (85)
习题 3 …………………………………………………………………… (87)

第四章　基本初等函数 ……………………………………………… (88)

4.1　函数 ………………………………………………………………… (88)

4.2 幂函数、指数函数与对数函数 …… (96)
4.3 三角函数 …… (100)
4.4 反三角函数与三角方程 …… (112)
4.5 任意三角形的解法 …… (116)
本章小结 …… (118)
习题 4 …… (119)

第五章 复数 …… (121)

5.1 复数及其运算 …… (121)
5.2 复数的三角形式和指数形式 …… (125)
本章小结 …… (135)
习题 5 …… (137)

第六章 排列组合与概率论初步 …… (140)

6.1 排列组合 …… (140)
6.2 随机试验、样本空间和随机事件 …… (145)
6.3 事件的概率 …… (149)
6.4 条件概率 …… (154)
6.5 独立性 …… (156)
6.6 贝努里(Bernoulli)试验模型 …… (159)
本章小结 …… (160)
习题 6 …… (163)

第七章 行列式、线性方程组及矩阵初步 …… (165)

7.1 行列式 …… (165)
7.2 线性方程组 …… (174)
7.3 矩阵 …… (180)
本章小结 …… (189)
习题 7 …… (190)

第八章 解析几何 …… (192)

8.1 直线与二次曲线 …… (192)
8.2 坐标轴的平移、旋转和二次曲线的判别 …… (206)
8.3 极坐标与参数方程 …… (215)
8.4 空间解析初步 …… (223)
本章小结 …… (236)
习题 8 …… (239)
附录 习题答案 …… (241)

第一章　预备知识

本章为了以后的学习，简单地介绍了中学数学中的一些基本运算. 整式运算是代数中最常见和最基本的运算，是其他代数式运算的基础. 由它所导出的二项式定理是很重要的公式，应用极其广泛. 本章将介绍集合、实数集和复数集、反证法、数学归纳法以及二项式定理等内容.

1.1　集　合

在数学的领域中，提出问题的艺术比解答问题的艺术更为重要.

——*康托*

集合理论是一门研究数学基础的学科，它试图从一个比“数”更简单的概念——集合出发，定义数及其运算，进而发展到整个数学. 集合理论产生于 16 世纪末. 当时，只是由于微积分学的需要，人们仅对数集进行了研究. 19 世纪末，1876～1883 年间，康托（*Georg Cantor*，1845～1918，德国数学家）对任意元素的集合进行了系统的研究. 康托被公认为集合理论的创始人.

事实上，集合不仅可用来表示数及其运算，还可以用于非数值信息及离散结构的表示和处理. 像数据的删节、插入、排序，数据间关系的描述，数据的组织和查询都很难用传统的数值计算来处理，但可以用集合运算来实现. 集合论被广泛应用在计算机科学中，如数据结构、操作系统、数据库、编译原理、程序设计、人工智能、信息检索、CAD 等，下面我们简单地复习一下关于集合的概念及其运算.

1.1.1　集合的概念

在中学的数学课程中，大家对集合及其元素的意义已经有所了解，因此，下面我们做些简要的回顾.

1. 集合及其元素

集合这一概念是容易理解的，它指的是由某些具有某种共同特点的个体构成的集体. 集合也常称为集，族，类，通常用大写的英文字母 $A,B,C\cdots\cdots$ 表示. 例如，全体中国人是一个集合；所有整数也是一个集合，简称整数集，记为 $\mathbf{Z}$. 组成一个集合的对象称为这个集合的元素，通常用小写的英文字母 $a,b,c\cdots\cdots$ 表示，例如所有中国人的集合以每一个中国人为它的元素. 元素也常称为元，点或成员. 如果 a 是集合 A 的元素，称 a 属于 A，记为 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，称 a 不属于 A，记为 $a\notin A$. 对任何元素 a 和任何集合 A，或者 $a\in A$，或者 $a\notin A$，两者必居其一. 确定一个集合 A，就是要确定哪些元素属于 A，哪些元素不属于 A.

集合的元素有3个特性：

(1)元素的确定性，即根据一个集合可以判断任何一个个体是否属于这个集合，否则这个集体就不是一个集合. 例如，所有高个子组成的集体就不是一个集合，由于这里高个子的概念比较模糊，没有明确地说多高才算是高个子.

(2)元素的无序性，即一个集合中的元素是没有顺序的，元素完全相同，顺序不同的两个集合是完全一样的，即它们表示的是同一个集合.

(3)元素的互异性，一个集合中的元素是互不相同的.

集合也可以没有元素. 例如平方等于2的有理数的集合，既大于1又小于2的整数的集合都是没有任何元素. 这种没有元素的集合我们称之为空集，记作$\varnothing$. 此外，由一个元素构成的集合，我们常称为单点集. 由有限个元素构成的集称为有限集，否则称为无限集. 有限集中成员的个数称为集的基数(无限集的基数概念也有严格的定义). 集合A的基数表示为$|A|$.

有些常用特定的集合通常用特定字母符号来表示. 如：$\mathbf{N}$表示所有自然数组成的集合，$\mathbf{Z}$表示所有整数组成的集合，$\mathbf{Q}$表示所有有理数组成的集合，$\mathbf{R}$表示所有实数组成的集合，$\mathbf{C}$表示所有复数组成的集合，$\mathbf{Q}^+$表示所有正有理数组成的集合，$\mathbf{R}^-$表示所有负实数组成的集合，$\mathbf{N}_n$表示前n个自然数的集合.

2. 集合的表示法

集合的表示方法主要有两种：列举法和构造法.

所谓列举法，就是列出集合的元素，例如$A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$是表示集合A由元素a,b,c,d,e,f,g组成.

所谓构造法，就是描述出集合中元素适合的条件，也称描述法. 其表示形式如

$$A=\{x|P(x)\}\text{或}A=\{x:P(x)\}$$

其中$P(x)$表示"x满足性质P"或"x具有性质P". $A=\{x|P(x)\}$或$A=\{x:P(x)\}$的意义是：集合A由且仅由满足性质P的那些对象所组成，也就是说

$$a\in A\quad\text{当且仅当}\,a\,\text{满足性质}\,P(\text{或}\,P(a)\,\text{成立})$$

例 1.1.1 以下是常常要用到的一些集合以及它们的表示方法.

(1)$\{0,1\}=\{x|x=0\text{ 或 }x=1\}$

(2)自然数集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}=\{x|x\text{ 是自然数}\}$

(3)整数集合 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}=\{x|x\text{ 是正整数,或零,或负整数}\}$

(4)偶整数集合 $E=\{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}=\{x|x\text{ 是偶数}\}$

$=\{x|x\in\mathbf{Z}\text{ 且 }2|x\}$　　($2|x$表示2整除x)

(5)前n个自然数的集合 $\mathbf{N}_n=\{0,1,2,3,\cdots,n-1\}$

$=\{x|x\in\mathbf{N}\text{ 且 }0\leqslant x<n\}$

例 1.1.2 例1.1.1之(1)(5)是有限集，其他为无限集. $|\{0,1\}|=2$，$|\varnothing|=0$，$|\{\varnothing\}|=1$. 即$\varnothing$不同于$\{\varnothing\}$，前者是没有任何元素的集合，后者是恰含一个元素——空集的单点集.

例 1.1.3 下面的各组对象能否分别构成集合，若能构成集合，请用集合语言表达出来，若不能构成集合，请说明理由.

(1)热爱生活的所有人；

(2)所有大于0的负数；

(3)直角坐标平面内，横坐标与纵坐标的绝对值相等的所有的点；

(4)所有经常打网球的人.

解：(1)，(4)不是集合，由于“热爱”和“经常”不具备确定性，所以不是集合. (2)，(3)是集合，(2)表示的是一个空集，(3)构成的集合是$\{(x,y)\mid y=\pm x, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$.

1.1.2 集合的并与交

集合的运算就是以给定集合为对象，按照确定的规则得到另外一些集合. 例如，A 表示“上数学课的学生集合”；B 表示“上物理课的学生集合”. 如果这两门课安排在同一时间进行期终考试，那么参加这两门课考试发生冲突的学生集合是什么？显然，这个集合是由上数学课且上物理课的学生组成. 为了使这些概念一般化，下面我们定义集合的运算.

1. 子集

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即若元素 x 属于 A，那么 x 属于 B，我们便记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，读作“A 包含于 B”(或“B 包含 A”)，我们把 A 称作是 B 的子集，文氏图如图 1.1.1所示，A 不是 B 的子集用$A\nsubseteq B$ 来表示. 如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集. “A 是 B 的真子集”记为 $A\subset B$.

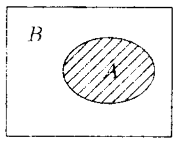

图 1.1.1 子集

集合之间的子集关系或包含关系是集合之间最重要的关系之一. 必须彻底弄清集合之间的子集关系和元素与集合之间的隶属关系这两个完全不同的概念.

定理 1.1.1 设 A,B,C 都是集合，则

(1)$A=A$；

(2)若 $A=B$，则 $B=A$；

(3)若 $A=B$，$B=C$，则 $A=C$.

定理 1.1.2 设 A,B,C 都是集合，则

(1)$A\subseteq A$；

(2)若 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，则 $A=B$；

(3)若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

定理 1.1.3 设 A,B,C 都是集合，则

(1)$A\subset A$ 不成立；

(2)$A\subset B$ 和 $B\subset A$ 不能同时成立；

(3)如果 $A\subset B$，并且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.

这 3 个定理都比较容易证明，有兴趣的读者可以自己试着证明.

2. 集合的并

设 A,B 是两集合，所有属于 A 或属于 B 的元素构成的集，称为 A 和 B 的并集，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in\mathbf{A}$ 或 $x\in\mathbf{B}\}$. 两个集的并集的文氏图如图 1.1.2 所示

集合并的运算具有以下性质：

(1)$A\cup A=A$；

(2)$A\cup\varnothing=A$；

(3)$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

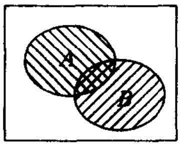

图 1.1.2　并集

对于多个集合的并，我们可以记为：$W=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\cup_{i=1}^{n}A_i$.

例 1.1.4　设 $I=\{0,1,2,3,\cdots,9\}$，$A=\{2,4\}$，$B=\{4,5,6,7\}$，$C=\{0,8,9\}$，$D=\{1,2,3\}$；$A\cup B=\{2,4,5,6,7\}$，$A\cup B\cup C\cup D=I$.

3. 集合的交

由 A 和 B 的所有共同元素构成的集，称为 A 和 B 的交集，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in \mathbf{A}$ 且 $x\in\mathbf{B}\}$. 两个集的交集的文氏图如图 1.1.3 所示，其中阴影部分就是 $A\cap B$.

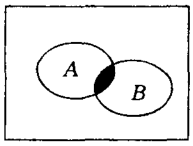

图 1.1.3　交集

集合交的运算具有以下性质：

(1)$A\cap A=A$；

(2)$A\cap\varnothing=\varnothing$；

(3)$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$.

例 1.1.5　50 名学生参加语文和数学测试，语文和数学及格的人数分别是 40 人和 35 人，两科测验均不及格的有 5 个，问这两科测验都及格的人数是多少？

解：设 $A=\{$语文及格的人数$\}$，$B=\{$数学及格的人数$\}$，设两科都及格的人数为 x，因为两科都及格的人数在 A 和 B 中都计算了一次，因此可得：$40+(35-x)=50-5$，解之可得：$x=30$，即两科都及格的人数为 30 人.

4. 集合的补

当研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一个给定集合的子集，这个给定的集合就称为全集 I. 也就是说，全集含有我们所要研究的各个集合的全体元素.

已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，成为集合 A 在 I 中的补集，记作 $\overline{A}$(读作“A 补”)，即 $\overline{A}=\{x|x\in\mathbf{I}$ 且 $x\notin\mathbf{A}\}$，如图 1.1.4 所示.

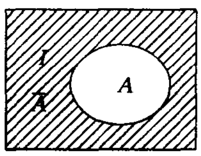

图 1.1.4　补集

由补集的定义可知，对于任何集合 A，有

$$A\cup\overline{A}=I,A\cap\overline{A}=\varnothing,\overline{\overline{A}}=A.$$

例如，设 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，则 $\overline{A}=\{2,4,6\}$，且

$\{1,3,5\}\cup\{2,4,6\}=\{1,2,3,4,5,6,\}=I$，$\{1,3,5\}\cap\{2,4,6\}=\varnothing$，$\overline{\overline{A}}=\{1,3,5\}=\mathbf{A}$.

1.1.3 集合的运算规律

就像我们熟悉的加减乘除运算一样，集合的运算也有它的一些规律，现在我们就来简要地概括一下这些运算规律.

定理 1.1.4 设 A,B,C 为任意集合，$*$ 代表运算 $\cup$ 或 $\cap$，那么

(1) $A*A=A$ （等幂律）

(2) $A*B=B*A$ （交换律）

(3) $A*(B*C)=(A*B)*C$ （结合律）

(4) $A\cup\varnothing=A, A\cup I=I, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cap I=A, A\cup\varnothing=A$

(5) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A\cup(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （分配律）

(6) $A\cap(A\cup B)=A, A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证：(1)，(2)，(3)由定义立得，(5)，(6)的证明留给读者. 现证(4).

对任意 x，

$$x\in A\cup\varnothing \Leftrightarrow x\in A \text{ 或 } x\in\varnothing$$
$$\Leftrightarrow x\in A(x\in\varnothing\text{ 为假})$$

故 $A\cup\varnothing=A$. 而

$$x\in A\cap\varnothing \Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\in\varnothing$$
$$\Leftrightarrow x\in\varnothing(x\in A\text{ 为假})$$

故 $A\cap\varnothing=\varnothing$. 其余两式请读者补证. 证完

$A-B$ 称为 A 与 B 的差集，定义为

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

"$-$"称为差运算.

定理 1.1.5 对任意集合 A,B,C

(1) $A-A=\varnothing, A-\varnothing=A, A-I=\varnothing$，

(2) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$，

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

证：我们只证(2)中第一式，其余留给读者，

对任意 x，

$$\begin{aligned}x\in A-(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\notin B\cup C\\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ 且}(x\notin B \text{ 且 } x\notin C)\\ &\Leftrightarrow (x\in A \text{ 且 } x\notin B)\text{且}(x\in A \text{ 且 } x\notin C)\\ &\Leftrightarrow x\in(A-B)\text{ 且 } x\in(A-C)\\ &\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)\end{aligned}$$

故 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ 证完

定理 1.1.6 对任意集合 A,B

(1) $\overline{\overline{A}}=A, \overline{I}=\varnothing$

(2) $A\cup\overline{A}=I, A\cap\overline{A}=\varnothing$

(3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(4) $A-B=A\cap\overline{B}$

证：(1)，(2)，(4)易证，现证(3)的第一式.

$\overline{A\cup B}=I-(A\cup B)$

$=(I-A)\cap(I-B)$

$=\overline{A}\cap\overline{B}$ 证完

定理 1.1.7 对任意集合 A,B,若它们满足

(1)$A\cup B=I$,

(2)$A\cap B=\varnothing$,

那么 $B=\overline{A}$.

证:$B=B\cup\varnothing$

$=B\cup(A\cap\overline{A})$

$=(B\cup A)\cap(B\cup\overline{A})$

$=I\cap(B\cup\overline{A})$

$=(A\cup\overline{A})\cap(B\cup\overline{A})$

$=(A\cup B)\cap\overline{A}$

$=I\cap\overline{A}$

$=\overline{A}$ 证完

本定理的证明思路是利用已知等式进行推演,这种证明集合等式的方法简明,但难度有时较大.本定理还可直接用外延性公理来证,这种方法虽较繁锁,但思路清晰,易掌握.先证 $B\subseteq\overline{A}$.设 $x\in B$,由于 $A\cup B=\varnothing$,故 $x\notin A$,即 $x\in\overline{A}$,$B\subseteq\overline{A}$ 得证.再证 $\overline{A}\subseteq B$.设 $x\in\overline{A}$,则 $x\notin A$;由于 $A\cup B=I$,故必有 $x\in B$,$\overline{A}\subseteq B$ 又得证.因此 $B=\overline{A}$.

定理 1.1.8 对任意集合 A,B,C,D,

(1)$A\subseteq A\cup B$;

(2)$A\cap B\subseteq A$;

(3)$A-B\subseteq A$;

(4)$A\subseteq B$,$A-B=\varnothing$,$A\cup B=B$,$A\cap B=A$,4 个命题等价;

(5)若 $A\subseteq B$,则 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$.

证:(1),(2),(3),(5)易证,我们仅证明(4).

设(4)中 4 个命题为 P,Q,R,S,我们来证明 $P\Rightarrow Q\Rightarrow R\Rightarrow S\Rightarrow P$($\Rightarrow$表示“推出”),从而证实 4 个命题等价.

($P\Rightarrow Q$):设 $A-B\neq\varnothing$,则有 $a\in(A-B)$,即 $a\in A$,但 $a\notin B$,这与 $A\subseteq B$ 矛盾.故 $A-B=\varnothing$.得证.

($Q\Rightarrow R$):为证 $A\cup B=B$,需证

1)$B\subseteq A\cup B$.但由本定理之(1),此已得证.

2)$A\cup B\subseteq B$.为此设 x 为 $A\cup B$ 中任一元素,从而 $x\in A$ 或 $x\in B$.当 $x\in B$ 时,目的已达到.当 $x\in A$ 时,若 $x\notin B$,则 $x\in(A-B)$,此与 $A-B=\varnothing$ 矛盾.故 $x\in B$.总之,$A\cup B$ 中元素 x 必为 B 中元素,2)又得证.综合 1)、2)可知 $A\cup B=B$.

($R\Rightarrow S$):因 $A\cup B=B$,故

$$A\cap B=A\cap(A\cup B)=A(\text{吸收律})$$

($S\Rightarrow P$):设 $A\cap B=A$.要证 $A\subseteq B$,现设 x 为 A 中任一元素,由 $A\cap B=A$,可得 $x\in A\cap B$ 从而知 $x\in B$.故 $A\subseteq B$ 得证. 证完

本节简单地介绍了集合的概念,集合的元素和集合的子集,并简述了集合的并、交、差等常用的运算和运算的性质.在中学数学和高等数学中,集合是一个很重要的基本概念,在以后的学习中有广泛的应用.

●习题 1.1

1. 设集合 $M=\{x|x^2>4\}$，$N=\{x|x<3\}$，则以下各式正确的是（　　）.

A. $M\cup N=\{x|x<3\}$　　B. $M\cap N=\{x|2<|x|<3\}$

C. $M\cap N=\{x|2<x<3\}$　　D. $M\cup N=R$

2. 满足 $\{1\}\subseteq P\subseteq\{1,2,3,4\}$ 的集合 P 的个数为（　　）.

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 28

3. 集合 $A=\{a|a=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{b|b=4n\pm1,n\in\mathbf{Z}\}$，则 A，B 之间的关系是________.

4. 已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，

$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$ 且满足 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求实数 a 的值.

5 试证明定理 1.1.4 的(4)，(5).

课外阅读

康托的生平介绍

康托(*Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*，1845～1918)，德国数学家，集合论的创始人. 1845 年 3 月 3 日生于圣彼得堡，像许多优秀的数学家一样，他在中学阶段就表现出一种对数学的特殊敏感，并不时得出令人惊奇的结论. 他的父亲力促他学工，因而康托在 1863 年带着这个目的进入了柏林大学. 这时柏林大学正在形成一个数学教学与研究的中心. 康托很早就向往这所由外尔斯特拉斯占据着的世界数学中心之一. 所以在柏林大学，康托受了外尔斯特拉斯的影响而转到纯粹的数学. 他在 1869 年取得在哈勒大学任教的资格，不久后就升为副教授，并在 1879 年升为正教授，以后一直从事数学教学和研究.

大学期间康托主修数论，但受外尔斯特拉斯的影响，对数学推导的严格性和数学分析感兴趣. 哈勒大学教授 H. E. 海涅鼓励他研究函数论. 他于 1870～1872 年发表 3 篇关于三角级数的论文. 在 1872 年的论文中提出了以基本序列(即柯西序列)定义无理数的实数理论，并初步提出以高阶导出集的性质作为对无穷集合的分类准则. 函数论研究引起他进一步探索无穷集和超穷序数的兴趣和要求.

19 世纪 70 年代许多数学家只承认，有穷事物的发展过程是无穷尽的，无穷只是潜在的，是就发展说的. 他们不承认已经完成的、客观存在着的无穷整体，例如集合论里的各种超穷集合. 康托集合论肯定了作为完成整体的实无穷，从而遭到了一些数学家和哲学家的批评与攻击，特别是克罗内克. 正是由于康托的创造性工作与传统的数学观念发生了尖锐冲突，才遭到一些人的反对、攻击甚至谩骂. 有人说，康托的集合论是一种“疾病”，康托的概念是“雾中之雾”，甚至说康托是“疯子”. 来自数学权威们的巨大精神压力终于摧垮了康托，使他心力交瘁，患了精神分裂症，被送进精神病医院. 他在集合论方面许多非常出色的成果，都是在精神病发作的间歇时期获得的.

真金不怕火炼，康托的思想终于大放光彩. 1897 年举行的第一次国际数学家会议上，他的成就得到承认，伟大的哲学家、数学家罗素称赞康托的工作“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工

作”. 可是这时康托仍然神志恍惚，不能从人们的崇敬中得到安慰和喜悦. 1918 年 1 月 6 日，康托在一家精神病院去世.

1.2 实数集与复数集

数的概念在中学数学中是一个重点，它不仅为以后的学习打下坚实的基础，而且从数的扩充中，我们可以学到数学的思维方法. 下面我们就来详细介绍实数集和复数集.

1.2.1 实数集与复数集的概念

在中学的数学课程中，大家对实数集和复数集已经有所了解，下面我们简要回顾它们的基本概念.

1. 实数集的概念

数的概念是从实践中产生和发展起来的. 早在原始社会初期，人们在狩猎、采集果实等劳动中，由于计数的需求，就产生了 1,2,3,4 等数的概念以及表示“没有”的数 0，也就是我们现在说的自然数，自然数的全体构成自然数集，常用 **N** 来表示. 随着生产和科学的发展，人们为了解决测量、分配中遇到的将某些量进行等分的问题，引进了分数. 之后，为了表示各种具有相反意义的量以及满足计数的需求，又引进了负数.

我们把整数和分数统称为有理数，有理数的全体称为有理数集，常用 Q 来表示. 任何一个有理数都可以写成有限小数(整数可看作是小数点后面是 0 的小数)或者循环小数的形式.

例如，$3=3.0$，$-\frac{3}{5}=-0.6$，$-\frac{9}{11}=-0.\dot{8}\dot{1}$.

反过来，任何有限小数或循环小数也都是有理数.

那么是不是所有的数都可以写成有限小数或循环小数的形式呢？不是的，例如：

$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$，$\sqrt[3]{2}=1.2599210\cdots$，$\pi=3.14159265\cdots$.

这些小数的小数位数是无限的，而且是不循环的，这样的小数我们叫做无限不循环小数，又叫做无理数. 无理数的小数位数是无限多的.

无理数可分为正无理数和负无理数. 例如 $\sqrt{2}$，$\sqrt[5]{3}$，π，…是正无理数；$-\sqrt{2}$，$-\sqrt[5]{3}$，$-\pi$，…是负无理数.

有理数和无理数统称实数，实数集的全体称为实数集，常用 **R** 来表示.

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{matrix}\text{正有理数}\\\text{零}\\\text{负有理数}\end{matrix}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\[2ex]\text{无理数}\left\{\begin{matrix}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{matrix}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

实数还可按大小分类如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\\text{零}\\\text{负实数}\end{cases}$$

如果 a 表示一个正实数，$-a$ 就表示一个负实数. a 与 $-a$ 互为相反数，另外规定：0 的相反数