职工高中自学辅导丛书

SHUXUE

数学

（上册）

上海文化出版社

·职工高中自学辅导丛书·

数 学 （上册）

《职工高中自学辅导丛书》编写组编

上海文化出版社

责任编辑：吴 欢
封面设计：陈达林

职工高中自学辅导丛书 数 学（上册）	《职工高中自学辅导丛书》 编 写 组 编

上海文化出版社出版 上海绍兴路74号
新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张9.75 字数213,000
1985年2月第1版 1985年2月第1次印刷 印数1—115,500册

书 号：7077·3047 定 价：0.98元

编 者 的 话

为了帮助职工自学高中课程学习，我们编写了一套《职工高中自学辅导丛书》．这套丛书包括数学、物理、化学、政治、语文、历史、地理等七门学科．

这套丛书是按职工高中的基本内容和教学要求编写的．它的特点是由浅入深、突出重点；循序渐进、加强训练．旨在帮助职工学员通过自学，掌握和巩固各学科的基础知识和基本技能，有助于参加高中毕业考试或成人高校入学考试．

这套丛书的数学自学读本分上、下两册．其内容及要求基本和《职工业余中等学校高中数学课本》（上海教育出版社出版，1983 年 6 月第 1 版）一致．为了便于读者自学，我们对较难理解的概念作了深入浅出的说明；对较烦的运算增补了浅显的思考练习；对教学重点进行了详尽的讨论，而且从读者的"可接受"性出发，循序渐进地加强练习，安排了"自我检查题"．总之，我们按成人自学的特点安排了自学内容．本书要求具体，进度合理，既是读者自学的好教材，也是学员查阅的数学手册和升学、毕业考试的复习资料．同时它又可供职工高中数学教师作教材教法的参考．

本书计分两章，第一章由王抒编写，第二章由应畏之、金才华编写，最后由王抒加以统一、整理，谢培同志审读，赵宪初、赵继彬同志审稿．

编写自学读本，我们刚刚尝试，书中不足之处，以至缺点、错误都在所难免，恳切期望读者批评指正！

编　者

一九八四年八月

目　　录

第一章 函 数

通过这一章的学习，我们要达到以下的要求：

1．了解集合、子集、交集、并集、补集等概念．

2．理解函数的概念，掌握二次函数的性质和图象．

3．理解一元一次不等式组及一元二次不等式的概念，掌握一元一次不等式组的解法，会解简单的一元二次不等式．

4．理解指数、对数的概念和性质．

5．掌握幂函数、指数函数、对数函数及其性质和图象．

6．能够解简单的指数方程和对数方程．

一 集 合

集合这个概念是近代数学发展的产物，从康托(G. Cantor 1845～1918)提出集合至今仅有一百年，但它在数学发展中产生的影响却是十分重要的．现代的初等数学教学内容中都渗透了集合的思想，它也是职工高中文科、理科数学中的重要基本概念．现在我们按照教学大纲的要求，来学习集合的初步知识．

1.1 集合

某些确定对象的全体叫做**集合**(简称**集**)，集合里的各个对象叫做集合的**元素**.

例如：数：2、4、6、8、10 可以组成一个集合，2、4、6、8、10 是这个集合的五个元素；考场内所有的考生可以组成一个集合，每一个考生是这个集合的一个元素；所有的一元二次方程可以组成一个集合，任何一个一元二次方程都是这个集合的元素等等.

我们常用大写字母 A、B、C、… 等表示集合，小写字母 a、b、c、… 等表示集合的元素．我们还用符号"$\in$"与"$\notin$"来表示集合与元素间的关系．如"$a\in A$"表示 a 是集合 A 的元素，读作"a 属于 A"；"$a\notin B$"表示 a 不是集合 B 的元素，读作"a 不属于 B".

对于一个具体的集合，常用的表示法是**列举法**和**描述法**.

把集合的元素一一列举出来，写在大括号"{ }"内，表示集合的方法叫做列举法.

例如，由数 2、4、6、8、10 组成的集合，可以表示为：

{2、4、6、8、10}.

又如，自然数的集合，可以表示为：

$$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}.$$

把集合中元素的共同特性(属性或规律)描述出来，写在大括号内表示集合的方法叫做描述法.

例如，由数 2、4、6、8、10 组成的集合，可以表示为：

{不大于 10 的正偶数}

或 {x|x 为小于或等于 10 的正偶数}.

又如，考场内所有的考生组成的集合，可以表示为：

{考场内的考生}.

习惯上，我们规定用 $\boldsymbol{N}$ 表示自然数的集合，$\boldsymbol{J}$ 表示整数的集合，$\boldsymbol{Q}$ 表示有理数的集合，$\boldsymbol{R}$ 表示实数的集合，$\boldsymbol{R}^{+}$ 表示正实数的集合，$\boldsymbol{R}^{-}$ 表示负实数的集合.

为了正确理解集合的概念，我们再来看看康托对集合概念的描述①："把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来考虑时，这个整体叫做集合，简称集."显然，这里说的"事物"就是集合的元素. 尽管集合是个不定义的概念，在康托的描述中，仍然有三点是十分明确的：

(一)元素的确定性.

所谓"确定的"，是指每一事物(或对象)对于一个给定的集合来说，是可以判断它或属于这个集合，或不属于这个集合. 不可能是模棱两可的.

例如：

班级中所有身高在 1.70 米以上的学生.

这是一个由班级中身高在 1.70 米以上学生全体所组成的一个集合. 因为对班级中每一个学生来说，是有一个确定的身高的，这就能判断哪些学生是属于身高 1.70 米以上学生的集合，哪些则不属于这个集合. 倘若我们改成如下的情形："班级中身材高大学生的全体."这样的描述就不是一个集合. 因为对于"身材高大"来说，是没有确定标准的，那么也就无法判断有哪些学生是属于这个集合的了.

一般地，我们把这个特性称作集合中元素的确定性.

(二)元素的互异性.

所谓"彼此不同"，是指集合中相同的事物(或对象)不能看作是二个元素.

---

① 集合是数学中的原始概念，即不定义的概念. 所以我们只能描述它的含义.

例如：

36 的质因数.

这是一个由元素 2 和 3 组成的集合. 虽然 36 可以分解为 $2\times2\times3\times3$. 即有二个 2 和二个 3 的质因数，但是作为组成集合的元素，我们规定只是一个 2 和一个 3 这两个元素.

一般地，我们把这个特性称作集合中元素的互异性.

（三）集合中元素的无序性.

从康托描述集合的要求以及集合的列举表示法都可以看出，不同的事物（或对象）在集合元素中的排列是没有顺序要求的. 也就是说，{2、4、6、8、10} 和 {2、4、6、10、8} 以及 {10、8、6、4、2} 等等都表示同一个集合.

对给定的集合，有些适宜用列举法表示；有些适宜用描述法表示. 在选用集合的表示方法时，要根据集合的特性来考虑.

例如：

数：2、4、6、8、10 组成的集合，可以用列举法表示：

{2、4、6、8、10}

也可以用描述法表示：

{不大于 10 的正偶数}

或 $\{x|x$ 为不大于 10 的正偶数$\}$

这里符号“|”是竖线，也可以用冒号“:”表示，即

$\{x$: x 为不大于 10 的正偶数$\}$.

这里竖线（或冒号）前的 x 是代表集合中的元素，称“代表元素”. 竖线（或冒号）后的部分是用来描述代表元素的特征的. 而这种描述的方法除了文字说明外，也常用数学符号. 即

$$\{x|x=2n, \text{且 } 1\leqslant n\leqslant 5,\ n\in N\}$$

或 $$\{2x|x=1, 2, 3, 4, 5\}.$$

就是用文字描述，也有不同的方式. 即

$$\{x \mid 大于 1 而小于 11 的偶数\}.$$

从上面的分析可以看出，一个集合的表示方法是可以有多种形式的，一般地说，列举法的优点是直观性强，用列举法表示的集合，一眼就能看出集合中的各个元素，给人以清晰的印象，但是当集合中的元素很多时，用列举法表示就显得麻烦、累赘，当集合中的元素是无限多个时，列举法就无能为力了. 这时，用描述法来表示是比较恰当的. 因此，我们说有些集合可以用列举法或描述法分别来表示，而有些集合只适宜用其中的一种方法表示.

例如：

集合$\{-2, 0, 136, 0.26\}$，它不适宜用描述法表示；

集合$\{x \mid -1<x<2, x\in R\}$，它不适宜用列举法表示. 因此，我们在用列举法或描述法表示集合的时候，要根据具体的集合，选用适宜的方法来表示.

思考与练习一

1．下面给出的集合是不是同一集合？为什么？

(1) 字母 a、b、c、d 组成的集合.

(2) 字母 b、a、d、c 组成的集合.

(3) 字母 a、b、b、c、c、c、d 组成的集合.

2．试问：以下各条是否可以说组成一个集合？

(1) 相当大的正整数全体.

(2) $|x|>1$ 的实数全体.

(3) 正方形的全体.

(4) 数轴上 1 与 2 之间的点的全体.

(5) $\sqrt{2}$ 的近似值的全体.

3．试用列举法写出下列对象所组成的集合：

(1) 100 以下的 9 的倍数所组成的集合．

(2) 比 15 小的质数所组成的集合．

(3) 小于 15 的正奇数．

(4) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的解组成的集合．

4．试用列举法表示下列集合：

(1) $\{x|x^2=1\}$．

(2) $\{x|-3<x<4, x\in J\}$．

(3) $\left\{x\middle|x=\dfrac{p}{q}, p+q=5, p、q\in N\right\}$．

(4) {18 的正约数}．

(5) $\{x|x\in N$, x 既非质数也非合数$\}$．

(6) $\{x|x$ 既是偶数又是质数$\}$．

5．用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1) 0____N；$\dfrac{1}{2}$____J；-3____Q，$\sqrt{2}$____R．

(2) 如果 $a、b\in N$ 且 $a<b$，那么 $a+b$____N，$a-b$____N．

1.2　集合的种类

我们通常按照集合中元素的个数将集合分成下面几种：

(一)有限集

由有限多个元素组成的集合叫做有限集．

例如：

{某学校的教师}．

$\{x|1\leqslant x\leqslant 50, x\in N\}$

等等．对于只含有一个元素的集合，叫做**单元素集合**．例如 $\{a\}$，$\{1\}$，$\{0\}$等等．不含有任何元素的集合，叫做**空集合**(简

称空集)．用符号“ϕ”(读作空集)表示．例如{内角和等于 200° 的三角形}，$\{x \mid x^2+1=0,\ x\in R\}$等都是空集．

(二)无限集

由无限多个元素组成的集合叫做无限集．

例如：

$\{x \mid x-2>1,\ x\in R\}$．

{直线上的点}

等等．

思考与练习二

1．指出下列各集合中的有限集和无限集．

(1) $\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 50,\ x\in Q\}$．

(2) $\{x \mid x\geqslant 1,\ x\in N\}$．

(3) $\{x \mid x-2<1,\ x\in N\}$．

(4) $\{x \mid x-2<1,\ x\in J\}$．

2．试问：下列各题哪些正确，哪些错误，为什么？

(1) $\{0\}=\phi$．

(2) $0\neq\phi$．

(3) $0\in\phi$．

(4) $0\notin\phi$．

1.3 集合间的包含关系

前面我们已经研究了集合与元素间的关系，下面我们要讨论集合与集合之间的关系．

(一)子集

对于两个集合 A 和 B，如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，那么，集合 B 就叫做集合 A 的一个子集．

记作

$$B \subseteq A \quad 或 \quad A \supseteq B$$

读作"B 包含于 A"或"A 包含 B". 这里的符号"$\subseteq$"和"$\supseteq$"是用在集合之间表示包含关系的. 初学集合的时候，要注意符号"$\subseteq$"与"$\supseteq$"不能写错.

为了加深理解，我们先看下面的例子：

设数 1、2、3、4 组成的集合为 A，数 1、2、3 组成的集合为 B，数 1、2 组成的集合为 C. 容易看出集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素. 集合 C 中的任何一个元素都是集合 B 的元素. 并且，集合 C 中的任何一个元素也都是集合 A 的元素. 即：

$$B \subseteq A, \ C \subseteq B \quad 以及 \quad C \subseteq A.$$

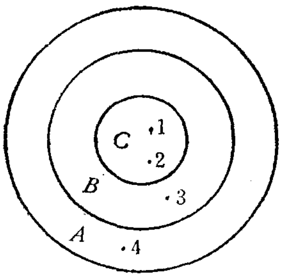

图1.1

容易看出，如果 $A \supseteq B$, $B \supseteq C$，那么 $A \supseteq C$.

为了直观地表示集合间的这种包含关系，通常用简单的示意图(图 1.1)来表示. 从示意图中也可以看出上面的包含关系.

关于子集的概念，在学习中还要注意下列两种特殊情况：

(1) 对于任何一个集合 A，因为它的每一个元素都是集合 A 的元素，即 $A \subseteq A$. 也就是说，任何一个集合是它本身的子集.

(2) 我们规定，空集是任何集合的子集.

(二)集合的相等

对于两个集合 A 和 B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，那么，集合 A 和集合 B 叫做相等. 记作

$$A=B \quad 或 \quad B=A,$$

读作"集合 A 等于集合 B"或"集合 B 等于集合 A". 这里的符号"="是借用了数学中的等号，它表示两个集合中的元素完全相同(即两个集合中的元素个数相等且相应的元素都相同).

这样，上面例子中指出的"数 1、2、3、4 组成的集合 A"就可以记作 $A=\{1, 2, 3, 4\}$; "数 1、2、3 组成的集合 B"就可以记作 $B=\{1, 2, 3\}$等等.

如果有 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $D=\{4, 3, 2, 1\}$. 那么，从 $A\subseteq D$ 和 $D\subseteq A$ 可以得到 $A=D$.

如果有 $A=\{1,2\}$, $B=\{x\mid(x-1)(x-2)=0, x\in R\}$. 虽然集合 B 是用描述法表示的，但它也是由数 1、2 组成的集合，因此也就是 $A=B$.

(三)真子集

对于两个集合 A 和 B, 如果 B 是 A 的子集，并且 A 中至少有一个元素不属于 B, 那么集合 B 就叫做集合 A 的真子集. 记作

$$B\subset A \quad 或 \quad A\supset B.$$

读作"B 真包含于 A"或"A 真包含 B".

例如: $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$, 那么, $A\supset B$(或 $B\subset A$).

对于空集 ϕ 来说，它是任何非空集合 A 的真子集. 记作 $\phi\subset A$(或 $A\supset\phi$).

对于集合 N、J、Q、R, 它们间的关系可以表示为:

$$N\subset J\subset Q\subset R.$$

［例 1］ 试在下列集合之间，选出具有包含关系的集合，并将其包含关系用记号 $\subset$ 或 $\supset$ 表示.