高中

综合练习丛书

GAOZHONG ZONGHE LIANXI CONGSHU

数学

SHUXUE

（理工农医类用）

·人教修订版·

人民教育出版社

高中综合练习丛书

数　　学

（理工农医类用）

人民教育出版社数学室编

人民教育出版社

(京)新登字113号

高中综合练习丛书
数　学
(理工农医类)
人民教育出版社数学室 编
*
人民教育出版社出版发行
新华书店总店科技发行所经销
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/16　印张 24.5　字数 540,000
1992年11月第2版　1993年5月第7次印刷
印数　727001—857,000
ISBN 7-107-10824-7
G·2297　定价9.10元

修订版说明

为了帮助高中学生全面系统地掌握中学课程，人民教育出版社根据国家教委颁布的现行中学教学大纲和我社新修订的现行中学教材编写了一套高中综合练习丛书．包括政治、语文、数学(理工农医类用、文史类用)、物理、化学、生物、历史(文科、理科)、地理、英语、俄语、日语等11个学科，共计13册．

丛书作者主要是现行教材的编写者和具有丰富的指导高中总复习经验的教师．在编写过程中，作者注意一方面严格按照教学大纲的要求，准确地针对教学中的重点、难点予以说明和分析，并指出具体要求；另一方面针对学生在学习过程中容易出现的一些问题进行剖析和释疑，并给予有效的指导，使学生在运用知识的过程中提高能力．

这套高中综合练习丛书一出版，即受到广大师生的热烈欢迎．根据两年来高中教学的变化及读者提出的意见，这次作者对丛书进行了全面的修订，修订后的丛书将更便于学生使用，其突出的特点是主次分明、详略得当、提纲挈领，使之成为既有利于教师教学，又便于学生自学的教学用书．

这套高中综合练习丛书的《数学》(理工农医类用)分两大部分．第一部分是单元综合复习，按照高等学校招生全国统一考试《数学科说明》和现行《全日制中学数学教学大纲》高中阶段内容分为十三章．每一章包括“基本知识概要”、“复习要求”、“例题选析”、“练习题”、“检查题”五项．章后附有该章练习题和检查题的答案和提示．

本次修订主要是为了加强基本训练，扩大复习的覆盖面，适应当前标准化考试改革的需要．本书中增加了相当多的选择题和填空题等客观性题型，其中选择题特别注意分析和说明，给出解题思路，说明解答选择题的方法和技巧．第二部分是测验题，包括代数、三角、立体几何、平面解析几何的测验题，共11份，另有综合测验题4份，供高考前的模拟练习用．书末附有1991年和1992年全国普通高等学校统一招生考试数学试题以及1992年湖南、云南、海南三省全国普通高等学校统一招生考试数学试题，并附有标准答案．

参加本书编写工作的有袁明德、曾宪源、于琛、方明一、薛彬、蔡上鹤、饶汉昌、康合太、李慧君、颜其鹏、高存明．由吕学礼、方明一任主编．责任编辑是李慧君、薛彬．

人民教育出版社

1992年11月

目　录

第一部分
单元综合复习

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

【基本知识概要】

一、集合

1. 集合的基本概念

(1) 把一些确定的对象看成一个整体就形成了一个集合．集合里的各个对象叫做集合的元素．a 是集合 A 的元素表示成 $a\in A$，a 不是集合 A 的元素表示成 $a\notin A$.

(2) 集合的特性：对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的、互异的，是无排列顺序的．

(3) 集合可分为有限集、无限集，此外还有空集(记作$\varnothing$)．

(4) 集合的表示法：列举法、描述法以及图示法．

(5) 常见数集：N(自然数集)，Z(整数集)，Q(有理数集)，R(实数集)，C(复数集)．此外，习惯上还使用符号 Q^+(表示正有理数集)、R^-(表示负实数集)，等等．

2. 集合与集合的关系

(1) 子集：对于两个集合 A 与 B，如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，那么集合 B 叫做集合 A 的子集，记作 $B\subseteq A$(或 $A\supseteq B$)．

对于任一集合 A，规定$\varnothing\subseteq A$.

真子集：如果 B 是 A 的子集，并且 A 中至少有一个元素不属于 B，那么集合 B 叫做集合 A 的真子集，记作 $B\subset A$(或 $A\supset B$)．

集合相等：如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，那么 $A=B$.

(2) 交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A,B 的交集，记作 $A\cap B$.

(3) 并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A,B 的并集，记作 $A\cup B$.

(4) 补集

全集：在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合叫做全集，用符合 I 表示.

补集：已知全集 I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的补集，记作 $\overline{A}$.

二、函数的基本知识

1. 函数的有关概念

（1）函数的定义：如果在某变化过程中有两个变量 x,y，并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数，x 叫做自变量. y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.（也可从映射概念出发，给出函数定义.）

自变量 x 的取值范围叫做函数的定义域，和 x 的值对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域.

（2）函数的表示法：解析法、列表法、图象法.

2. 函数的性质

（1）函数的单调性：在一个区间上，如果对于自变量 x 的任意两个值 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 在此区间上是增函数；如果对于自变量 x 的任意两个值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 在此区间上是减函数. 如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数，就说 $f(x)$ 在此区间上具有单调性.

（2）函数的奇偶性：如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 是奇函数；如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 是偶函数.

奇函数图象关于原点对称；偶函数图象关于 y 轴对称.

3. 反函数的概念

如果对于函数 $y=f(x)$ 的每一个确定的值 $f(x_0)=y_0$，自变量 x 都有唯一确定的值 x_0 和 y 对应，那么，就可以得到一个以 y 为自变量，以对应的 x 值为函数值的函数，这个函数叫做原来函数的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$. 反函数的定义域和值域分别是原函数的值域和定义域.

$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

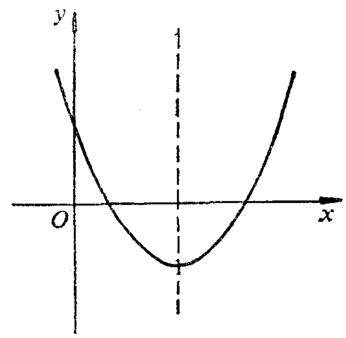
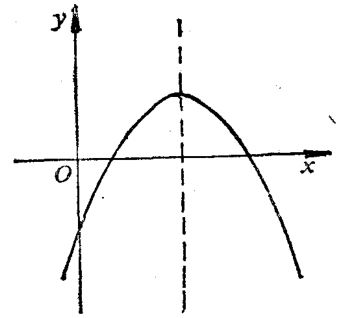
三、几种常见函数

1. 二次函数

函数式：$y=ax^2+bx+c$（a,b,c 是常数，$a\neq 0$）.

定义域：R.

图象与性质如下表.

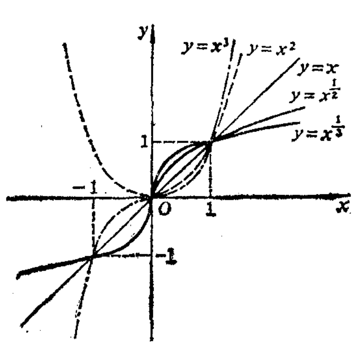
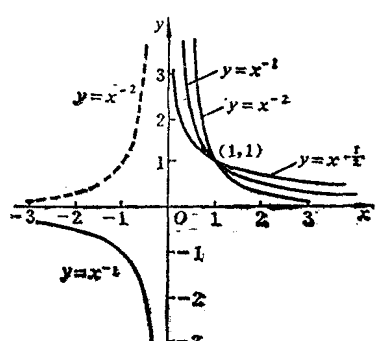
<table>
<tr><td></td><td>$a>0$</td><td>$a<0$</td></tr>
<tr><td>图
象</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>图象开口方向</td><td>开口向上</td><td>开口向下</td></tr>
<tr><td>顶点坐标</td><td colspan="2">$\left(-\frac{b}{2a},\quad \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$</td></tr>
<tr><td>对 称 性</td><td colspan="2">关于直线$x=-\frac{b}{2a}$对称</td></tr>
<tr><td>单 调 性</td><td>当$x<-\frac{b}{2a}$时，是减函数；
当$x>-\frac{b}{2a}$时，是增函数.</td><td>当$x<-\frac{b}{2a}$时，是增函数；
当$x>-\frac{b}{2a}$时，是减函数.</td></tr>
</table>

2. 幂函数

(1) 函数式：$y=x^n$(n是常数，$n\in Q$).

(2) 定义域：是使x^n有意义的所有实数(随n不同，定义域也不同).

(3) 几个常见的幂函数的图象.

<table>
<tr><td>$n>0$</td><td>$n<0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

(4) 性质

(i) 当$n>0$时，图象过点(1,1)和(0,0)，在区间$(0,+\infty)$内是增函数.

(ii) 当 $n<0$ 时，图象过点 $(1,1)$，在区间 $(0,+\infty)$ 内是减函数，且图象向上与 y 轴无限靠近，向右与 x 轴无限靠近.

3. 指数函数和对数函数

(1) 对数的概念与性质

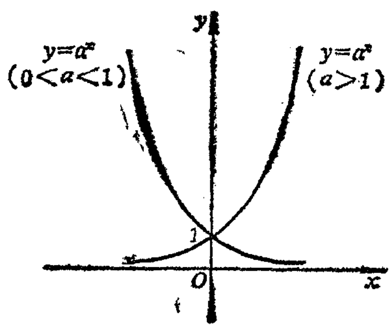
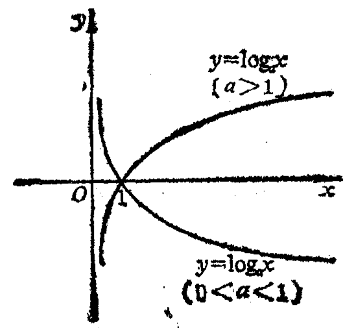
(i) 定义：当 $a>0, a\neq 1$ 时，如果 $a^b=N$，那么，$\log_a N=b$.

(ii) 运算：$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

$$\log_a M^n=n\log_a M;\ \log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M.$$

(iii) 换底公式：$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

(2) 指数函数和对数函数

		指数函数	对数函数
函数式		$y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$	$y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$
定义域		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$
图象			
性质	1	$y>0$（图象在 x 轴上方）	$x>0$（图象在 y 轴右方）
	2	$a^0=1$（图象过点 $(0,1)$）	$\log_a 1=0$（图象过点 $(1,0)$）
	3	$a>1$ 时，$a^x\begin{cases}>1\ (x>0)\\=1\ (x=0)\\<1\ (x<0)\end{cases}$ $0<a<1$ 时，$a^x\begin{cases}<1\ (x>0)\\=1\ (x=0)\\>1\ (x<0)\end{cases}$	$a>1$ 时，$\log_a x\begin{cases}>0\ (x>1)\\=0\ (x=1)\\<0\ (x<1)\end{cases}$ $0<a<1$ 时，$\log_a x\begin{cases}<0\ (x>1)\\=0\ (x=1)\\>0\ (x<1)\end{cases}$
	4	$a>1$ 时，a^x 是增函数； $0<a<1$ 时，a^x 是减函数.	$a>1$ 时，$\log_a x$ 是增函数； $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是减函数.

4. 指数方程和对数方程

（1）指数方程的常用解法:

(i) $a^{f(x)}=a^{g(x)}$型的可化成 $f(x)=g(x)$.

(ii) $a^{f(x)}=b^{g(x)}$型的可化成$\lg a\cdot f(x)=\lg b\cdot g(x)$.

(iii) $f(a^x)=0$ 型的先求出 a^x,再解.

（2）对数方程的常用解法:

(i) $\log_a f(x)=b$ 型的可化成 $f(x)=a^b$.

(ii) $\log_a f(x)=\log_a g(x)$型的可化成 $f(x)=g(x)$.

(iii) $f(\log_a x)=b$ 型的先求出$\log_a x$,再解.

(iv) 对数式的底数中含有未知数的方程,根据情况，可先利用对数定义或换底公式进行变形,再解.

【复习要求】

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念. 了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义,能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合.

2. 了解映射的概念,在此基础上理解函数及其有关的概念，掌握互为反函数的函数图象间的关系.

3. 理解函数的单调性和奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.

4. 掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质，并会解简单的指数方程和对数方程.

【例题选析】

例1 选择题.(下面各小题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论,其中有且只有一个是正确的,把你认为正确的结论的代号写在题中的圆括号内)❶

（1）设 $A=\{x|x\leqslant\sqrt{18}\}$，$a=\sqrt{15}$，那么(　　)

(A) $a\subset A$.　　(B) $a\notin A$.　　(C) $\{a\}\in A$.　　(D) $\{a\}\subset A$.

分析: A是集合,a 是元素,二者关系应是属于与否的关系. $\{a\}$是集合,$\{a\}$与A是包含与否的关系. 据此,(A),(C) 显然不对. 而$\sqrt{15}<\sqrt{18}$，所以 a 是A 的一个元素. $\{a\}$就是A 的一个子集,因此,应选(D).

答: D.

(2) 设P是所有平行四边形的集合,R是所有矩形的集合，L是所有菱形的集合,S是所有正方形的集合,那么(　　)

---

❶ 本书的选择题均同此,后面不再说明.

(A) $P\cap L=S$. (B) $R\cup L=P$.

(C) $(R\cup S)\cup L\subset P$. (D) $L\cup S\subset R$.

分析：$R\cup S=R$，$(R\cup S)\cup L=R\cup L$，因此，$R\cup L\subset P$，应选(C)．而$P\cap L=L\neq S$；$R\cup L\neq P$；$L\cup S=L\not\subset R$.

答：C.

(3) 与函数 $y=2x^2+1$ 不相同的函数是(　　)

(A) $y=|x^2|+|x^2+1|$。 (B) $y=\sqrt{(2x^2+1)^2}$

(C) $y=|2x^2+1|$. (D) $y=\dfrac{(2x^2+1)(x+1)}{x+1}$.

分析：两个函数相同，应具备两个条件，一是函数表达式相等，二是定义域相同．由(A)，因为 $x^2\geqslant 0, x^2+1>0$，$2x^2+1>0$，所以有 $y=|x^2|+|x^2+1|=x^2+x^2+1=2x^2+1$；由(C)，有 $y=|2x^2+1|=2x^2+1$；由(B)，有 $y=\sqrt{(2x^2+1)^2}=2x^2+1$；而由(D)，只有当 $x\neq -1$ 时，才有 $y=2x^2+1$．换句话说，(D) 与 $y=2x^2+1$ 比较，定义域不同，在除 $x=-1$ 点之外的表达式相等.

答：D.

(4) 设 $A=\{x|x\geqslant -1\}$，$B=\{x|x\leqslant 1\}$，$C=\left\{x|x\geqslant \dfrac{1}{3}\right\}$，$D=\left\{x|x\leqslant -\dfrac{1}{3}\right\}$，则函数 $f(x)=\arcsin(3x+2)$ 的定义域是(　　)

(A) $A\cup D$. (B) $A\cap D$. (C) $B\cup C$. (D) $B\cap C$.

分析：由 $f(x)=\arcsin x$ 的定义域是$[-1,1]$，可知本题的定义域应是$-1\leqslant 3x+2\leqslant 1$，解得 $-1\leqslant x\leqslant -\dfrac{1}{3}$，这也就是$\{x|x\geqslant -1\}\cap\left\{x|x\leqslant -\dfrac{1}{3}\right\}$，即$A\cap D$，因此，本题应选(B).

答：B.

(5) 无论 n 取什么值，直线 $y=(n-1)x-(5n-4)$ 一定通过点(　　)

(A) $(5,-1)$. (B) $(-5,-1)$. (C) $(5,1)$. (D) $(-5,1)$.

分析：直接将所给点的坐标代入已知函数的解析式中即可.

答：A.

(6) 函数 $y=\log_2 x+1$ 的反函数是(　　)

(A) $y=(0.5)^{x-1}$. (B) $y=(0.5)^{1-x}$.

(C) $y=2^x-1$. (D) $y=2^x+1$.

分析：由已知条件可得，$\log_2 x=y-1, x=2^{y-1}$，$x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-y}$，$x=(0.5)^{1-y}$，即，所求反函数应是 $y=(0.5)^{1-x}$.

答：B.

(7) 在区间$[-1,1]$上为减函数的是(　　)

(A) $y=\dfrac{5}{x}$. (B) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$. (C) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$. (D) $y=\dfrac{x-2}{x+2}$.

分析：(A)的定义域不含 $x=0$；(B)的定义域不含 $x=-1$．(C)可以化成 $y=1+\frac{4}{x-2}$，其图象可由函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象沿 x 轴正方向平移 2 个单位，再沿 y 轴正方向平移 1 个单位得到，由此可知，(C)在区间 $[-1,1]$ 上为减函数．

答： C．

注意 如果判断(D)，可以与(C)类似地考虑，先化成 $y=1-\frac{4}{x+2}$，其图象可由函数 $y=-\frac{4}{x}$ 的图象平移得到，对本题来说，$y=-\frac{4}{x}$ 在任何区间内都不是减函数，可以否定它．

(8) 与函数 $y=x^2-\cos x$ 奇偶性相同的函数是(　　)

(A) $y=2\operatorname{tg}x+\sin 2x$．　　(B) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$．

(C) $y=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$．　　(D) $y=\sin x+\cos x$．

分析：由 $x^2-\cos x=(-x)^2-\cos(-x)$，可知 $y=x^2-\cos x$ 是偶函数．而(A)，(B)都是奇函数，(C)则是偶函数．至于(D)，它是非奇非偶的函数．

答： C．

(9) 设 3 个互不相等的实数 a,b,c 有如下的关系：$a=c^2+1$，$b=2c^2-4c+5$．这 3 个实数的大小关系是(　　)

(A) $b>a>c$．　(B) $c>b>a$．　(C) $b>c>a$．　(D) $a>b>c$．

分析：由 $c^2-c+1>0$，得 $c^2+1>c$，而已知 $a=c^2+1$，所以 $a>c$．由已知可以推得，$b-a=c^2-4c+4=(c-2)^2\geqslant 0$，而已知 $b\neq a$，所以 $b>a$．因此，$b>a>c$．

答： A．

(10) 设 $5^x=1.5$，$(0.5)^y=0.75$，那么，x,y 满足(　　)

(A) $x>0,y>0$．　　(B) $x<0,y<0$．

(C) $x>0,y<0$．　　(D) $x<0,y>0$．

分析：由 $5^x=1.5$，$5>1$，$1.5>1$，可得 $x>0$．由 $(0.5)^y=0.75$，$0<0.5<1$，$0.75<1$，可得 $y>0$．因此，$x>0,y>0$．

答： A．

注意 (i) 本题中应用了指数函数 $y=a^x$ 如下的性质：当 $a>1$ 时，$x>0\Longleftrightarrow y>1$，$x<0\Longleftrightarrow 0<y<1$；当 $0<a<1$ 时，$x>0\Longleftrightarrow 0<y<1$，$x<0\Longleftrightarrow y>1$．

(ii) 本题也可利用对数求解，先变形，得 $x=\log_5 1.5$，$y=\log_{0.5}0.75$，进而确定 x,y．

(iii) 解题中作出函数的示意图，有时很有帮助．

(11) 设 $y=\lg(\cos x-1)^2$，那么，y 等于(　　)

(A) $[\lg(\cos x-1)]^2$．　　(B) $4\lg\left|\sin\frac{x}{2}\right|+2\lg 2$．

(C) $2\lg(\cos x-1)$．　　(D) $2\lg(1+\cos x)$．

分析：$\lg(\cos x-1)^2=\lg\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2=2\lg\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)=2\left(\lg 2+2\lg\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)$

$$=4\lg\left|\sin\frac{x}{2}\right|+2\lg 2.$$

答：B.

(12) 设$(32.5)^x=100$，$(0.0325)^y=100$，那么，$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$的值是(　　)

(A) 1.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{2}{3}$.　　(D) $\frac{3}{2}$.

分析：由$(32.5)^x=100$，得$x=\log_{32.5}100=\frac{\lg 100}{\lg 32.5}=\frac{2}{\lg 32.5}$，所以，$\frac{1}{x}=\frac{\lg 32.5}{2}$. 由$(0.0325)^y=100$，得 $y=\log_{0.0325}100=\frac{\lg 100}{\lg 0.0325}=\frac{2}{\lg 0.0325}$，　所以 $\frac{1}{y}=\frac{\lg 0.0325}{2}=\frac{-3+\lg 32.5}{2}$. 因此，$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}(\lg 32.5+3-\lg 32.5)=\frac{3}{2}$.

答：D.

例2　填空题.

(1) 如果 y 是 x 的函数，$x=(t+1)^{\frac{1}{2}}$，$y=(t-1)^{\frac{1}{2}}$，其中 $t>1$，那么，y 与 x 的函数关系是____________.

分析：由 $x=(t+1)^{\frac{1}{2}}$，得$x^2=t+1$，由 $y=(t-1)^{\frac{1}{2}}$，得 $y^2=t-1$，所以，$y^2+1=x^2-1$，$y^2=x^2-2$，$y=\pm\sqrt{x^2-2}$. 由 $t>1$ 可得 $x=(t+1)^{\frac{1}{2}}>\sqrt{2}$，$y=(t-1)^{\frac{1}{2}}>0$，因此，所求函数关系是 $y=\sqrt{x^2-2}\ (x>\sqrt{2})$.

答：$y=\sqrt{x^2-2}\ (x>\sqrt{2})$.

注意　在求两个变量之间的函数关系时，一是要求出它们之间的对应法则，二是要求出定义域. 本题中，y 与 x 的关系是受中间变量 t 制约的，对应法则与定义域都要考虑到 t 在中间的作用.

(2) 函数 $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$的值域是__________.

分析：可以先考虑函数 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$，由于它是奇函数，不妨先看 $[0,+\infty)$ 区间，因为 $x^2+1\geqslant 2x\geqslant 0$，所以，$0\leqslant\frac{2x}{x^2+1}\leqslant 1$；类似地，在 $(-\infty,0]$ 区间，$-1\leqslant\frac{2x}{x^2+1}\leqslant 0$. 因此可得，$-1\leqslant\frac{2x}{x^2+1}\leqslant 1$. 进一步又可推得$-\frac{3}{2}\leqslant\frac{3x}{x^2+1}\leqslant\frac{3}{2}$.

答：$\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$.

注意　求一个函数的值域时，常用的一种方法是借助所求函数的反函数，其反函数的定义域就是原函数的值域. 对于本题来说，在$(-\infty,+\infty)$区间内不存在反函数，要分区间求，就比较困

难了.

(3) 三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 的图象关于原点对称的条件是________.

分析：一个函数的图象关于原点对称的条件是这个函数是奇函数. 由此推出，$f(-x)=-f(x)$，即 $-ax^3+bx^2-cx+d=-ax^3-bx^2-cx-d$，使上式对任意实数 x 都成立的条件是 $b=d=0$.

答：$b=d=0$.

(4) 比较 $(\lg 70)^2$ 与 $\lg 70^2$ 的大小，其结果是________.

分析：因为 $(\lg 70)^2-\lg 70^2=(\lg 70)^2-2\lg 70=\lg 70(\lg 70-2)$，而 $\lg 70>0$, $\lg 70<\lg 100$，即 $\lg 70<2$，所以 $(\lg 70)^2-\lg 70^2<0$.

答：$(\lg 70)^2<\lg 70^2$.

(5) 方程 $3^{2x+1}+3^{x+2}-3^x-3=0$ 的实数根的个数是________.

分析：设 $3^x=y$，原方程可化为 $3y^2+8y-3=0$，即 $(3y-1)(y+3)=0$，因为 $y>0$，所以原方程只有 1 个实数根.

答：1.

例 3 研究函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}(a>b)$ 的单调性.

分析：函数可变形为 $f(x)=1+\dfrac{a-b}{x+b}$. 因为 $a>b$，$a-b>0$，所以，可通过函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 来研究函数 $f(x)=1+\dfrac{a-b}{x+b}$ 的单调性. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，在 $(0,+\infty)$ 上也是减函数.

解：

$$f(x)=\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+b-b+a}{x+b}=1+\frac{a-b}{x+b},$$

$\because$ $a>b$,

$\therefore$ $a-b>0$.

$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-b)\cup(-b,+\infty)$.

在 $(-\infty,-b)$ 上，当 x 增加时，$x+b$ 也增加，随之，$\dfrac{1}{x+b}$ 减小，$\dfrac{a-b}{x+b}$ 也减小，相应地 $1+\dfrac{a-b}{x+b}$ 也减小. 所以，$f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ 在 $(-\infty,-b)$ 上是减函数.

同样，$f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ 在 $(-b,+\infty)$ 上是减函数.

注意 在研究一个函数的单调性时，往往可以利用中间变量，即如上例，如果随 x 的增加，$f(x)$ 增加，随 $f(x)$ 增加，$g(f(x))$ 也增加，那么就有，随 x 增加，$g(f(x))$ 增加，即 $g(f(x))$ 是增

函数.

例 4 已知 $y=f(x)$ 是函数 $y=(0.5)^x-1$ 的反函数，证明 $3f(x)\leqslant f(3x)$，并指出 x 为何值时等号成立.

分析：由已知条件知，$f(x)$ 是以 0.5 为底的对数函数，考虑到 $\log_{0.5}x$ 在定义域内是减函数，证明 $3f(x)\leqslant f(3x)$ 就可以化成比较相应的真数，即多项式的大小问题了.

证明： $\because$ $y=f(x)$ 是 $y=(0.5)^x-1$ 的反函数，

$\therefore$ $$(0.5)^x=y+1,$$

$\therefore$ $$f(x)=\log_{0.5}(x+1).$$

$$3f(x)=3\log_{0.5}(x+1)=\log_{0.5}(x+1)^3,$$

$$f(3x)=\log_{0.5}(3x+1).$$

$\because$ $$f(x)\text{的定义域是 } x>-1,$$

$\therefore$ $$x^2(x+3)\geqslant 0,$$

即 $$x^3+3x^2\geqslant 0,$$

$\therefore$ $$x^3+3x^2+3x+1\geqslant 3x+1,$$

即 $$(x+1)^3\geqslant 3x+1.$$

考虑到函数 $y=\log_{0.5}x$ 在定义域内是减函数，

$\therefore$ $$\log_{0.5}(x+1)^3\leqslant\log_{0.5}(3x+1),$$

即 $$3f(x)\leqslant f(3x).$$

由以上过程可知，

当 $x=0$ 时， $$3f(x)=f(3x).$$

注意 $f(x)$ 也可以表示成 $f(x)=\log_2\dfrac{1}{x+1}$，整个证明过程与上面类似.

例 5 当 x 为何值时，函数 $y=\lg\dfrac{x}{3}\lg\dfrac{x}{12}$ 有最小值？最小值是什么？

解： $y=\lg\dfrac{x}{3}\lg\dfrac{x}{12}=(\lg x-\lg 3)(\lg x-\lg 12)$

$$=(\lg x)^2-(\lg 3+\lg 12)\lg x+\lg 3\cdot\lg 12.$$

设 $\lg x=t$，得

$$y=t^2-(\lg 3+\lg 12)t+\lg 3\cdot\lg 12.$$

$\because$ $\lg x$ 可以取任意实数，

$\therefore$ 问题化成求二次函数的最小值问题.

当 $t=-\dfrac{-(\lg 3+\lg 12)}{2}=\dfrac{\lg 36}{2}=\lg 6$ 时，

$$y_{\text{最小值}}=\frac{4\lg 3\cdot\lg 12-(\lg 3+\lg 12)^2}{4}=\frac{-(\lg 12-\lg 3)^2}{4}$$

$$=\frac{-(\lg 4)^2}{4}=-(\lg 2)^2.$$

由 $t=\lg 6$，得

$$\lg x=\lg 6.$$

∴ 当 $x=6$ 时，

$$y_{最小值}=-(\lg 2)^2.$$

注意 很多求函数极值的问题都可以利用二次函数的最大值与最小值问题求解．本题还可直接通过配方求解，即将函数变形为

$$\begin{aligned}y&=(\lg x)^2-2\lg 6\cdot\lg x+\lg 3\cdot\lg 12\\&=(\lg x)^2-2\lg 6\cdot\lg x+(\lg 6)^2-(\lg 6)^2+\lg 3\cdot\lg 12\\&=(\lg x-\lg 6)^2-(\lg 2+\lg 3)^2+\lg 3(\lg 3+2\lg 2)\\&=(\lg x-\lg 6)^2-(\lg 2)^2.\end{aligned}$$

例 6 解下列方程：

(1) $2^{x+2}-3\times 2^{-x}+4=0$;

(2) $\log_4(2-x)=\log_2(x-1)-1$.

分析：(1) 因为 $2^{x+2}=4\times 2^x$，$2^{-x}=\frac{1}{2^x}$，所以方程可化成 $f(2^x)=0$ 的形式求解．

(2) 由对数性质可得 $\log_4(2-x)=\frac{\log_2(2-x)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(2-x)$，进而可将原方程化成 $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ 型，然后求解．

解：(1) 原方程可变形为

$$4\times 2^x-\frac{3}{2^x}+4=0,$$

$$4(2^x)^2+4\times 2^x-3=0,$$

$$(2\times 2^x+3)(2\times 2^x-1)=0,$$

$$2^x=-\frac{3}{2}(舍去),$$

$$2^x=\frac{1}{2},$$

∴ $$x=-1.$$

(2) 原方程可变形为

$$\frac{1}{2}\log_2(2-x)=\log_2(x-1)-\log_2 2,$$

$$\log_2(2-x)=2\log_2\frac{x-1}{2},$$

$$\log_2(2-x)=\log_2\frac{(x-1)^2}{4},$$

$$2-x=\frac{(x-1)^2}{4},$$

$$x^2+2x-7=0,$$