提升能力 突破中考 冲刺竞赛

新课标

九年级

数学竞赛通用教材

◆施 储 马茂年 主编

浙江大学出版社

★ 新课标数学竞赛通用教材　七年级

★ 新课标数学竞赛通用教材　八年级

★ 新课标数学竞赛通用教材　九年级

ISBN 7-308-04527-7

9 787308 045278 >

ISBN 7-308-04527-7/G · 986

定价：22.00 元

新课标数学竞赛通用教材

（九年级）

主　编　施　储　马茂年

编　委　（按姓氏笔画为序）

马茂年　方旭英　王姣慧　厉秀成
李彩虹　杜素贞　张志堂　张　吉
张宏政　陈永华　宋向阳　林健鸿
郑姬铭　杨宗平　周秋霞　赵　汀
施　储　徐萍燕　袁小容　翁海芳
章中东　童正平　程锡坤　谢丙秋

浙江大學出版社

前 言

为了满足新一轮基础教育课程改革强调对学生能力的培养，倡导发展学生的个性特长的需要，我们编写了这套《新课标数学竞赛通用教材》，包括七年级、八年级和九年级三个分册。

《新课标数学竞赛通用教材》就是为学生适应初中数学奥林匹克竞赛活动而编写的普及性辅助材料。其主要优点：一是“竞赛”，二是“同步”。所谓“竞赛”，是指内容的选取和处理方法上具有趣味性、启发性、技巧性和拓广性，并特别注重了创新能力的培养；所谓“同步”，主要是指内容选取的基础性以及安排上与教学进度基本一致，使用时可删减或选用部分内容，也可提前或错后讲解使用。

《新课标数学竞赛通用教材》博采众长，有的放矢，注重实效，值得学生和教师认真读，认真用，认真练。它像粒粒种子，植入百花争妍的竞赛辅导园地；它像股股清泉，滋养莘莘学子的求知心田；它又像把金钥匙，将开启学生智慧的闸门。创新是魂，这套丛书创新是我们的追求！只有新，才能吸引人；只有新，才有生命力。这套丛书全方位、多维度地展示了创新魅力。它强化了知识的含金量，把准中考和竞赛的脉搏；它具有长于思辨的理性色彩，流淌着人文关爱。正是凭着这样的魅力，激活和梳理着学生的思维，唤起并驱动着学生的创造意识！

考试和竞赛命题的核心是理解和驾驭知识的能力。近年来，加强理解和驾驭知识能力的考查，正是中考、竞赛命题展示给人们的一条清晰的思路，《新课标数学竞赛通用教材》则把这条思路具体化为一条清晰的复习训练思路，这样编写的指导思想是产生精品的保障。

《新课标数学竞赛通用教材》由浙江省数学特级教师、杭州市正教授级高级教师、杭州市教育局教研室副主任施储老师和杭州第十四中学特级教师、浙江师范大学数学教育硕士生导师、中国数学奥林匹克高级教练马茂年

老师主编。参加编写的教师还有(按姓氏笔画为序):方旭英(杭州第十三中学)、王姣慧(宁波镇海区蛟川书院)、厉秀成(金华东阳吴宁一中)、李彩虹(杭州富阳永兴中学)、杜素贞(金华东阳吴宁一中)、张志堂(杭州勇进中学)、张吉(台州黄岩区实验中学)、张宏政(舟山南海实验学校)、陈永华(杭州朝晖中学)、宋向阳(衢州市菁才中学)、林健鸿(杭州朝晖中学)、郑姬铭(杭州朝晖中学)、杨宗平(绍兴诸暨市浣江中学)、周秋霞(湖州五中)、赵汀(绍兴诸暨市浣沙中学)、徐萍燕(杭州萧山南阳镇中学)、袁小容(杭州朝晖中学)、翁海芳(宁波镇海区仁爱中学)、章中东(绍兴上虞市实验中学)、童正平(杭州富阳永兴中学)、程锡坤(嘉兴桐乡七中)、谢丙秋(杭州朝晖中学)。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第 1 讲　反比例函数的图像和性质

赛点目标

形如 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的函数叫做反比例函数，反比例函数有如下性质：1. 自变量的取值为不等于零的全体实数；2. 函数图像是双曲线，函数解析式 $y=\frac{k}{x}$ 的系数符号确定图像的大致位置；3. 双曲线关于坐标原点对称，即如果同时用 $-x$，$-y$ 替换 x，y，那么函数的解析式不变；4. 双曲线向上及向下都是无限延伸的.

赛题精讲

【例 1】 如图 1-1 所示，A、B 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）上的两点，$AC\perp x$ 轴于点 C，$BD\perp y$ 轴于点 D，AC、BD 交于点 E，则△ADE 与△BCE 的面积关系是（　　）

A. $S_{\triangle ADE}>S_{\triangle BCE}$　　B. $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BCE}$

C. $S_{\triangle ADE}<S_{\triangle BCE}$　　D. 不确定

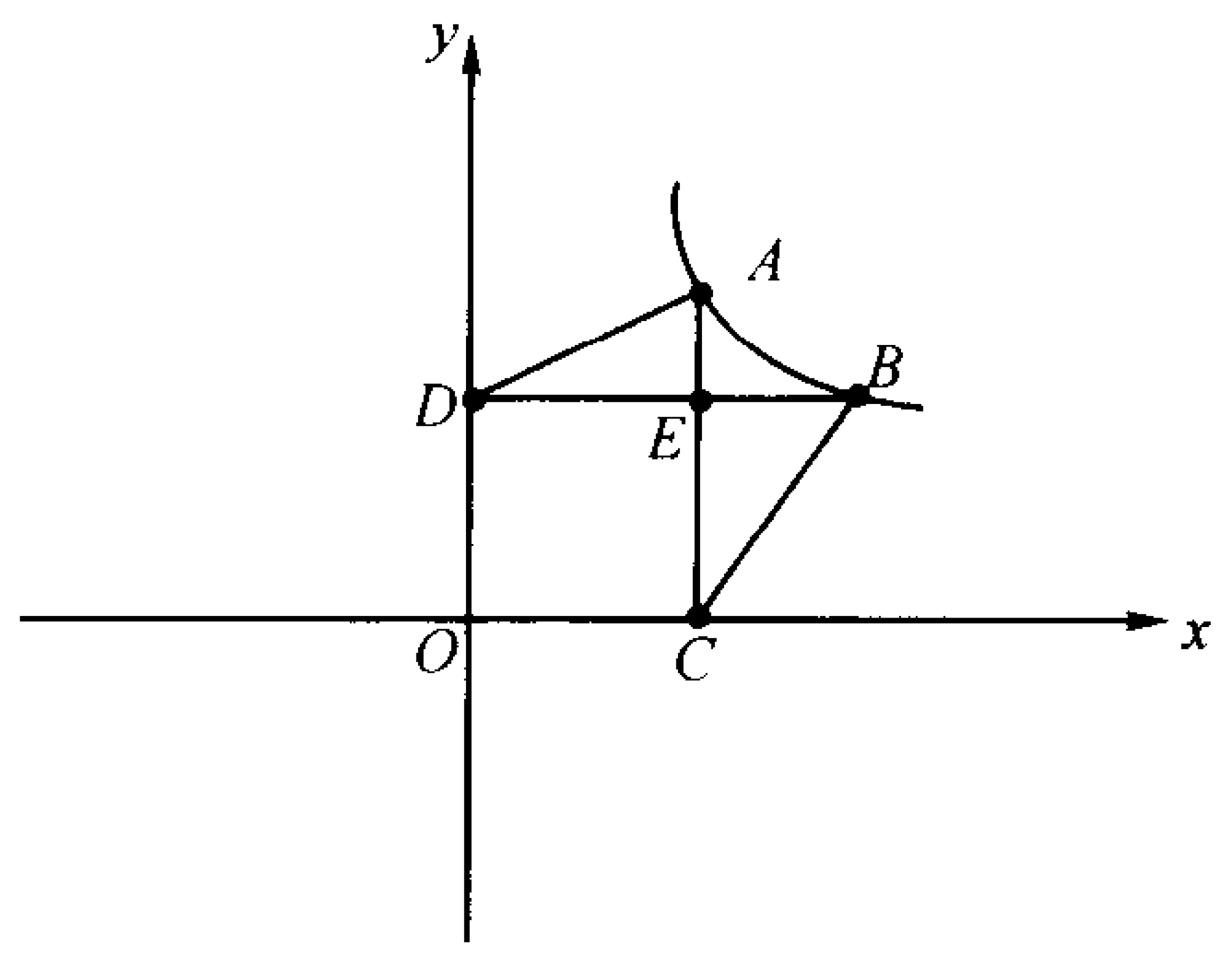


图 1-1

【解】 $\because S_{梯形ODAC}=S_{矩形ODEC}+S_{\triangle ADE}$，

$S_{梯形ODBC}=S_{矩形ODEC}+S_{\triangle BEC}$.

设 $A(x_1,\frac{k}{x_1})$，$B(x_2,\frac{k}{x_2})$，

如图 1-1，A、B 在第一象限，

$\therefore x_1>0$，$x_2>0$. $\because k>0$，$\therefore S_{梯形ODAC}=\frac{1}{2}(OD+AC)\cdot OC=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{x_2}+\frac{k}{x_1}\right)\cdot x_1=\frac{k}{2}+\frac{kx_1}{2x_2}$.

$S_{梯形ODBC}=\frac{1}{2}(OC+DB)\cdot OD=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cdot\frac{k}{x_2}=\frac{k}{2}+\frac{kx_1}{2x_2}$.

$\therefore S_{梯形ODAC}=S_{梯形ODBC}$，$\therefore S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BCE}$.

选 B.

【例 2】 如图 1-2 所示，已知函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图像和两条直线 $y=x$，$y=2x$ 在第一象限内分别相交于 P_1 和 P_2 两点，过 P_1 分别作 x 轴、y 轴的垂线 P_1Q_1，P_1R_1，垂足分别为 Q_1，R_1；过 P_2 分别作 x 轴、y 轴的垂线 P_2Q_2，P_2R_2，垂足分别为 Q_2，R_2，求矩形 $OQ_1P_1R_1$ 和矩形 $OQ_2P_2R_2$ 的周长并

比较它们的大小.

【解】 设 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,

∵P_1 为 $y=x$ 与 $y=\frac{4}{x}$ 在第一象限内的交点,

∴由 $\begin{cases} y=x \\ y=\frac{4}{x} \end{cases}$,得 $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=2 \end{cases}$.

∴矩形 $OQ_1P_1R_1$ 的周长:$2(2+2)=8$.

同理可得矩形 $OQ_2P_2R_2$ 的周长:$2(\sqrt{2}+2\sqrt{2})=6\sqrt{2}$.

∵$6\sqrt{2}>8$,∴矩形 $OQ_2P_2R_2$ 的周长大于矩形 $OQ_1P_1R_1$ 的周长.

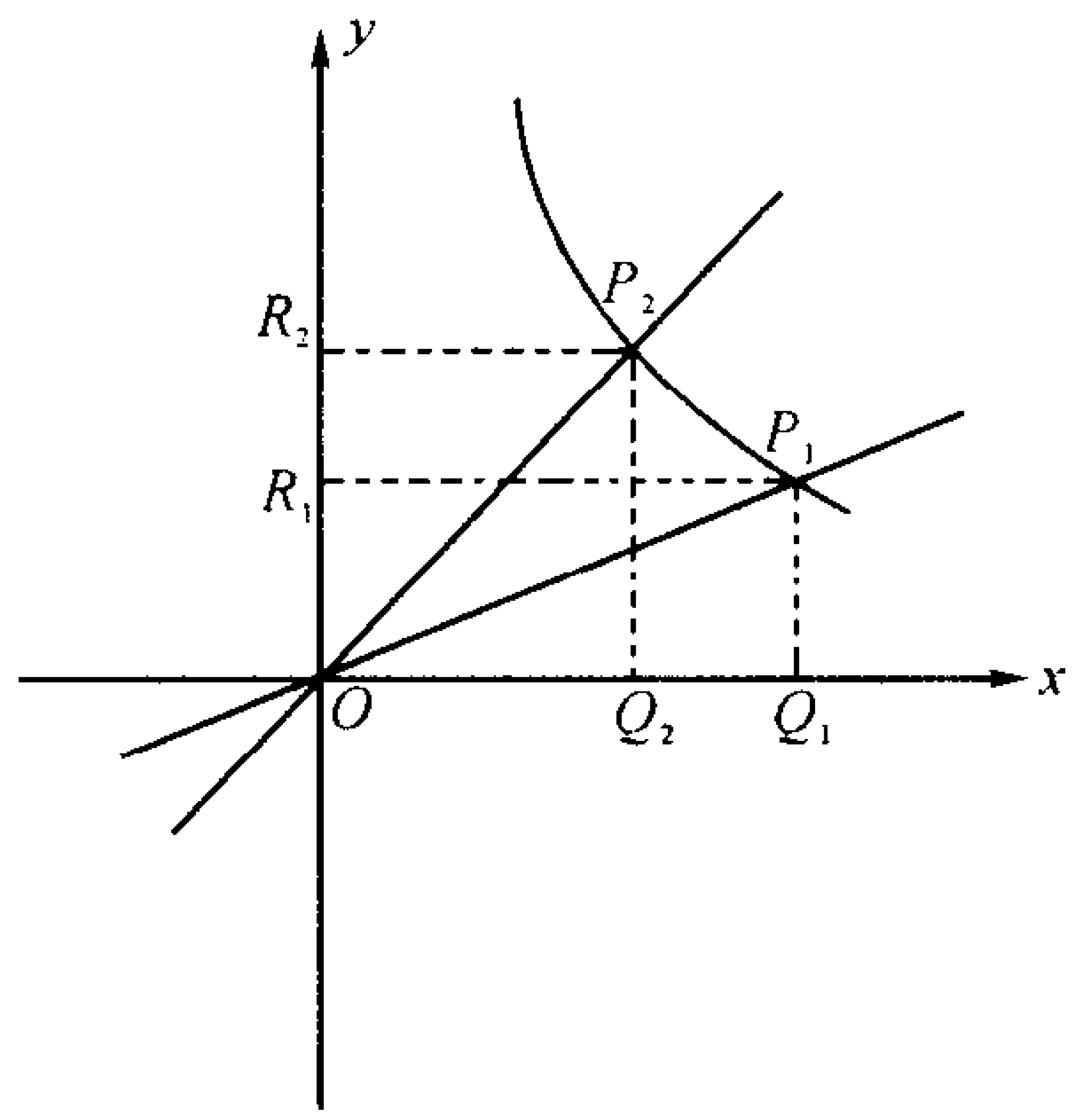


图 1-2

【例 3】 如图 1-3 所示,已知反比例函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图像和一次函数 $y=kx-7$ 的图像都经过点 $P(m,2)$.

(1)求这个一次函数的解析式;

(2)如果等腰梯形 $ABCD$ 的顶点 A、B 在这个一次函数的图像上,顶点 C、D 在这个反比例函数的图像上,两底 AD、BC 与 y 轴平行,且 A 和 B 的横坐标分别为 a 和 $a+2$,求 a 的值.

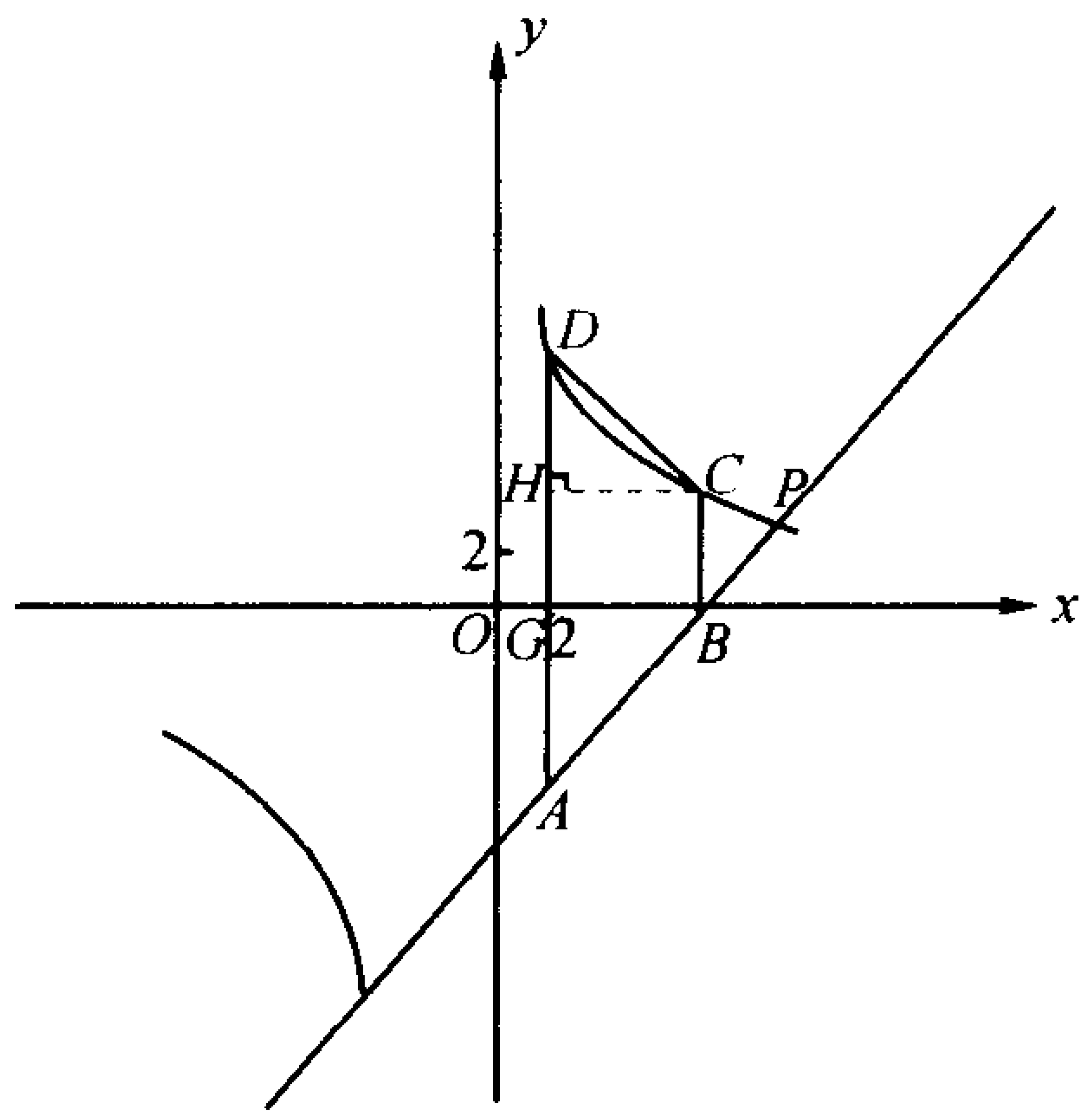


图 1-3

【解】 (1)∵$P(m,2)$ 在 $y=\frac{12}{x}$ 上,∴$m=6$.

而 $y=kx-7$ 也经过 $P(6,2)$,∴$2=6k-7$,∴$k=\frac{3}{2}$.

∴一次函数的解析式为 $y=\frac{3}{2}x-7$.

(2)如图 1-3,等腰梯形 $ABCD$,$AD/\!/BC/\!/y$ 轴.

A、B 的横坐标为 a,$a+2$,∴$DH=AG$.

∴$\frac{12}{a}-\frac{12}{a+2}=\left[\frac{3}{2}(a+2)-7\right]-\left(\frac{3}{2}a-7\right)$,∴$a=-4$ 或 2.

【例 4】 如图 1-4 所示,已知点(1,3)在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像上,矩形 $ABCD$ 的边 BC 在 x 轴上,E 是对角线 BD 的中点,函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像又经过 A、E 两点,点 E 的横坐标为 m,解答下列问题:

(1)求 k 的值;

(2)求点 C 的横坐标(用 m 表示);

(3)当 $\angle ABD=45°$ 时,求 m 的值.

【解】 (1)把 $x=1,y=3$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得 $k=3$.

(2)作 $EG\perp BC$ 于 G，则 $DC=2EG$，即 $E(m,\frac{3}{m})$，∴D 点的纵坐标为 $\frac{6}{m}$，得 $A\left(\frac{m}{2},\frac{6}{m}\right)$，$B\left(\frac{m}{2},0\right)$，∴$BG=\frac{m}{2}$，$BC=m$. ∴$OC=\frac{3}{2}m$，即 C 点的横坐标为 $\frac{3}{2}m$.

(3)当 $\angle ABD=45^\circ$ 时，$AB=AD$，则有 $\frac{6}{m}=m$. 解得 $m=\sqrt{6}$.

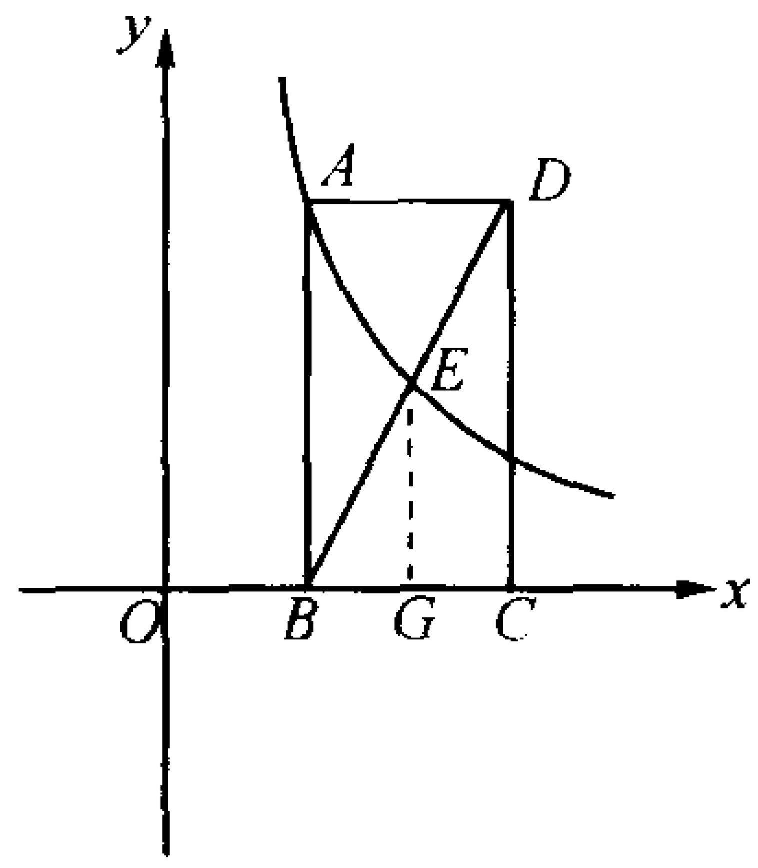


图 1-4

【例 5】 如图 1-5 所示，已知反比例函数 $y=\frac{k}{2x}$ 和一次函数 $y=2x-1$，其中一次函数的图像经过 (a,b)、$(a+1,b+k)$ 两点.

(1)求反比例函数的解析式；

(2)如图 1-5，已知 A 点在第一象限且同时在上述两个函数的图像上，求 A 点坐标；

(3)利用(2)的结果，请问：在 x 轴上是否存在点 P，使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形？若存在，把符合条件的 P 点坐标都求出来；若不存在，请说明理由.

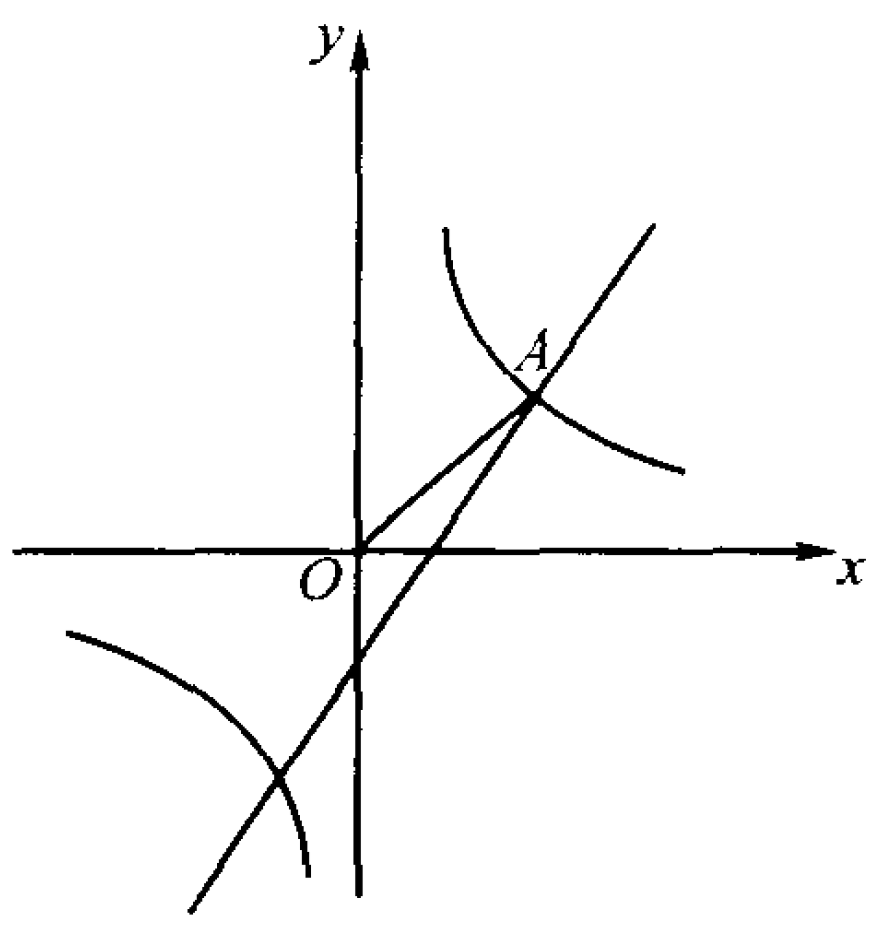


图 1-5

【解】 (1)∵$y=2x-1$ 过 (a,b)，$(a+1,b+k)$，

∴$\begin{cases}b=2a-1\\ b+k=2(a+1)-1\end{cases}$，∴$k=2$，∴$y=\frac{1}{x}$.

(2)解方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{x}\\ y=2x-1\end{cases}$，得 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{2}$(不合)，从而 $y=1$，点 A 的坐标为 $(1,1)$.

(3)符合条件的点 P 存在，有下列情况：①若 OA 为底，则 $\angle AOP_1=45^\circ$，$OA=\sqrt{2}$，$OP_1=P_1A$，∴$P_1(1,0)$；②若 OA 为腰，AP 为底，则 $OP=OA=\sqrt{2}$，$P_2(-\sqrt{2},0)$，$P_3(\sqrt{2},0)$；③若 OA 为腰，OP 为底，$AO=AP=\sqrt{2}$，$OP=2$，∴$P_4(2,0)$.

【例 6】 如图 1-6 所示，正方形 $OABC$ 的面积为 9，点 O 为坐标原点，点 A 在 x 轴上，点 C 在 y 轴上，点 B 在函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图像上，点 $P(m,n)$ 是函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图像上的任意一点，过点 P 分别作 x 轴、y 轴的垂线，垂足分别为 E、F，并设矩形 $OEPF$ 和正方形 $OABC$ 不重合部分的面积为 S.

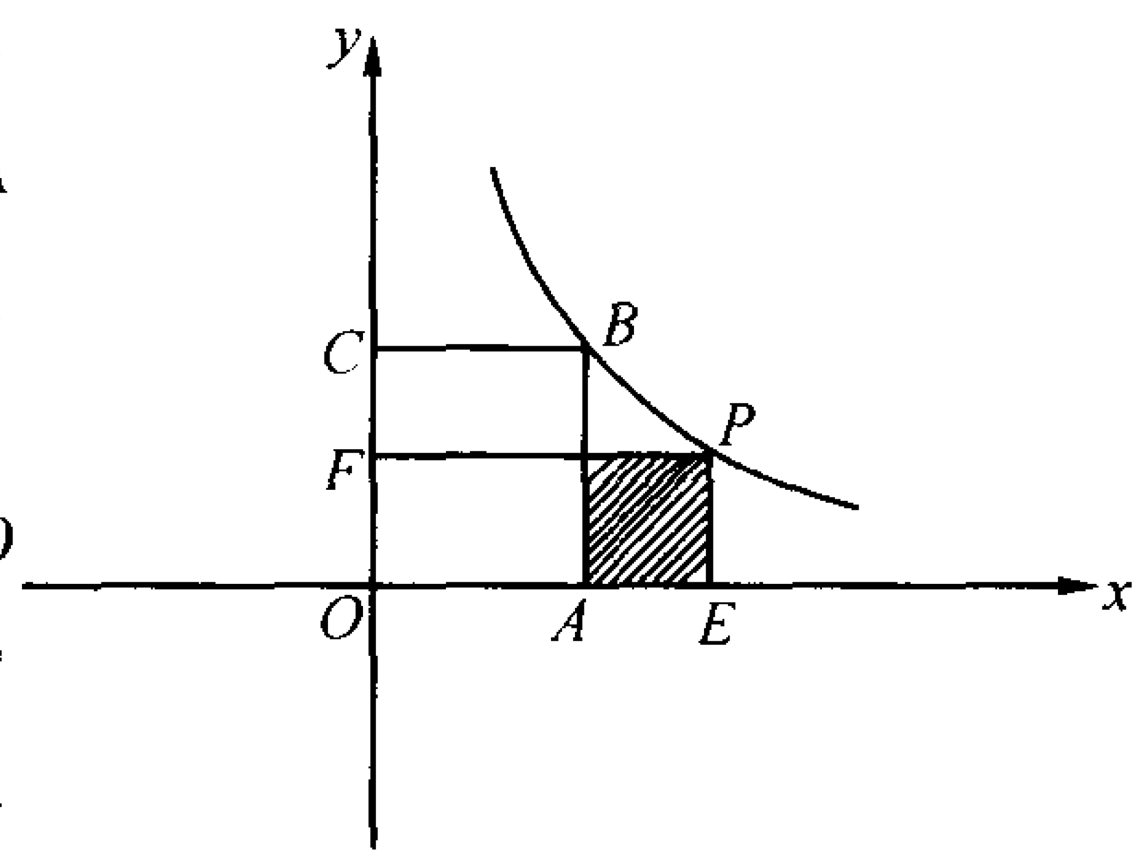


图 1-6

(1)求 B 点坐标和 k 的值；

(2)当 $S=\frac{9}{2}$ 时，求点 P 的坐标；

(3)写出 S 关于 m 的函数关系式.

【解】 (1)设 $B(x_0,y_0)$，$S_{\text{正方形}OABC}=x_0y_0=9$，$x_0=y_0=3$，即 $B(3,3)$，$k=x_0y_0=9$.

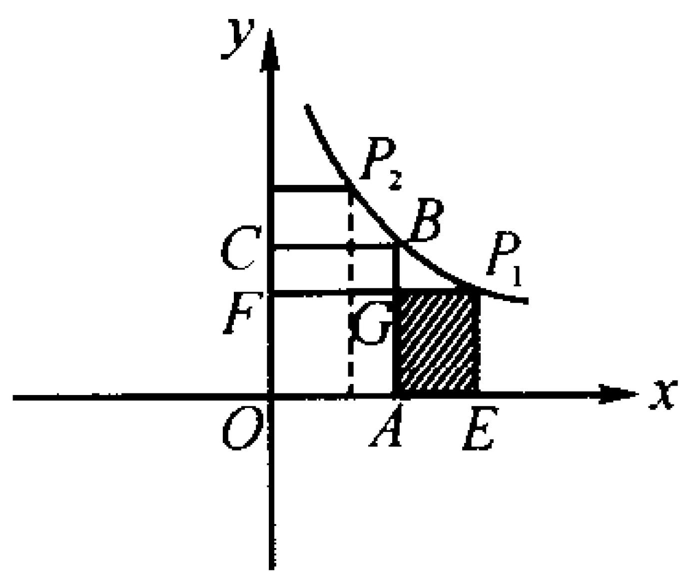


图 1-7(a)

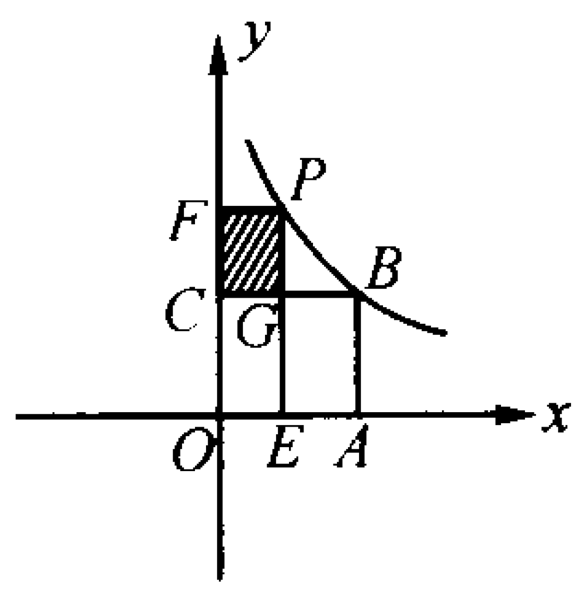


图 1-7(b)

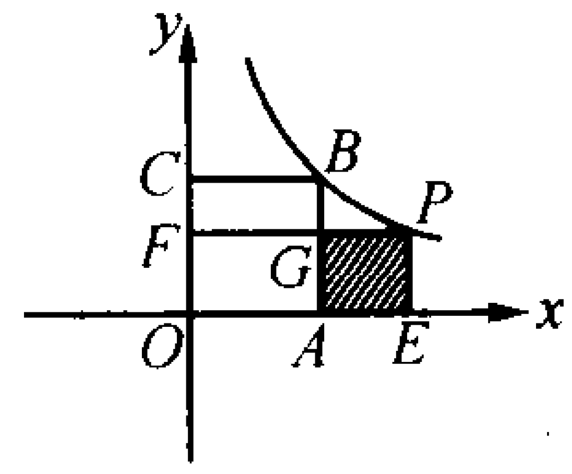


图 1-7(c)

(2)①如图 1-7(a)，$P(m,n)$ 在 $y=\frac{9}{x}$ 上，$S_{\text{矩形}OEP_1F}=mn=9$.

$S_{\text{矩形}OAGF}=3n$，$S=9-3n=\frac{9}{2}$，$n=\frac{3}{2}$，$m=6$，$\therefore P_1(6,\frac{3}{2})$.

②如图 1-7(a)，同理可得 $P_2(\frac{3}{2},6)$.

(3)①如图 1-7(b)，当 $0<m<3$ 时，$S_{\text{矩形}OEGC}=3m$，$S=S_{\text{矩形}OEPF}-S_{\text{矩形}OEGC}=9-3m(0<m<3)$.

②如图 1-7(c)，当 $m\geqslant3$ 时，$S_{\text{矩形}OAGF}=3n$，$S=9-3n=9-\frac{27}{m}(m\geqslant3)$.

【例 7】 已知，如图 1-8 所示，一次函数的图像经过第一、二、三象限，且与反比例函数的图像交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于点 D. $OB=\sqrt{10}$，$\tan\angle DOB=\frac{1}{3}$.

(1)求反比例函数的解析式；

(2)设点 A 的横坐标为 m，$\triangle ABO$ 的面积为 S. 求 S 与 m 的函数关系式，并写出自变量 m 的取值范围；

(3)当 $\triangle OCD$ 的面积等于 $\frac{S}{2}$ 时，试判断过 A、B 两点的抛物线在 x 轴上截得的线段长能否等于 3. 如果能，求此时抛物线的解析式；如果不能，请说明理由.

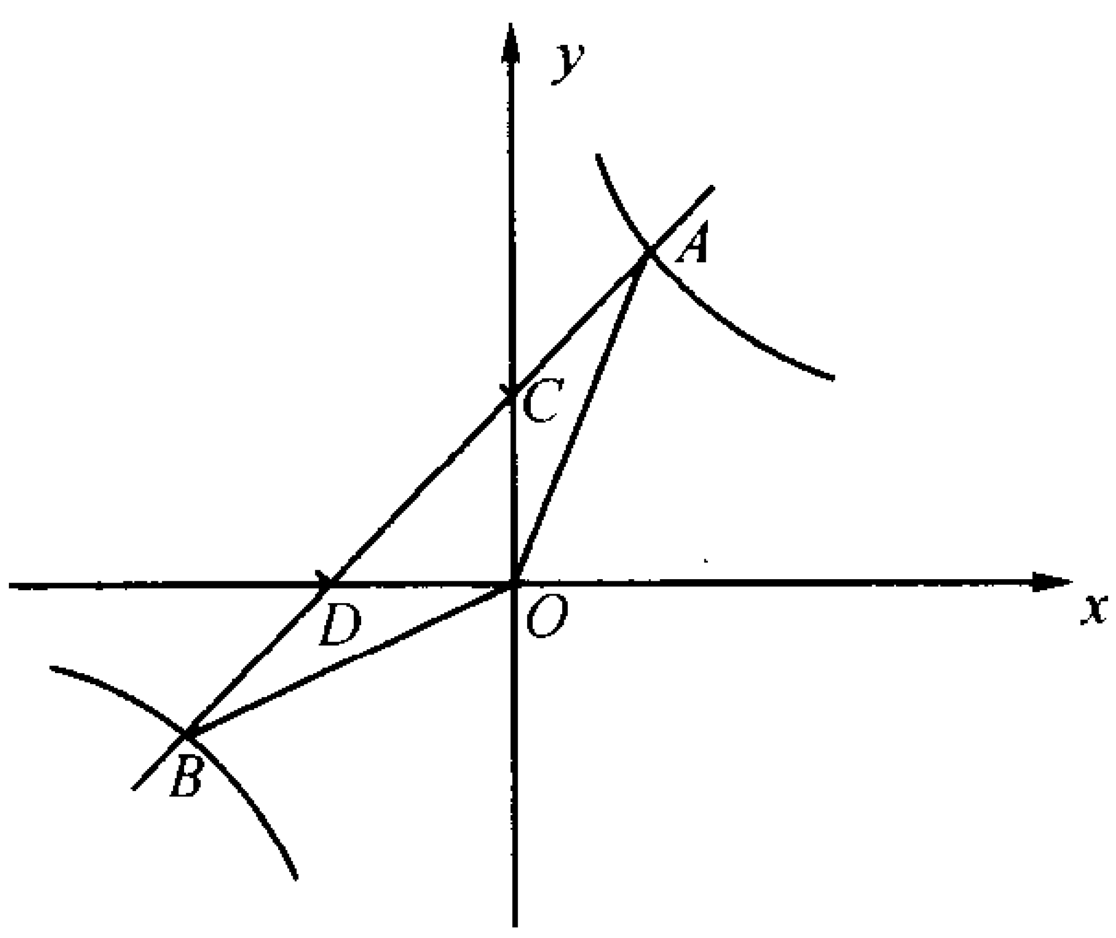


图 1-8

【解】 (1)$\because OB=\sqrt{10}$，$\tan\angle DOB=\frac{1}{3}$，$\therefore B(-3,-1)$，$\therefore$ 函数解析式为 $y=\frac{3}{x}$.

(2)设直线 AB 为 $y=kx+b$.

$\therefore\begin{cases}-1=-3k+b\\ \frac{3}{m}=mk+b\end{cases}$，$\therefore k=\frac{1}{m}$，$b=\frac{3}{m}-1$，$\therefore C(0,\frac{3}{m}-1)$，

$\therefore S=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{m}-\frac{m}{3}\right)(0<m<3)$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(3)设抛物线 $y=ax^2+bx+c$，$S_{\triangle OCD}=\frac{S}{2}$，设 AB 的解析式 $y=kx+n$，$\therefore \frac{n^2}{k}=\frac{9}{2m}-\frac{m}{2}$，$\therefore m=1, n=2, k=1$，$\therefore \begin{cases}3=a+b+c\\ -1=9a-3b+c\end{cases}$. $\therefore b=2a+1, c=-3a+2$，$|x_1-x_2|=3$，$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9$，$\therefore b^2-4ac=9a^2$，$\therefore 7a^2-4a+1=0$ 无解. ∴不可能在 x 轴上截得线段的长为 3.

【例 8】 如图 1-9 所示，直线 AB 过点 $A(m,0)$，$B(0,n)$ $(m>0,n>0)$，反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图像与 AB 交于 C、D 两点，P 为双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 在第一象限内的分支上任意一点，过 P 作 $PQ\perp x$ 轴于 Q，$PR\perp y$ 轴于 R，请解答下列问题.

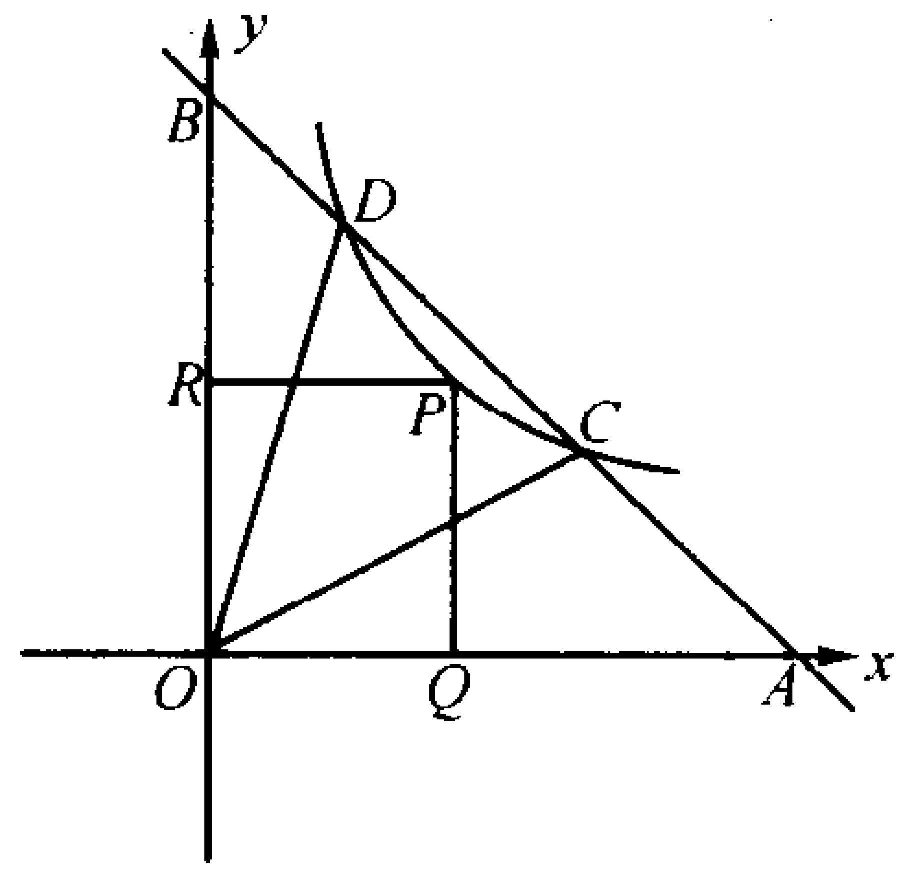


图 1-9

(1)若 $m+n=10$，n 为何值时，$\triangle AOB$ 的面积最大？最大值是多少？

(2)若 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle COD}=S_{\triangle DOB}$，求 n 的值；

(3)在(2)的条件下，过 O、D、C 三点作抛物线，当该抛物线的对称轴为 $x=1$ 时，矩形 $PROQ$ 的面积是多少？

【解】 (1)$\because S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}mn, m+n=10$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}n(10-n)$，当 $n=5$ 时，$S_{\triangle AOB}$ 的最大值为 $\frac{25}{2}$.

(2)直线 AB 的方程为 $y=-\frac{n}{m}x+n$，当 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle COD}=S_{\triangle DOB}$ 时，有 $AC=CD=DB$，过 C、D 作 x 轴的垂线，可知 D、C 的横坐标分别为 $\frac{m}{3}$、$\frac{2m}{3}$. 将 $x=\frac{m}{3}$ 代入 $y=\frac{m}{x}$，得 $y=3$. 把 $x=\frac{m}{3}$，$y=3$ 代入 $y=-\frac{n}{m}x+n$，$\therefore n=\frac{9}{2}$.

(3)当 $n=\frac{9}{2}$ 时，$C\left(\frac{2}{3}m,\frac{3}{2}\right)$，$D\left(\frac{m}{3},3\right)$，过 O、C、D 的抛物线 $y=-\frac{81}{4m^2}x^2+\frac{63}{4m}x$.

由 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{7}{18}m=1$，$\therefore m=\frac{18}{7}$，$S_{矩形PROQ}=xy=m=\frac{18}{7}$.

【例 9】 如图 1-10 所示，已知 C、D 是双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 在第一象限内的分支上的两点，直线 CD 分别交 x 轴、y 轴于 A、B，设 C、D 的坐标分别是 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，连结 OC，OD.

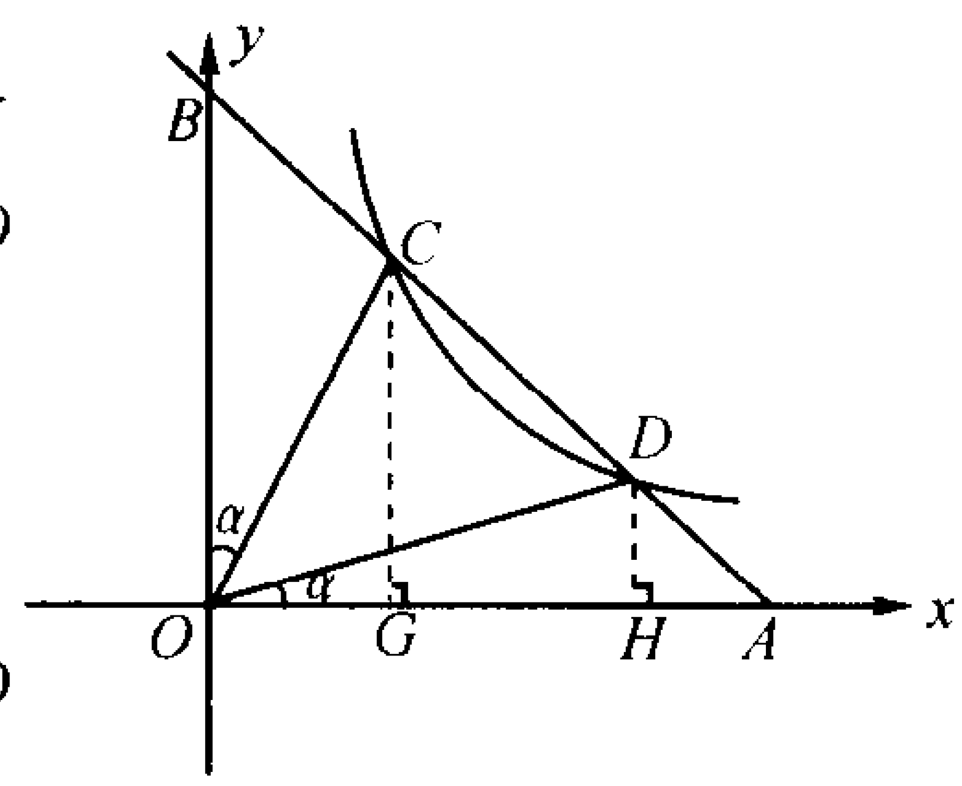


图 1-10

(1)求证：$y_1<OC<y_1+\frac{m}{y_1}$；

(2)若 $\angle BOC=\angle AOD=\alpha$，$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$OC=\sqrt{10}$，求直线 CD 的解析式.

【解】 (1)过点 C 作 $CG\perp x$ 轴于 G，则 $OG=x_1$，$CG=y_1$，∵点

$C(x_1,y_1)$在双曲线 $y=\frac{m}{x}$上，$\therefore x_1=\frac{m}{y_1}$，$\because CG<OC<CG+OG$，$\therefore y_1<OC<y_1+\frac{m}{y_1}$.

(2)$\because \angle GOD=\angle BOC=\alpha$，$\tan\alpha=\frac{OG}{CG}=\frac{1}{3}$，$\frac{x_1}{y_1}=\frac{1}{3}$，$\therefore y_1=3x_1$.

$\because OC^2=OG^2+CG^2$，$OC=\sqrt{10}$，$\therefore x_1^2+y_1^2=10$，$\therefore x_1=1$，$y_1=3$，$\therefore C(1,3)$，$\therefore m=3$，$\therefore$双曲线的解析式为 $y=\frac{3}{x}$. 作 $DH\perp OA$ 于 H，则 $DH=y_2$，$OH=x_2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ODH$ 中，$\tan\alpha=\frac{DH}{OH}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{1}{3}$，即 $x_2=3y_2$，又 $y_2=\frac{3}{x_2}$，则 $3y_2^2=3$，$\therefore y_2=\pm1$，取 $y_2=1$，$x_2=3$，$\therefore D$ 的坐标为(3,1).

设直线 CD 的解析式为 $y=kx+b$，则有$\begin{cases}3=k+b\\1=3k+b\end{cases}$，

得$\begin{cases}k=-1\\b=4\end{cases}$，$\therefore$直线 CD 的解析式为：$y=-x+4$.

【例 10】 已知关于 x 的方程 $x^2+4x+3k-1=0$ 的两个实根的平方和不小于这两个根的积，反比例函数 $y=\frac{1+5k}{x}$的图像的两个分支在各自的象限内，点的纵坐标 y 随横坐标 x 的增大而减小，求满足上述条件的 k 的整数值.

【解】 由题意，方程 $x^2+4x+3k-1=0$ ①　　有实根.

故　$\Delta=4^2-4(3k-1)\geqslant0$，解得 $k\leqslant\frac{5}{3}$.　②

设 x_1、x_2 为①的根，由根与系数关系知

$x_1+x_2=-4$，$x_1x_2=3k-1$，因为 $x_1^2+x_2^2\geqslant x_1x_2$，

故$(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\geqslant0$，即$(-4)^2-3(3k-1)\geqslant0$，$\therefore k\leqslant\frac{19}{9}$.　③

又 $y=\frac{1+5k}{x}$，当 $x>0$ 或 $x<0$ 时，分别随 x 增大而减小，从而 $1+5k>0$，即 $k>-\frac{1}{5}$.　④

综合②、③、④得$-\frac{1}{5}<k\leqslant\frac{5}{3}$.

所以，满足条件的 k 可取整数值为 0，1.

能力训练

一、选择题

1. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图像是轴对称图形，它的一条对称轴是下列哪个正比例函数的图像？（　　）

A. $y=-kx$　　B. $y=|k|x$　　C. $y=\frac{-k}{|k|}x$　　D. $y=kx$

2. 如图 1-11 所示，A、C 是函数 $y=\frac{1}{x}$ 图像上关于原点的对称点．AB、CD 都垂直于 x 轴，垂足分别为 B、D，设四边形 $ABCD$ 的面积为 S，则 （　　）

A. $0<S<2$　　B. $S=2$　　C. $S>2$　　D. $S=4$

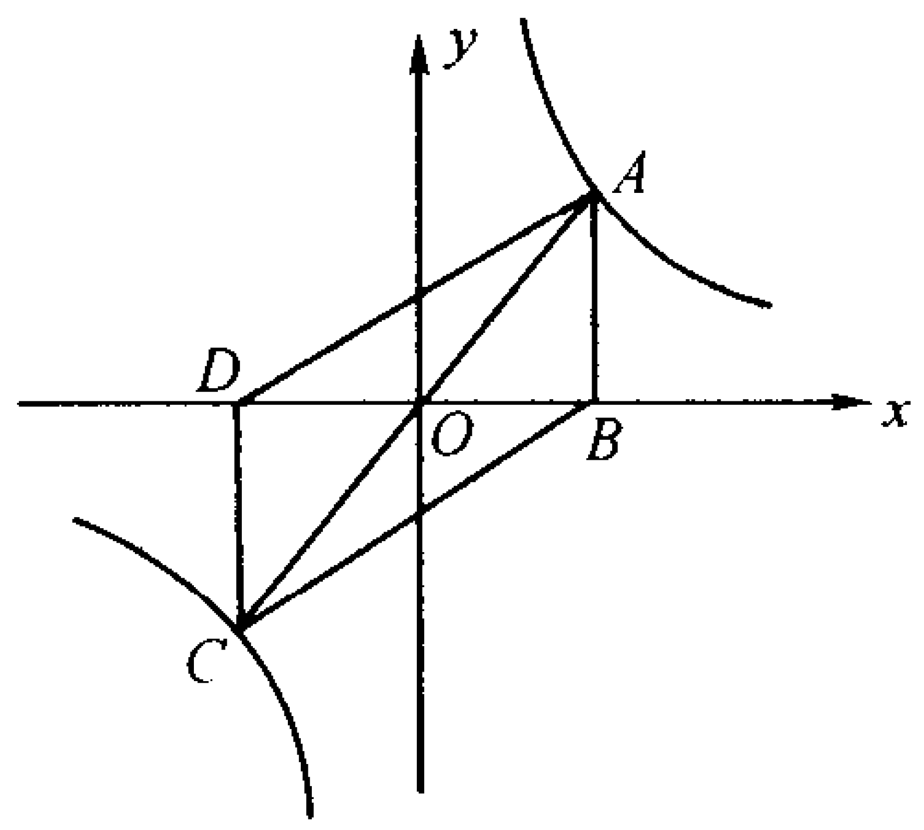


图 1-11

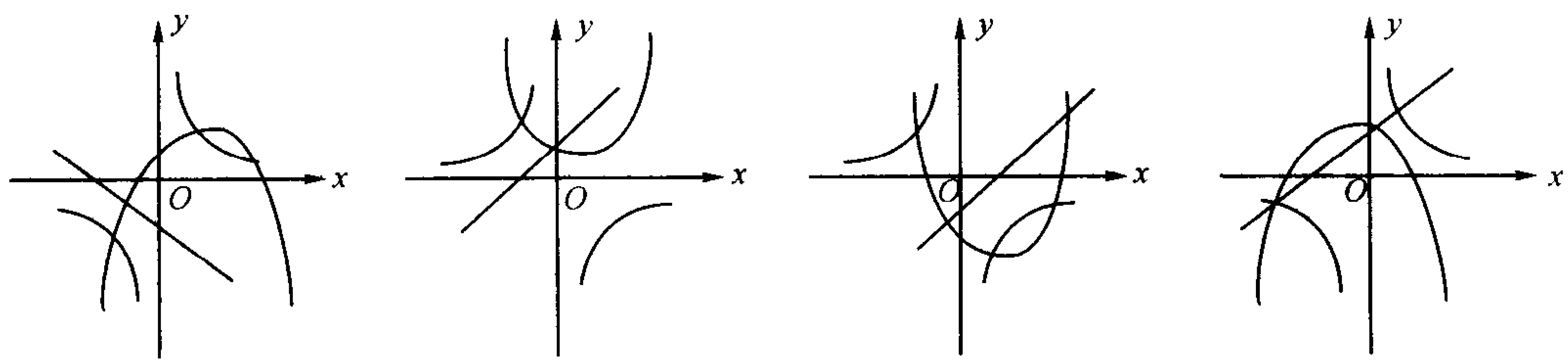
3. 已知反比例函数 $y=\frac{1-2m}{x}$ 的图像上两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，当 $x_1<0<x_2$ 时，有 $y_1<y_2$，则 m 的取值范围是 （　　）

A. $m<0$　　B. $m>0$　　C. $m<\frac{1}{2}$　　D. $m>\frac{1}{2}$

4. 在函数 $y=\frac{-a^2-1}{x}$（a 为常数）的图像上有三点 $(-1,y_1)$、$(-\frac{1}{4},y_2)$、$(\frac{1}{2},y_3)$，则函数值 y_1、y_2、y_3 的大小关系是 （　　）

A. $y_2<y_3<y_1$　　B. $y_3<y_2<y_1$　　C. $y_1<y_3<y_2$　　D. $y_3<y_1<y_2$

5. 函数 $y=\frac{b}{x}$，$y=ax+b$，$y=ax^2+bx+c$ 的图像在同一坐标系中，如图的位置只可能是 （　　）



A.　　B.　　C.　　D.

二、填空题

6. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上有一点 $P(m,n)$，其坐标是关于 t 的一元二次方程 $t^2-3t+k=0$ 的两根，且 P 到原点 O 的距离为 $\sqrt{13}$，则该反比例函数的解析式为____________.

7. 如图 1-12 所示，Rt$\triangle OAB$ 的顶点 A 是一次函数 $y=-x-m+3$ 的图像与反比例函数 $y=-\frac{m}{x}$ 的图像在第二象限的交点，且 $S_{\triangle AOB}=1$，那么点 A 的坐标是____________.

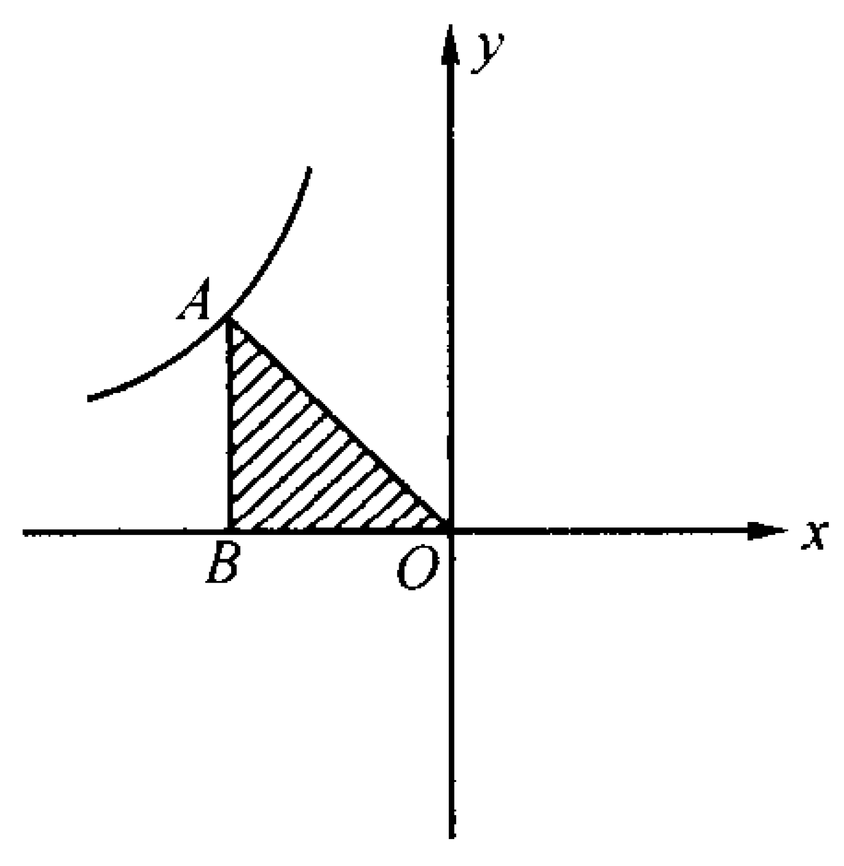


图 1-12

8. 若反比例函数 $y=(m^2-3)\cdot x^{m^2+3m+1}$ 的图像在其所在的象限内 y 随 x 的增大而增大，则 $m=$____________.

9. 如果直线 $y=x+2$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 相交于两点．那么实数 k 的取值范围是____________.

10. 如果反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$y=18$，则函数图像上正整数点 (x,y)（x,y 都是正整数）的个数为________.

三、解答题

11. 已知一次函数 $y=-x+6$ 和反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$. 问：

(1) k 满足什么条件时，这两个函数在同一坐标系 xOy 中的图像有两个公共点？

(2) 设(1)中的两个公共点分别为 A、B，$\angle AOB$ 是锐角还是钝角？

12. 如图 1-13 所示，直线 AB 过点 $A(3m,0)$、$B(0,n)$ ($m>0$，$n>0$)，反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图像与直线 AB 交于 C、D 两点，P 为双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 上任意一点，过 P 点作 $PQ\perp x$ 轴于 Q，$PR\perp y$ 轴于 R.

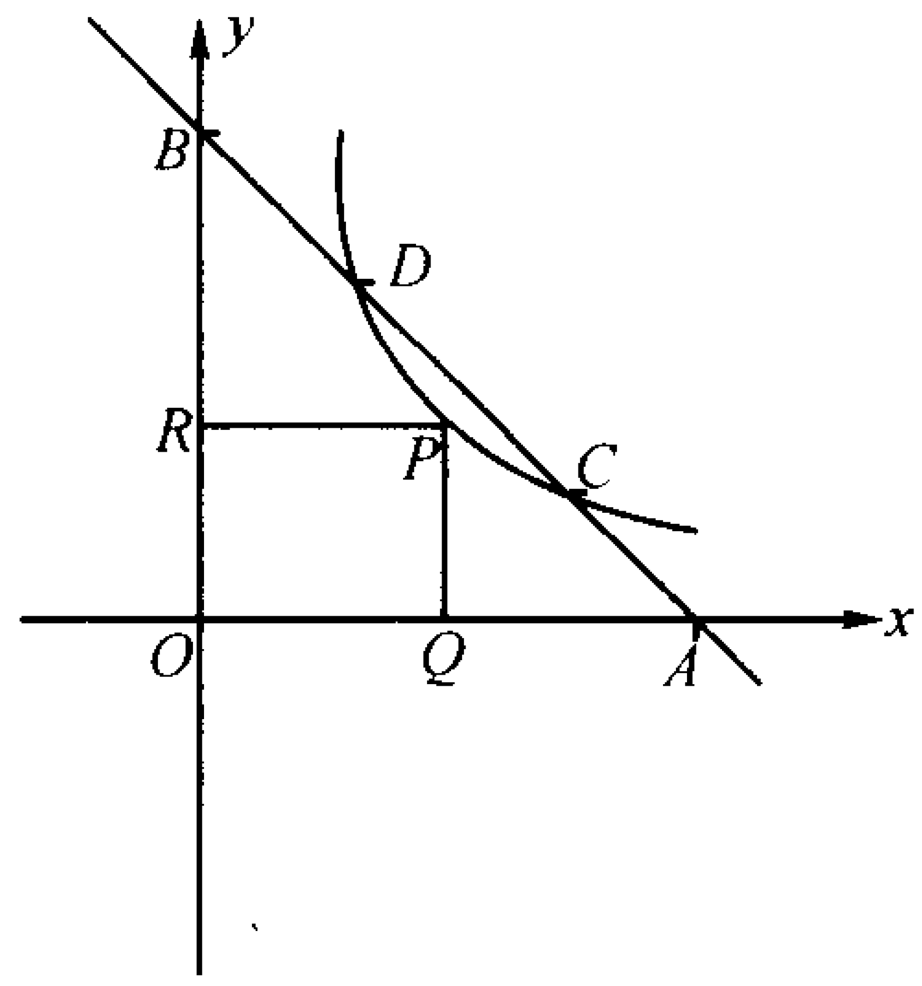


图 1-13

(1) 用含 m，n 的代数式表示 $\triangle AOB$ 的面积 S；

(2) 若 $m+n=10$，n 为何值时，S 最大？并求出这个最大值；

(3) 若 $BD=DC=CA$，求出 C、D 两点的坐标；

(4) 在(3)的条件下过 O、D、C 三点作抛物线，当该抛物线的对称轴为 $x=\frac{7}{6}$ 时，矩形 $PROQ$ 的面积是多少？

13. 已知 $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ 与 $(x-y)$ 成反比例，求证：当 $x\neq-y$ 时，$(x+y)^2$ 与 (x^2+y^2) 成正比例.

14. 已知关于 x 的方程 $x^2-3x+2k-1=0$ 有实根，反比例函数 $y=\frac{1+2k}{x}$ 的图像的两个分支在各自的象限内 y 随 x 值的增大而减小，求满足上述条件的 k 的整数值.

15. 已知 k 为正整数，关于 x 的一元二次方程 $(k-2)x^2-2(k-3)x+k=0$ 有两个不相等的实数根 α 和 β.

(1) 求 k 的值；

(2) 若一次函数 $y=(k-2)x+m$ 与反比例函数 $y=\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)n}{x}$ 的图像都经过点 (α,β)，求这个一次函数和反比例函数的解析式.

第 2 讲　二次函数的图像和性质

赛点目标

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的性质、图像是由函数的解析式决定的，只要确定了一个二次函数的各项系数 a,b,c，也就决定了它的图像的开口方向、顶点坐标、对称轴、与 x 轴的交点状况，函数的增减性、最大值和最小值，以及函数值何时取正、何时取负.

确定抛物线的解析式一般要两个或三个独立条件，灵活地选用不同方法，求出抛物线的解析式是解与抛物线相关的问题的关键.

赛题精讲

【例 1】 已知抛物线 $y=x^2+px+q$ 上有一点 $M(x_0,y_0)$ 位于 x 轴下方.

(1)求证：此抛物线与 x 轴交于两点；

(2)设此抛物线与 x 轴的交点为 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$，且 $x_1<x_2$，求证：$x_1<x_0<x_2$.

【证明】 (1)$y_0=x_0^2+px_0+q=\left(x_0+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}<0$.

则 $\frac{p^2-4q}{4}>\left(x_0+\frac{p}{2}\right)^2>0$，有 $p^2-4q>0$.

即抛物线与 x 轴交于两点.

(2)$x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$，代入 $x_0^2+px_0+q=y_0<0$，$x_1<x_2$.

有　$x_0^2-(x_1+x_2)x_0+x_1x_2<0$，　$(x_0-x_1)(x_0-x_2)<0$.

故　$x_1<x_0<x_2$.

【例 2】 如图 2-1 所示，开口向下的抛物线 $y=ax^2-8ax+12a$ 与 x 轴交于 A、B 两点(点 A 在点 B 的左侧)，抛物线上另有一点 C 在第一象限，且 $\triangle OCA\backsim\triangle OBC$.

(1)求 OC 的长及 $\frac{BC}{AC}$ 的值；

(2)设直线 BC 与 y 轴交于 P 点，当 C 是 BP 的中点时，求直线 BP 和抛物线的解析式.

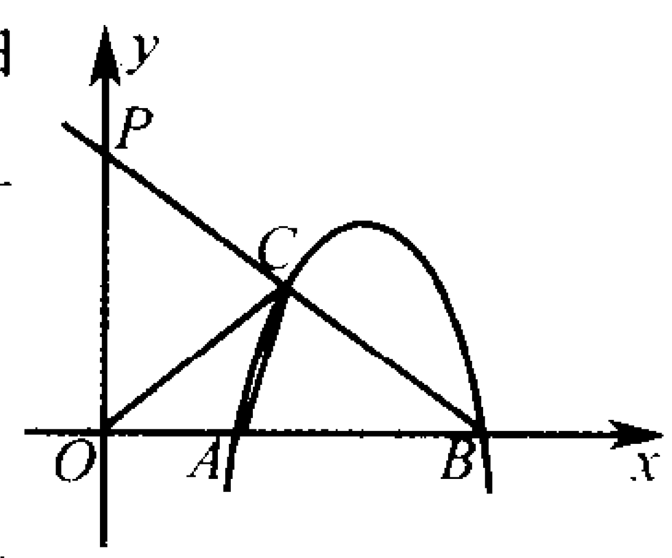


图 2-1

【解】 (1)由已知，$a<0$，且方程 $ax^2-8ax+12a=0$ 有两根，$x_1=2$，$x_2=6$，于是 $OA=2$，$OB=6$. $\because\triangle OCA\backsim\triangle OBC$，$\therefore OC^2=OA\cdot OB=12$，$OC=2\sqrt{3}$，且 $\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle COA}}=\frac{OB}{OA}=3$. $\therefore\frac{BC}{AC}=\sqrt{3}$.

(2)∵C 是 PB 的中点，故 $OC=BC$，从而 C 的横坐标为 3，又 $OC=2\sqrt{3}$，于是，C 的纵坐标为 $\sqrt{3}$，∴$C(3,\sqrt{3})$. 设直线 BP 为 $y=kx+b$. 因其过 $B(6,0)$，$C(3,\sqrt{3})$，则 $\begin{cases}0=6k+b\\ \sqrt{3}=3k+b\end{cases}$，即 $\begin{cases}k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ b=2\sqrt{3}\end{cases}$，直线 BP 为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$. 又 C 在抛物线上，则 $\sqrt{3}=a\times3^2-8a\times3+12a$，解得 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2+\dfrac{8}{3}\sqrt{3}x-4\sqrt{3}$.

【例 3】 方程 $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ 的两根为 α,β，试求二次函数 $f(x)$，使得满足 $f(\alpha)=\beta$，$f(\beta)=\alpha$，$f(1)=1$.

【解】 由题意可知：$\alpha+\beta=2\sqrt{2}$，$\alpha\beta=1(\alpha\neq\beta)$.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$. 由条件得：

$$\begin{cases}a\alpha^2+b\alpha+c=\beta & ①\\ a\beta^2+b\beta+c=\alpha & ②\\ a+b+c=1 & ③\end{cases}$$

①+②　$a(\alpha^2+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+2c=\alpha+\beta$，

∵$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6$，

∴$3a+\sqrt{2}b+c=\sqrt{2}$.　　④

①−②　$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$，

∴$a(\alpha+\beta)+b=-1$.

∴$2\sqrt{2}a+b=-1$.　　⑤

由③、④、⑤得　$a=1$，$b=-(2\sqrt{2}+1)$，$c=2\sqrt{2}+1$.

故　$f(x)=x^2-(2\sqrt{2}+1)x+2\sqrt{2}+1$.

【例 4】 在直角坐标系中，抛物线 $y=-\dfrac{4}{9}x^2+\dfrac{2}{9}mx+\dfrac{5}{9}m+\dfrac{4}{3}$ 与 x 轴交于 A、B 两点，已知点 A 在 x 轴的负半轴上，点 B 在 x 轴的正半轴上，BO 的长是 AO 长的 2 倍(即 $|BO|=2|AO|$)，点 C 为抛物线的顶点.

(1)求此抛物线的解析式；

(2)若点 P 在此抛物线的对称轴上，且 OP 与 x 轴、直线 BC 都相切，求点 P 的坐标.

【解】 (1)由 $|BO|=2|OA|$，可设 $|OA|=u$，则 $|OB|=2u(u>0)$，

于是 $-u$，$2u$ 是方程 $-\dfrac{4}{9}x^2+\dfrac{2}{9}mx+\dfrac{5}{9}m+\dfrac{4}{3}=0$ 的两个根.

由韦达定理，得　$m=4$，$u=2$，故解析式为 $y=-\dfrac{4}{9}x^2+\dfrac{8}{9}x+\dfrac{32}{9}$.

(2)∵$y=-\dfrac{4}{9}(x-1)^2+4$，∴顶点 $C(1,4)$，对称轴为 $x=1$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com