普通高等教育"十一五"精品课程建设教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

刘振忠　杨树国　董继学　主编

中国农业大学出版社

普通高等教育“十一五”精品课程建设教材

高等数学

刘振忠　杨树国　董继学　主编

中国农业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘振忠等主编. —北京:中国农业大学出版社,2006.9
普通高等教育"十一五"精品课程建设教材
ISBN 7-81117-072-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 095903 号

书　　名 高等数学
作　　者 刘振忠　杨树国　董继学　主编

策划编辑	张秀环	**责任编辑**	洪重光　冯雪梅
封面设计	郑　川	**责任校对**	王晓凤　陈　莹
出版发行	中国农业大学出版社		
社　　址	北京市海淀区圆明园西路 2 号	**邮政编码**	100094
电　　话	发行部 010-62731190,2620		读者服务部 010-62732336
	编辑部 010-62732617,2618		出　版　部 010-62733440
网　　址	http://www.cau.edu.cn/caup	**e-mail**:	cbsszs@cau.edu.cn
经　　销	新华书店		
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		
版　　次	2006 年 9 月第 1 版　　2006 年 9 月第 1 次印刷		
规　　格	787×980　16 开本　25 印张　457 千字		
印　　数	1～3 000		
定　　价	32.00 元		

前 言

为了适应高等教育大众化形势的要求，我们组织编写了这部精品课程教材。

目前，教育部、农业部已经组织编写了一大批面向 21 世纪和“十一五”规划教材，极大提高了农业院校数学类课程教材的水平，学校选择和使用教材的余地大为增加。本书的特色具有以下几个方面。

1. 在适应性上，本教材针对我国高等教育实行扩招和多层次办学的实际，考虑了普通农业院校学生的实际水平，本着起点适当降低、难度分散处理，注重联系生产和生活的实际的原则，因此本教材适合于作为普通农业院校特别是实行扩招的农业院校的生物类、管理类高等数学教材。

2. 在内容的处理上，本着以上编写原则，适当地减少课程难度，减少难度大的推导和证明，在保证课程系统性的前提下，删减了部分内容。

3. 在与实践结合上，注意到了数学知识的实际应用，给出了数学知识在社会生活、农业科学和经济方面实际应用的例子。

本书由黑龙江八一农垦大学、吉林农业大学、莱阳农学院联合编写，由刘振忠教授，杨树国、董继学副教授担任主编，编写分工为杨树国（第一章），范雪飞（第二章），王增辉（第三章），王忠瑞（第四章），刘振忠（第五章），董继学（第六章），朱桂英（第七章），于晓秋（第八章、习题及习题参考答案），袁玉萍（第九章），参加编写的还有黑龙江八一农垦大学数学系的张巧生、田宏、杨洪等。

本书由黑龙江八一农垦大学数学系徐梅教授担任主审。

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象.极限方法则是高等数学中研究问题的一种基本方法.本章在复习函数有关知识的基础上,着重介绍极限的概念和函数的连续性.

第一节　函　　数

一、函数的概念

在一个自然现象或技术过程中,往往同时有几个变量在变化着,它们并不是孤立地变化着,而是相互联系并遵循着一定的变化规律,现在我们先就两个变量的情形(多于两个变量的情形在第六章再讲)举几个例子.

例 1　圆的面积

考虑圆的面积 A 与它们的半径 r 之间的相依关系.大家知道,它们之间符合如下公式:

$$A=\pi r^2$$

当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时,由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 2　自由落体运动

设物体下落的时间为 t,落下的距离为 s.假定开始下落的时刻为 $t=0$,那么 s 与 t 之间的相依关系符合如下公式:

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

式中 g 是重力加速度.假定物体着地的时刻为 $t=T$,那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时,由上式就可以确定 s 的相应数值.

撇开这两个例子所涉及的变量的实际意义不谈,我们就会发现,它们都反映了两个变量之间的相依关系,这种相依关系由一种对应法则来确定,根据这种对应法则,当其中的一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有确定

的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$，当 x_0 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中，表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如"ϕ"，"φ"等，这时函数就记作 $y=\phi(x)$，$y=\varphi(x)$ 等. 对应法则和定义域是函数概念的两个要素，很多函数的对应法则可用表格、图像或解析式等表示，定义域一般可用区间表示.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的，如例 1 中，定义域 $D=(0,+\infty)$；例 2 中，定义域 $D=[0,T]$.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用解析式表达的函数，这时我们约定：函数的定义域就是自变量能够取到的使解析式有意义的一切实数值. 例如函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域就是闭区间 $[-2,2]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 就是开区间 $(-1,1)$.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值有且只有一个，则称这种函数为单值函数，否则称之为多值函数，本书的函数若没有特殊说明，都是指单值函数.

在定义域的不同范围内用不同的式子表示的函数，称为分段函数.

例如，函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0\\ 0, & \text{当 } x=0\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它就是一个分段函数，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-1 所示. 对于任何实数 x，有：$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$.

例 3 已知分段函数

$$y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & \text{当 } x>1\end{cases}$$

试求：

(1)函数的定义域，值域；

(2)$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(3)$；

(3)画出函数的图形.

解　(1)函数的定义域为 $D=[0,+\infty)$，值域为 $W=[0,+\infty)$；

(2)因为 $\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；$3\in(1,+\infty)$，所以 $f(3)=1+3=4$；

(3)根据函数的定义，在$[0,1]$上，函数的图形为曲线 $y=2\sqrt{x}$，在$(1,+\infty)$上，函数的图形为直线 $y=1+x$，该函数的图形如图 1-2 所示.

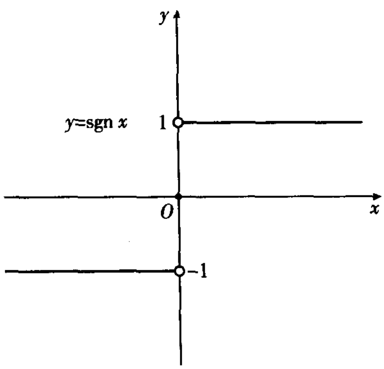

图 1-1

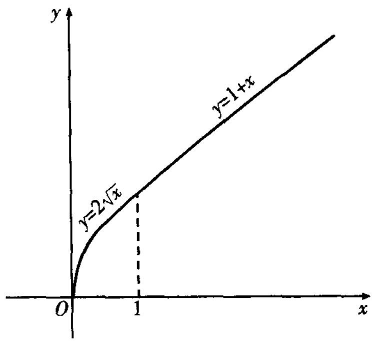

图 1-2

例 4　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$，例如

$$\left[\frac{4}{9}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-3.6]=-4$$

把 x 看成自变量，则函数 $y=[x]$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=Z$，其图形为阶梯曲线，在 x 为整数值处发生跳跃，跃度为 1，此函数称为取整函数.

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $A\subset D$. 如果存在正数 M，使得对于一切 $x\in A$，有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上有界，如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 A 上无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$、$f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为存在正数 $M=1$，无论 x 取任何实数，都有 $|\sin x| \leqslant 1$、$|\cos x| \leqslant 1$. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立，事实上，对于任意取定的正数 M（不妨设 $M>1$），则 $\frac{1}{2M} \in (0,1)$，当 $x_1=\frac{1}{2M}$ 时，$\left|\frac{1}{x_1}\right|=2M>M$，但是 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，例如可取 $M=1$ 而使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 对于区间 $(1,2)$ 内的一切 x 都成立.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的，区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调增区间；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的，区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调减区间.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如，函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的；$y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在 $[0,+\infty)$ 单调增加，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称（即若 $x \in D$，则必有 $-x \in D$）. 如果对于任何 $x \in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为奇函数. 如果对于任何 $x \in D$，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，$f(x)=\sin x$ 是奇函数，$f(x)=\cos x$ 是偶函数，$f(x)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在不为零的数 T，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x+T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 如果 $T>0$，并且它是 $f(x)$ 的所有正的周期中最小的，则称 T 为 $f(x)$ 的最小正周期. 通常我们所说的周期函数的周期都是指其最小正周期.

例如函数 $\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$\tan x$、$\cot x$ 都是以 π 为周期的函数.

以 T 为周期的周期函数，在整个定义域内的每个长度为 T 的区间上，其图形有相同的形状.

三、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 一般地，对于任一数值 $y\in W$，D 上至少可以确定一个数值 x 与之对应，这个数值 x 适合关系

$$f(x)=y$$

这里如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，按照函数概念，就得到一个新的函数 $x=\varphi(y)$，则称这个新的函数为函数 $f(x)$ 的反函数，可记作 $x=f^{-1}(y)$；相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 我们习惯上把自变量用 x 表示，把因变量用 y 表示，这时 $x=f^{-1}(y)$ 可按习惯表示为 $y=f^{-1}(x)$，因为函数的实质是对应关系，我们改变的只是表示自变量和因变量的字母，而没有改变对应关系，所以 $x=f^{-1}(y)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 实质上还是同一个函数.

在同一个坐标平面上，函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是相同的，但 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的(图 1-3). 因为如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点，则 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点，反之，若 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 上的点，则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点，而 $P(a,b)$ 和 $Q(b,a)$ 关于直线 $y=x$ 是对称的(即直线 $y=x$ 垂直且平分线段 PQ).

一般来讲，虽然 $y=f(x)$ 是单值函数，但其反函数不一定是单值函数，这是因为直接函数 $y=f(x)$ 的定义中并没有限定 $x_1\neq x_2$ 时，$y_1\neq y_2$，那么对同一个 y，可