

普通高等教育“十一五”精品课程建设教材

高等

GAODENGSHUXUE

数学

刘振忠 杨树国 董继学 主编



中国农业大学出版社

普通高等教育“十一五”精品课程建设教材

高等数学

刘振忠 杨树国 董继学 主编

中国农业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘振忠等主编. — 北京:中国农业大学出版社,2006.9
普通高等教育“十一五”精品课程建设教材
ISBN 7-81117-072-8

I. 高… II. 刘… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 095903 号

书 名 高等数学

作 者 刘振忠 杨树国 董继学 主编

策划编辑 张秀环

责任编辑 洪重光 冯雪梅

封面设计 郑 川

责任校对 王晓凤 陈 莹

出版发行 中国农业大学出版社

社 址 北京市海淀区圆明园西路 2 号

邮政编码 100094

电 话 发行部 010-62731190,2620

读者服务部 010-62732336

编辑部 010-62732617,2618

出 版 部 010-62733440

网 址 <http://www.cau.edu.cn/caup>

e-mail:cbsszs @ cau.edu.cn

经 销 新华书店

印 刷 涿州市星河印刷有限公司

版 次 2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

规 格 787×980 16 开本 25 印张 457 千字

印 数 1~3 000

定 价 32.00 元

图书如有质量问题本社发行部负责调换

前 言

为了适应高等教育大众化形势的要求,我们组织编写了这部精品课程教材。

目前,教育部、农业部已经组织编写了一大批面向 21 世纪和“十一五”规划教材,极大提高了农业院校数学类课程教材的水平,学校选择和使用教材的余地大为增加。本书的特色具有以下几个方面。

1. 在适应性上,本教材针对我国高等教育实行扩招和多层次办学的实际,考虑了普通农业院校学生的实际水平,本着起点适当降低、难度分散处理,注重联系生产和生活的实际的原则,因此本教材适合于作为普通农业院校特别是实行扩招的农业院校的生物类、管理类高等数学教材。

2. 在内容的处理上,本着以上编写原则,适当地减少课程难度,减少难度大的推导和证明,在保证课程系统性的前提下,删减了部分内容。

3. 在与实践结合上,注意到了数学知识的实际应用,给出了数学知识在社会生活、农业科学和经济方面实际应用的例子。

本书由黑龙江八一农垦大学、吉林农业大学、莱阳农学院联合编写,由刘振忠教授,杨树国、董继学副教授担任主编,编写分工为杨树国(第一章),范雪飞(第二章),王增辉(第三章),王忠瑞(第四章),刘振忠(第五章),董继学(第六章),朱桂英(第七章),于晓秋(第八章、习题及习题参考答案),袁玉萍(第九章),参加编写的还有黑龙江八一农垦大学数学系的张巧生、田宏、杨洪等。

本书由黑龙江八一农垦大学数学系徐梅教授担任主审。

目 录

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数	1
一、函数的概念	1
二、函数的几种特性	3
三、反函数	5
四、基本初等函数	6
五、复合函数及初等函数	9
习题 1-1	10
第二节 数列的极限	11
一、极限的思想	12
二、数列的概念及几个特性	12
三、数列的极限	13
四、收敛数列的性质	16
习题 1-2	16
第三节 函数的极限	16
一、自变量趋于无穷大时函数的极限	17
二、自变量趋于有限值时函数的极限	18
三、极限的性质	20
习题 1-3	21
第四节 无穷小与无穷大	21
一、无穷小	21
二、无穷大	23
三、无穷小和无穷大的关系	24
习题 1-4	24
第五节 极限的运算法则	25
一、极限的运算法则	25
二、极限求法举例	26
三、复合函数的极限运算法则	28

习题 1-5	29
第六节 极限的存在准则 两个重要极限	29
一、极限的存在准则	29
二、两个重要极限	30
习题 1-6	32
第七节 无穷小的比较	33
习题 1-7	34
第八节 函数的连续与间断点	35
一、函数的连续性	35
二、函数的间断点	37
习题 1-8	39
第九节 初等函数的连续性	39
一、连续函数的四则运算	39
二、复合函数与反函数的连续性	40
三、初等函数的连续性	41
四、闭区间上连续函数的性质	41
习题 1-9	43
第二章 导数与微分	45
第一节 导数的概念	45
一、变化率问题	45
二、导数的概念	46
三、求导举例	48
四、导数的几何意义	50
五、函数的可导性与连续性的关系	52
习题 2-1	53
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则	54
一、函数和、差的求导法则	54
二、函数积的求导法则	55
三、函数商的求导法则	56
习题 2-2	58
第三节 反函数与复合函数的求导法则	59
一、反函数的求导法则	59
二、复合函数的求导法则	61

习题 2-3	63
第四节 初等函数的求导问题	64
一、常数和基本初等函数的导数公式	64
二、函数的和、差、积、商的求导法则	65
三、复合函数的求导法则	65
习题 2-4	66
第五节 高阶导数	66
习题 2-5	68
第六节 隐函数的导数	69
一、隐函数的导数	69
二、对数求导法	71
习题 2-6	72
第七节 由参数方程所确定的函数的导数	73
习题 2-7	76
第八节 函数的微分	77
一、微分的定义	77
二、微分的几何意义	79
三、微分公式与微分运算法则	80
四、微分在近似计算中的应用	81
习题 2-8	83
第三章 中值定理与导数的应用	85
第一节 微分中值定理	85
一、罗尔定理	85
二、拉格朗日中值定理	87
三、柯西中值定理	90
习题 3-1	91
第二节 洛必达法则	92
习题 3-2	96
第三节 泰勒(Taylor)公式	96
习题 3-3	100
第四节 函数单调性的判定	100
习题 3-4	102
第五节 函数的极值及其求法	103

习题 3-5	106
第六节 函数的最大值与最小值	107
习题 3-6	109
第七节 曲线的凹凸与拐点	111
习题 3-7	113
第八节 函数图形的描绘	114
习题 3-8	116
第四章 不定积分	117
第一节 不定积分的基本概念与性质	117
一、原函数与不定积分的概念	117
二、不定积分的基本性质	119
三、不定积分的基本公式	120
四、简单不定积分的计算	121
习题 4-1	122
第二节 换元积分法	123
一、第一类换元积分法	123
二、第二类换元积分法	127
习题 4-2	131
第三节 分部积分法	132
习题 4-3	136
第四节 几种特殊函数的不定积分	137
一、有理函数积分	137
二、三角函数有理式的积分	139
三、简单无理函数的积分	140
习题 4-4	141
第五节 不定积分在经济学中的应用	142
习题 4-5	144
第五章 定积分及其应用	145
第一节 定积分的概念与性质	145
一、定积分问题举例	145
二、定积分的定义	148
三、定积分的几何意义	149
四、定积分的性质	150

习题 5-1	153
第二节 微积分基本定理	154
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的关系	154
二、可变上限的定积分	154
三、牛顿—莱布尼茨公式	156
习题 5-2	158
第三节 定积分的计算	159
一、定积分的换元积分法	159
二、定积分的分部积分法	163
习题 5-3	164
第四节 定积分的近似计算	166
一、矩形法	166
二、梯形法	167
习题 5-4	168
第五节 定积分的应用	168
一、定积分的微元法	168
二、平面图形的面积	169
三、体积	173
四、平面曲线的弧长	176
五、变力做功	178
六、在经济学中的应用	179
习题 5-5	180
第六节 广义积分	181
一、无穷区间上的广义积分	181
二、无界函数的广义积分	183
习题 5-6	185
第六章 多元函数的微分学	187
第一节 空间解析几何的基本知识	187
一、空间直角坐标系	187
二、几种特殊的曲面	191
三、空间曲线	197
习题 6-1	200
第二节 二元函数的概念	201

一、基本概念	201
二、多元函数的概念	202
三、二元函数的极限与连续	204
习题 6-2	207
第三节 偏导数	208
一、偏导数的定义及其计算方法	208
二、高阶偏导数	212
习题 6-3	213
第四节 全微分及其应用	214
一、全微分的定义	214
二、全微分在近似计算中的应用	218
习题 6-4	219
第五节 多元复合函数的求导法则	219
习题 6-5	222
第六节 隐函数的求导公式	223
习题 6-6	226
第七节 多元函数的极值	226
一、二元函数的极值	227
二、最大值与最小值	229
三、条件极值 拉格朗日乘数法	231
习题 6-7	234
第七章 重积分	235
第一节 二重积分的概念与性质	235
一、二重积分的概念	235
二、二重积分的性质	238
习题 7-1	240
第二节 二重积分的计算法	241
一、利用直角坐标计算二重积分	241
二、利用极坐标计算二重积分	249
习题 7-2	254
第三节 二重积分的应用	256
一、曲面的面积	256
二、平面薄片的重心	258

三、平面薄片的转动惯量	259
四、平面薄片对质点的引力	260
习题 7-3	261
第四节 三重积分的概念及其算法	262
习题 7-4	265
第五节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	266
一、利用柱面坐标计算三重积分	266
二、利用球面坐标计算三重积分	268
习题 7-5	271
第八章 微分方程	273
第一节 微分方程的基本概念	273
习题 8-1	279
第二节 变量分离方程	279
习题 8-2	281
第三节 齐次方程	282
习题 8-3	284
第四节 一阶线性微分方程	285
一、一阶线性微分方程	285
二、伯努利方程	288
习题 8-4	289
第五节 可降阶的高阶微分方程	290
一、 $y''=f(x)$ 型的微分方程	291
二、 $y''=f(x,y')$ 型的微分方程	292
三、 $y''=f(y,y')$ 型的微分方程	293
习题 8-5	294
第六节 二阶线性微分方程	295
一、二阶常系数齐次线性微分方程	295
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	299
习题 8-6	303
第九章 无穷级数	305
第一节 无穷级数的概念和性质	305
一、无穷级数的概念	305
二、无穷级数的基本性质和级数收敛的必要条件	310

习题 9-1	311
第二节 常数项级数的审敛法	312
一、正项级数及其审敛法	312
二、交错级数及其审敛法	317
三、绝对收敛与条件收敛	318
习题 9-2	320
第三节 幂级数	321
一、函数项级数	321
二、幂级数及其收敛性	321
三、幂级数的运算	325
习题 9-3	327
第四节 函数的幂级数展开	328
一、函数展开为泰勒级数	328
二、函数展开成幂级数	329
习题 9-4	335
第五节 幂级数展开式的应用	335
一、近似计算	335
二、欧拉公式	338
习题 9-5	339
第六节 傅立叶级数	339
一、周期函数和三角级数	339
二、函数展开成傅立叶级数	341
习题 9-6	345
第七节 正弦级数和余弦级数	346
一、奇函数和偶函数的傅立叶级数	346
二、函数展开成正弦级数或余弦级数	349
习题 9-7	351
第八节 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数	351
习题 9-8	354
习题参考答案	355
参考文献	383

第一章 函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象. 极限方法则是高等数学中研究问题的一种基本方法. 本章在复习函数有关知识的基础上, 着重介绍极限的概念和函数的连续性.

第一节 函 数

一、函数的概念

在一个自然现象或技术过程中, 往往同时有几个变量在变化着, 它们并不是孤立地变化着, 而是相互联系并遵循着一定的变化规律, 现在我们先就两个变量的情形(多于两个变量的情形在第六章再讲)举几个例子.

例 1 圆的面积

考虑圆的面积 A 与它们的半径 r 之间的相依关系. 大家知道, 它们之间符合如下公式:

$$A = \pi r^2$$

当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时, 由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 2 自由落体运动

设物体下落的时间为 t , 落下的距离为 s . 假定开始下落的时刻为 $t=0$, 那么 s 与 t 之间的相依关系符合如下公式:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

式中 g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$, 那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时, 由上式就可以确定 s 的相应数值.

撇开这两个例子所涉及的变量的实际意义不谈, 我们就会发现, 它们都反映了两个变量之间的相依关系, 这种相依关系由一种对应法则来确定, 根据这种对应法则, 当其中的一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时, 另一个变量就有确定

的值与之对应,两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$, 当 x_0 遍取 D 的各个数值时, 对应的函数值全体组成的数集 $W = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

函数 $y = f(x)$ 中, 表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母, 例如“ ϕ ”, “ φ ”等, 这时函数就记作 $y = \phi(x)$, $y = \varphi(x)$ 等. 对应法则和定义域是函数概念的两个要素, 很多函数的对应法则可用表格、图像或解析式等表示, 定义域一般可用区间表示.

在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的, 如例 1 中, 定义域 $D = (0, +\infty)$; 例 2 中, 定义域 $D = [0, T]$.

在数学中, 有时不考虑函数的实际意义, 而抽象地研究用解析式表达的函数, 这时我们约定: 函数的定义域就是自变量能够取到的使解析式有意义的一切实数值. 例如函数 $y = \sqrt{4-x^2}$ 的定义域就是闭区间 $[-2, 2]$, 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 就是开区间 $(-1, 1)$.

如果自变量在定义域内任取一个数值时, 对应的函数值有且只有一个, 则称这种函数为单值函数, 否则称之为多值函数, 本书的函数若没有特殊说明, 都是指单值函数.

在定义域的不同范围内用不同的式子表示的函数, 称为分段函数.

例如, 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数, 它就是一个分段函数, 其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$, 其图形如图 1-1 所示. 对于任何实数 x , 有: $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$.

例 3 已知分段函数

$$y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & \text{当 } x > 1 \end{cases}$$

试求：

(1) 函数的定义域, 值域;

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(3)$;

(3) 画出函数的图形.

解 (1) 函数的定义域为 $D=[0, +\infty)$, 值域为 $W=[0, +\infty)$;

(2) 因为 $\frac{1}{2} \in [0, 1]$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $1 \in [0, 1]$, 所以 $f(1) = 2\sqrt{1} = 2$;
 $3 \in (1, +\infty)$, 所以 $f(3) = 1 + 3 = 4$;

(3) 根据函数的定义, 在 $[0, 1]$ 上, 函数的图形为曲线 $y = 2\sqrt{x}$, 在 $(1, +\infty)$ 上, 函数的图形为直线 $y = 1 + x$, 该函数的图形如图 1-2 所示.

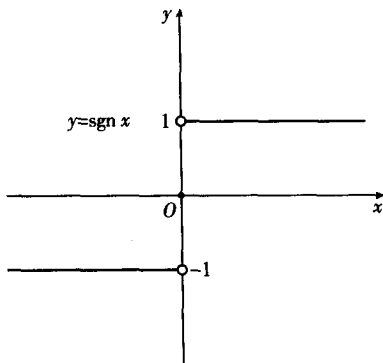


图 1-1

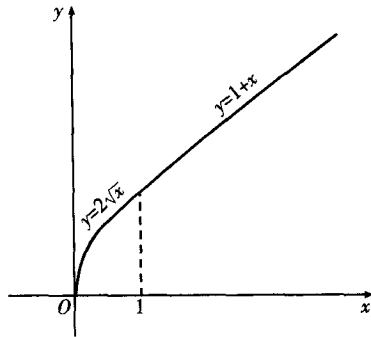


图 1-2

例 4 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$, 例如

$$\left[\frac{4}{9}\right] = 0, [\sqrt{2}] = 1, [\pi] = 3, [-1] = -1, [-3.6] = -4$$

把 x 看成自变量, 则函数 $y = [x]$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \mathbb{Z}$, 其图形为阶梯曲线, 在 x 为整数值处发生跳跃, 跃度为 1, 此函数称为取整函数.

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $A \subset D$. 如果存在正数 M , 使得对于一切 $x \in A$, 有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上有界, 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 A 上无界.

例如, 函数 $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 因为存在正数 $M=1$, 无论 x 取任何实数, 都有 $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 因为不存在这样的正数 M , 使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leq M$ 对于 $(0, 1)$ 内的一切 x 都成立, 事实上, 对于任意取定的正数 M (不妨设 $M > 1$), 则 $\frac{1}{2M} \in (0, 1)$, 当 $x_1 = \frac{1}{2M}$ 时, $\left|\frac{1}{x_1}\right| = 2M > M$, 但是 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内是有界的, 例如可取 $M=1$ 而使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$ 对于区间 $(1, 2)$ 内的一切 x 都成立.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的, 区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调增区间; 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的, 区间 I 为函数 $f(x)$ 的单调减区间.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如, 函数 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的; $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调减少, 在 $[0, +\infty)$ 单调增加, 但在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称 (即若 $x \in D$, 则必有一 $x \in D$). 如果对于任何 $x \in D$, 恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数. 如果对于任何 $x \in D$, 恒有

$$f(-x) = f(x)$$

成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如, $f(x) = \sin x$ 是奇函数, $f(x) = \cos x$ 是偶函数, $f(x) = \sin x + \cos x$ 既非奇函数, 也非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于坐标原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在不为零的数 T , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $(x+T) \in D$, 且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 如果 $T > 0$, 并且它是 $f(x)$ 的所有正的周期中最小的, 则称 T 为 $f(x)$ 的最小正周期. 通常我们所说的周期函数的周期都是指其最小正周期.

例如函数 $\sin x$ 、 $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; $\tan x$ 、 $\cot x$ 都是以 π 为周期的函数.

以 T 为周期的周期函数, 在整个定义域内的每个长度为 T 的区间上, 其图形有相同的形状.

三、反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 一般地, 对于任一数值 $y \in W$, D 上至少可以确定一个数值 x 与之对应, 这个数值 x 适合关系

$$f(x) = y$$

这里如果把 y 看作自变量, x 看作因变量, 按照函数概念, 就得到一个新的函数 $x = \varphi(y)$, 则称这个新的函数为函数 $f(x)$ 的反函数, 可记作 $x = f^{-1}(y)$; 相对于反函数 $x = f^{-1}(y)$ 来说, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数. 我们习惯上把自变量用 x 表示, 把因变量用 y 表示, 这时 $x = f^{-1}(y)$ 可按习惯表示为 $y = f^{-1}(x)$, 因为函数的实质是对应关系, 我们改变的只是表示自变量和因变量的字母, 而没有改变对应关系, 所以 $x = f^{-1}(y)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 实质上还是同一个函数.

在同一个坐标平面上, 函数 $y = f(x)$ 和其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是相同的, 但 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 是对称的 (图 1-3). 因为如果 $P(a, b)$ 是 $y = f(x)$ 图形上的点, 则 $Q(b, a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 图形上的点, 反之, 若 $Q(b, a)$ 是 $y = f^{-1}(x)$ 上的点, 则 $P(a, b)$ 是 $y = f(x)$ 图形上的点, 而 $P(a, b)$ 和 $Q(b, a)$ 关于直线 $y = x$ 是对称的 (即直线 $y = x$ 垂直且平分线段 PQ).

一般来讲, 虽然 $y = f(x)$ 是单值函数, 但其反函数不一定是单值函数, 这是因为直接函数 $y = f(x)$ 的定义中并没有限定 $x_1 \neq x_2$ 时, $y_1 \neq y_2$, 那么对同一个 y , 可