全国高等学校1957年暑期招生

上海考区数学試卷的分析研究

上海市教育局教学研究室

华东师范大学出版社出版

全国高等学校 1957 年暑期招生
上海考区数学試卷的分析研究
上海市教育局教学研究室

*

华东师范大学出版社出版
(上海中山北路 3663 号)
上海市書刊出版業營業許可證出〇八八号
华新日历印刷厂印刷　新华書店上海发行所发行

*

开本787×1092耗 1/16　印張 1 1/2　字数 34,000
1958 年 5 月第一版
1958 年 6 月第二次印刷
印數50,001—100,000

統一書号：7135・7

定　　价：(5)0.12元

全国高等学校1957年暑期招生

上海考区数学試卷的分析研究

上海市教育局教学研究室

我室为了了解本市高中学生的数学知識质量和中学数学教学的情况，进行了全国高等学校1957年暑期招生上海考区数学試卷的分析工作。我們分析研究的对象是从上海考区第七考場中任意抽出的500份試卷，这500个考生包括了本市17所不同类型的中学的部份应届毕业生。从成績統計来看，与本市第一类考生的成績是較接近的，(这500个考生与本市第一类考生的中数恰都是49.5分；总分在60分以上的占总人数的百分率，前者是28.8%，后者是31.8%)所以我們认为这次分析的結果可以反映本市1956－1957学年度应届高中毕业生的一般水平及本市一般中学的数学教学情况的。

在分析过程中，先由我室数学組根据試卷內容作出各种統計，提出初步分析意見，并邀請华东师范大学及上海第二师范学院数学系原担任閱卷工作的部分同志参加討論，确定了分析重点，再由我室归納写成初稿，然后由上述两单位的部分同志就初稿提供意見，最后由我室修改补充，写出了这份分析研究报告。

在这份报告中，我們分成績統計、逐題討論、結論三部分来叙述。在逐題討論中，包括試題、解答和評分标准、考查目的、成績統計、質量分析等部分，对部份試題我們还提出了命題研究。我們所发表的解答是按照一般考生所实际采用的、符合大綱要求的解法，为了节省篇幅，略去了一些中間步驟，因此并不是标准的詳解。我們所发表的評分标准是参考招生委員会的参考标准并参照試卷中实际評分情况拟定的，因此也不一定完全符合全国各考区的实际評分情况。最后的結論部份是我們在逐題討論的基础上归納出的几点意見，供教师們在今后教学中参考。

由于这种分析研究是非常細致的工作，限于我們的水平，分析可能不够全面深入，意見也可能还不确当，希望同志們加以批評。

一　成績統計

1. 总成績統計表

	及格					不及格					
分数	100	99–90	89–80	79–70	69–60	59–50	49–40	39–30	29–20	19–8	7
人数	1	15	20	50	58	89	99	101	43	23	1
	144					289			67		
占总人数百分率	28.8%					57.8%			13.4%		

2. 逐題均分統計表

題次	滿分	实得	折成百分数
Ⅰ. 甲	7	6.296	89.9
Ⅰ. 乙	7	5.678	81.1
Ⅰ. 丙	7	5.514	73.1
Ⅰ. 丁	7	4.626	66.1
Ⅰ. 戊	7	1.450	20.7
Ⅱ.	15	10.780	71.9
Ⅲ.	15	6.082	40.5
Ⅳ.	17	3.568	21.0
Ⅴ.	18	6.566	36.5
总计	100	50.560	

二　逐題討論

I. 甲、化簡$\left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+0.1^{-2}+\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$。

1. 解答及評分标准：

〔解〕 $\left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+0.1^{-2}+\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$$=\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{0.1^2}+\frac{1}{\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^2}+\frac{1}{\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{5}{3}+100+\frac{9}{16}=1\frac{2}{3}+100+\frac{9}{16}=102\frac{11}{48}$$

〔評分〕每項化簡正确者各評2分，不完备者評1分，全对者評7分。

2. 考查目的：分指数和負指数的意义以及指数定律$(a^m)^n=a^{mn}$（当m、n为有理数）的应用。

3. 成績統計：

分　　数	7	6	5—4	3—2	0
人　　数	311	97	76	15	1
占总人数百分率(%)	62.2	19.4	15.2	3.0	0.2

4. 质量分析：本題是各題中得分率最高的一題。从成績統計中可以看到大多数考生对于分指数和負指数的意义是明确的；但是对于这个簡單的基本概念还有着92人（占18.4%）不完全明确，发生了各种各样的錯誤，这就应該引起我們的重視。

关于化簡$\left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$，极大多数考生都是应用分指数意义，先化为$\sqrt{\frac{25}{9}}$，而得$\frac{5}{3}$。但有4人沒有注意到算术根的概念，把它化成$\pm\frac{5}{3}$而錯誤地得出了两个答案。

关于化簡0.1^{-2}，有26人发生錯誤，綜合起来有下列二种原因：

(i) 不了解負指数的意义：有5人錯認为$0.1^{-2}=0.1^2=\frac{1}{100}$；有4人錯認为$0.1^{-2}=\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}=\sqrt{10}$；有1人錯認为$0.1^{-2}=-0.1^2=-0.01$。

(ii) 虽然掌握了負指数的意义，但在計算上发生了錯誤。有9人忽略了$\frac{1}{\frac{1}{100}}=100$而錯誤获得$\frac{1}{100}$，余7人錯誤获得$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{1000}$，10等。

关于化簡$\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$，有52人发生錯誤，綜合起来也有下列二种原因：

(i) 不了解負分指数意义：有10人錯誤認为$\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{64}{27}\right)^2}$，有1人錯認为$\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=\sqrt{\left(\frac{27}{64}\right)^3}$，有1人錯認为$\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=-\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$。

(ii) 虽然掌握了負分指数的意义，但在計算上发生了錯誤。因此有40人虽然把$\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$化成了$\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{64}{27}\right)^2}}$但其中有28人忽略了平方的步驟，而錯誤获得$\frac{3}{4}$，$\frac{9}{4}$，$\frac{9}{64}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{81}{16}$等結果，另外的12人忽略了倒数的步驟，因此錯誤获得了$\frac{16}{9}$的結果。

关于$\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$的化簡，合理的方法是利用指数定律$(a^m)^n=a^{mn}$，即　$\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，但有4人沒有掌握这一点，因此造成了运算过程很煩复，例如：

$$\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{64}{27}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{64\times64}{27\times27}}}=\frac{1}{\frac{16}{9}}=\frac{9}{16}$$

或

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{4096}{729}}}=\frac{9}{16}$$

从成績統計中，发现的另一个严重缺点是有97人（占19.4%），虽然达到了$\frac{5}{3}+100+\frac{9}{16}$这一步驟，但由于分数加法的运算不熟練而得不出最后的正确結果。造成錯誤的原因主要有以下三种：

(i) 在通分中发生了錯誤。发生这种錯誤的达51人，其中有16人把16看成公分母，有26人沒有注意分子分母同倍数扩大，有8人把0.48取作公分母（显然对倍数意义是模糊的），其中6人因而陷于錯誤。

(ii) 在假分数化带分数中发生了錯誤。在这方面发生錯誤的也有24人，其中12人在得出了結果$\frac{4907}{48}$

后，因为除法中的錯誤，得出了不正确的結果$12\frac{11}{48}$。

(iii)采用了小数的运算。有5人在得到$\frac{5}{3}+100+\frac{9}{16}$后，化成了小数$1.66+100+0.56=102.22$，有18人得出了結果$\frac{4907}{48}$后化成小数102.2或102.23，在变换的过程中都沒有用近似值符号“≐”，也沒有指出精确度，因此都不能認为是正确的。事实上本題是化简題幷不是求值題，因而我們不需要把$\frac{4907}{48}$化为小数而取精确到某种程度的近似值，更不必要在运算过程中把$\frac{5}{3}$，$\frac{9}{16}$化为小数去运算。

此外还有一些个别的严重錯誤，如把$\frac{9}{16}$約成$\frac{3}{4}$，把$2\frac{10}{27}$化成$\frac{2\times27\times10}{27}$等，更反映出了对分数运算的技能薄弱。

乙、求适合不等式$x^2+x<2$的实数x的范圍。

1. 解答及評分标准：

〔解一〕 $x^2+x<2$，$x^2+x-2<0$，

$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)>0$， 二次三項式$x^2+x-2$的根是$-2$和1。

当$-2<x<1$的时候，x^2+x-2和1異号。

因此，原不等式的解是$-2<x<1$。

〔評分〕二次三項式两根求出者4分；如两根求錯，而下面概念清楚者3分；全对7分。

〔解二〕 $x^2+x<2$，$x^2+x-2<0$，

$$(x-1)(x+2)<0 \qquad (1)$$

要解上面的不等式，則需解下列两个一次不等式組

$$\begin{cases}x-1<0\\x+2>0\end{cases} \qquad \begin{cases}x-1>0\\x+2<0\end{cases} \qquad (2)$$

即

$$\begin{cases}x<1\\x>-2\end{cases} \qquad \begin{cases}x>1\\x<-2\end{cases} \qquad (3)$$

由于第一个一次不等式組公解是$-2<x<1$，而第二个一次不等式組沒有公解，所以原不等式的解是

$$-2<x<1 \qquad (4)$$

〔評分〕达到(1)2分；达到(2)4分；达到(3)5分；全对7分。

2. 考查目的：一元二次不等式的解法——可以应用二次三項式的符号性質去解（如解一）；或应用不等式同解原理而变换为一元一次不等式組去解（如解二）。

3. 成績統計：

分数	7	6—5	4—3	2—1	0
人数	363	20	23	59	35
占总人数百分率(%)	72.6	4.0	4.6	11.8	7.0

4. 質量分析：本題在各題中得分率仅次于I甲，从成績統計中全对的有363人（占72.6%），可見大多数考生对一元二次不等式的解法是能夠掌握的。

本題約有$\frac{2}{3}$考生采用了第一种解法，其中有68人能把二次三項式的符号性質应用到解一元二次不等式中，敍述得很清楚，更有11人能联系到二次函数的图象，把解答更直观地表达出来，說明了他們是能在理解的基础上作出正确的結論。但我們也发現了采用这种解法的考生中有着以下一些主要的缺点和錯誤：

(i) 有17人純粹用一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$的解法公式，即当$\Delta>0$，如$a>0$，解答在两根之外，如$a<0$，解答在两根之間。因而他們首先把$x^2+x-2<0$变为它的同解不等式 $-x^2-x+2>0$，再由于$-x^2-x+2$的判別式是大于零，因而求出它的两个相異实根-2，1。由于$a=-1<0$，因得$-2<x<1$。这种丢开二次三項式的符号性質；而把最后結論当做公式机械地去解題，是不妥当的。这里面由于首項为負号带来麻煩及公式混淆，因而带来錯誤的有7人。

(ii) 沒有全面地掌握一元二次不等式的解法。有4人只記住了“一元二次不等式$ax^2+bx+c<0$，当$\Delta<0$，$a<0$时有解”，而忽略了$\Delta>0$时这个不等式一定有解的情况，因此錯誤地得出了本題无解的結論。

(iii)对于实数的概念不熟悉。有2人在得出了結果$-2<x<1$后，錯認为实数一定是正数，而認为答案是$0<x<1$。

(iv) 对x在两实数之間不会表示。有5人虽然作出了解在两根之間的結論，但却表示为 $x>-2$，$x<1$。說明了他們对怎样表示在-2与1之間的实数是模糊的。

本題約有$\frac{1}{3}$考生采用了第二种解法，采用这种解法的考生发生的錯誤主要有以下三种：

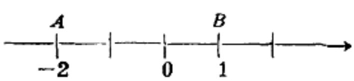
(i) 对不等式的同解原理不清楚，有4人錯認为不等式$(x-1)(x+2)<0$与一次不等式組

$\begin{cases}x-1<0\\x+2>0\end{cases}$ 同解，而忽略了这个不等式应該与两組一次不等式組：$(A)\begin{cases}x-1<0\\x+2>0\end{cases}$ 及 $(B)\begin{cases}x-1>0\\x+2<0\end{cases}$ 同解。

(ii) 不会解一次不等式組。有5人不知道不等式組(A)的公解是 $-2<x<1$，有4人不知道不等式組(B)沒有公解，而錯誤认为它的公解是 $1<x<-2$。我們認为如果采用現行課本中配合数軸的方法来解它是可以避免这种錯誤的。

(iii)不掌握不等式的意义。有21人根据方程 $(x+2)(x-1)=0$ 的两根可由方程 $x+2=0$，$x-1=0$ 求出，而錯認为不等式 $(x+2)(x-1)<0$ 的解可从 $x+2<0,x-1<0$ 求出。

除了上面我們所发表的两种解法外，我們发現有12人利用数軸来解。他們把 x^2+x-2 的两个相異实根 -2，1 求出后，馬上在数軸上把表示这两数的两点 A、B 描出来，再用零代入，由于 x^2+x-2 的值是 -2，



且 $-2<0$，表明适合这个不等式，又因0在两根之間，那就表示两根之間的实数集合适合这个不等式，即 $-2<x<1$。

这种解法可避免教条式的去記忆二次三項式的符号性質，也是可取的。

在本題的解答中需要用到求二次三項式的根，从分析中我們也发現有少数考生对此不熟練。利用根的公式来解的考生中有5人把 Δ 算錯，有1人竟認为根的公式是 $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{4a}$；利用因式分解来解的考生中有11人沒有仔細观察和复核，而錯誤获得两根是 -1，2；1，2；或 -1，-2。

丙、求証：$\cot 22°30'=1+\sqrt{2}$。

(註) cot 是余切的符号。

1. 解答及評分标准：

〔解一〕

$$\cot 22°30'=\cot\frac{45°}{2} \quad (1)$$

$$=\frac{1}{\tan\frac{45°}{2}}=\frac{1}{\frac{\sin 45°}{1+\cos 45°}}$$

$$=\frac{1+\cos 45°}{\sin 45°}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (2)$$

$$=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}。$$

〔評分〕达到(1) 1分；达到(2) 4分；下面如果演算有錯誤5分；全对7分。

〔解二〕 $\cot 22°30'=\cot\frac{45°}{2}$ (1)

$$=\frac{\cos\frac{45°}{2}}{\sin\frac{45°}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{1-\cos 45°}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}} \quad (2)$$

$$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}$$

$$=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}。$$

〔評分〕达到(1) 1分；达到(2) 4分；下面如果演算有錯誤5分；全对7分。

2. 考查目的：(i)已知角 $22°30'$ 与 $45°$ 角的关系及 $45°$ 角的函数值。(ii) 半角公式的应用。(iii)根式化簡。

3. 成績統計：

分数	7	6	5—4	3—2	1	0
人数	336	36	30	13	12	73
占总人数百分率(%)	67.2	7.2	6.0	2.6	2.4	14.6

4. 質量分析：

本題考查的內容只涉及一些基本的知識，运算过程也不复杂，从成績統計中，虽然有着74%以上考生能夠或基本上能夠滿足考查要求，但本題竟有73人未得分(占14.6%)，其中有58人未做，这还足以引起我們重視的。

由于本題是个証明題，因此只要考生找到了証明的途徑，在变換过程中发生錯誤的可能性比較少，主要的錯誤还是在于死記硬背、記錯了余切的半角公式和根式的运算不熟練。

从分析中，得到滿分或接近滿分的考生中，我們发現有較多考生不直接运用余切的半角公式，而由正切的半角公式过渡，这样可以少記忆一些次要的公式，我們認为是好的。

由于半角公式記忆比較麻煩，而且容易发生錯誤，

我們发現有27人不直接运用半角公式而利用倍角公式来証明:

(i) 有12人令$22°30'=x$,由 $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

及 $\tan 2x=1$,得出方程 $1=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$,解得

$\tan x=-1\pm\sqrt{2}$。

因 $\tan x>0$,所以 $\tan x=-1+\sqrt{2}$,再由

$\cot x=\frac{1}{\tan x}$ 得出 $\cot 22°30'=1+\sqrt{2}$,

(ii) 有14人令$22°30'=x$,由 $\cot 2x=\frac{\cot^2 x-1}{2\cot x}$

及 $\cot 2x=1$ 得出方程 $1=\frac{\cot^2 x-1}{2\cot x}$。因 $\cot x>0$,

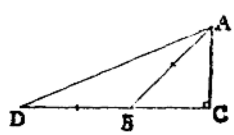
直接得出 $\cot 22°30'=1+\sqrt{2}$。

(iii)有1人令$22°30'=x$,由 $\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

及 $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 来証明。

这些途徑我們认为都是可取的。

(iv) 此外尚有1人采用了几何方法来証明也是很好的。取单位长为腰作等腰直角三角形 ABC($\angle C=90°$),再延长 CB 至 D 使 $DB=AB$。



$\because AB=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$,

$\therefore\ DB=\sqrt{2}$,

而 $DC=1+\sqrt{2}$。

又 $\because \angle ADC=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 45°=22°30'$,

且 $\cot\angle ADC=\frac{DC}{AC}$,

$\therefore\ \cot 22°30'=\frac{1+\sqrt{2}}{1}=1+\sqrt{2}$,

本題由于根式的运算不熟練而产生錯誤的有43人(占8.6%)。关于45°角的正弦和余弦值,我們发現采用$\frac{\sqrt{2}}{2}$者有273人,而采用$\frac{1}{\sqrt{2}}$者仅有42人,但事实上采用$\frac{1}{\sqrt{2}}$演算較簡。例如:

$$\cot 22°30'=\frac{1+\cos 45°}{\sin 45°}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1+\sqrt{2},$$

$$\cot 22°30'=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{1-\cos 45°}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=1+\sqrt{2}。$$

其次我們发現有6人按下法化簡:

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}$$

$$=\sqrt{\frac{6+4\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{2},$$

这是走了弯路。

5. 命題研究:

本題本質上是求特别角22°30的余切值,現在把它作为一个証明題提出,可以結合着考查考生关于根式的运算,使考生在获得結果 $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ 或 $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ 等后必須簡化成 $1+\sqrt{2}$,这样要求明确是很好的。

但是由于从証明題的形式出現,也带来了一些缺点:

(i) 有些考生得$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$等后直接就簡化成 $1+\sqrt{2}$,不易看出他們是否眞正掌握了簡化的法則。

(ii) 有些考生把它作为一般性的証明題来証;有的企图从右边推到左边,例如:

$$1+\sqrt{2}=\cot 45°+2\sin 45°,$$

下面因方法不熟練,无法推演下去而失敗了。

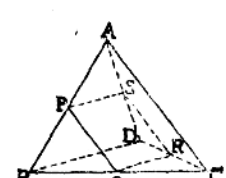
我們认为象这种类型的題目,写做証明題形式不如写做求值題形式来得好。例如本題可以改为求 $\cot 22°30'$ 的近似値(精确到0.01),这样也同样地可以使要求明确,同时还可考查考生关于近似計算的概念与能力。

丁、在四面体 $ABCD$ 中,$AC=BD$,P、Q、R、S依次为稜AB、BC、CD、DA的中点。求証 $PQRS$ 为一菱形。

1. 解答及評分标准:

〔証〕在 $\triangle ABD$ 中,

$\because P$、S 各为 AB、AD 的中点,$\therefore PS\parallel BD$,$PS=\frac{1}{2}BD$。



在$\triangle BCD$中,$\because$ Q、R 各为 BC、CD 的中点,

$\therefore\ QR\parallel BD$,$QR=\frac{1}{2}BD$。

$\therefore$ $PS \parallel QR, PS=QR$。

所以P、Q、R、S共面，而$PQRS$为一平行四边形。又因$AC=BD$，$PQ=\frac{1}{2}AC$，$PS=\frac{1}{2}BD$，$\therefore PQ=PS$。

$\therefore$ $PQRS$为一菱形。

〔評分〕(1) 仅証四边相等而沒有共面概念即断定为菱形者，評1分；

(2) 証出$PQRS$为平行四边形者，評3分；

(3) 証完評7分，如敍述不清、图形不正确者，評6分。

2. 考査目的：四面体的意义及空間直線的平行关系。

3. 成績統計：

分　数	7	6	5—4	3	2	1	0
人　数	202	79	43	42	10	77	47
占总人数百分率(%)	40.4	15.8	8.6	8.4	2.0	15.4	9.4

4. 質量分析：本題主要关鍵是証$PQRS$为平行四边形，如果証出后，那末問題便完全变成平面几何了。考生中有203人(占40.6%)完成了証明。有59人(占11.8%)他們是証$PQ \parallel SR$，$PQ=SR$及$PS \parallel QR$，$PS=QR$，才断定$PQRS$是一个平行四边形，这种証明用到的条件显然是多了，反而不严密，反映了他們掌握知識上存在缺咯。

本題考生发生的錯誤，主要原因綜合起来有：

(i) 不了解四面体的意义。有7人把四面体画成六面体，有3人把四面体画成五面体，有2人把四面体与四边形混淆，其中1人竟由已知条件中$AC=BD$而錯認为这个四面体是矩形。

(ii) 沒有注意到在空間要証明一个四边形是平行四边形必須先証出它的四个頂点共面。有64人(占12.8%)不証明四边形$PQRS$对边平行，而只是証明了这个四边形四边相等，就作出了这个四边形是菱形的結論；有4人在証出了$PQ=SR, PS=QR$后，就作出了$PQSR$是平行四边形的結論。

(iii) 对于四点共面的証法沒有掌握，确定平面的公理不会运用。有3人虽然知道要証明P、Q、R、S共面，但发生了錯誤。例如其中有1人說："过Q、R、S作一平面，过P、Q、S作一平面，这两平面相合"；又有1人說："过三点确定的平面必过另一点"。

(iv) 对菱形的概念模糊，有4人証出了$PQ \parallel SR$，$PQ=SR$；有5人証出了$PS \parallel RQ, PS=RQ, PQ \parallel SR$，$PQ=SR$；有1人証出了$PQ \parallel SQ$，$PS \parallel RQ$便作出$PQRS$是菱形的結論。

(v) 对判定菱形方法不会灵活运用，对"三角形两边中点的联綫的长等于第三边长的的一半"这个定理不熟悉。有11人在証出了$PQRS$是平行四边形后，不会运用已知条件$AC=BC$来証这个平行四边形的邻边$SR=QR$。其中8人企图根据"菱形的对角線互相垂直"的性質，有3人企图根据"菱形的对角線必平分对角"的性質去証明，都沒有获得成功。更有1人錯誤認为P、Q、R、S共圓，又錯認共圓后$PQ=PS$，而作出$PQRS$为菱形的結論。

在分析中我們还发現了一些考生对于作空間图形、文字表达和运用数学符号存在着缺陷和錯誤。

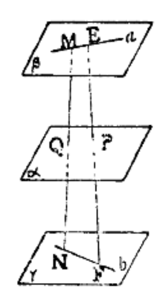
(i) 在試卷中只有81人(占16.2%)画出的四面体是有立体概念，而其余考生所画出的四面体都不象立体图形。說明了平日他們对这方面所受到的訓練是不夠的。

(ii) 有124人(占24.8%)运用了符号$PS \underline{\parallel} \frac{1}{2}QR$来代替$PS \parallel QR, PS=\frac{1}{2}QR$，这是不好的；又有10人在証明$PQRS$是平行四边形后，竟用符号$SR \underline{\parallel} PQ \underline{\parallel} QR \underline{\parallel} PS$来得出$PQRS$是菱形，有4人使用了語詞"由于这个四边形各边平行相等，所以是一个菱形"，都造成了語言表达上的錯誤。我們認为这是与他們平日对用正确的数学語言来表达所受到的培养太少有关的。

戊、設a、b为異面二直線，EF为a、b的公垂線，α为过EF中点且与a、b平行的平面，M为a上任一点，N为b上任一点。求証線段MN被平面α二等分。

(註)"異面二直線"也叫"不共面二直線"。

1. 解答及評分标准：



〔証〕由于α是与a、b平行的平面，过a作平面β与平面α平行，过b作平面γ与平面α平行。则$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$。

設EF中点为P，MN与平面α的交点为Q，

则 $\dfrac{MQ}{QN}=\dfrac{EP}{PF}$。

$\because EP=PF$，$\therefore MQ=QN$，即線段MN被平面α二等分。

〔評分〕(1)作出两平面β、γ；或仅用文字表达出，得出$\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$者，評3分。

(2) 全对評7分。如两平面β、γ 沒有作出，也沒有用文字表达出，扣2分，仅評5分。

2. 考查目的：(i) 異面直綫的意义，(ii) 直綫与平面互相平行的意义，(iii)两条直綫被三个平行平面所截，則对应綫段成比例。

3. 成績統計：

分　　数	7	6	5	4	3	2—1	0
人　　数	49	10	42	6	24	9	360
占总人数百分率(%)	9.8	2.0	8.4	1.2	4.8	1.8	72.0

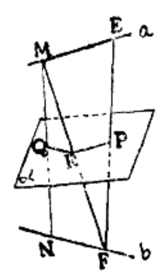
4. 质量分析：

本題是各題中得分率最低的一題，未得分的竟达360人(占72%)，其中未做的134人(占26.8%)，而能完成証明，包括基本上能完成証明的在内仅101人(占20.2%)。成績如此不好是特別值得引起重視的。

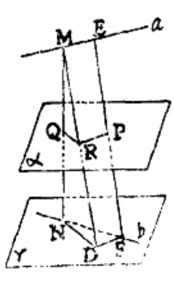
本題应用現行立体几何課本§13的定理"两条直綫被三个平行平面所截，对应綫段成比例"，自然最为簡单，考生中有35人(占7%)应用这个定理，其中只有22人作出了較完备的論証；有2人作出了平面β与平面γ，但忽略了証明这两个平面分別与平面∝平行这一重要步驟；其余11人虽知要用上述定理，但沒有作出平面β与平面γ，因此定理的应用缺少条件而陷于錯誤。

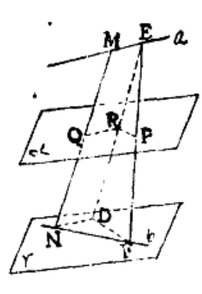
不应用上述定理来証明的，綜合起来有以下各种方法：

(i) 有29人連MF交∝平面于R点，連QR,RP；由于$QR \parallel NF$，$RP \parallel ME$而得証明，但其中有2人竟认为Q、R、P共綫，那就是承认$a \parallel b$，与題設a、b是異面直綫相冲突，因此是錯誤的。

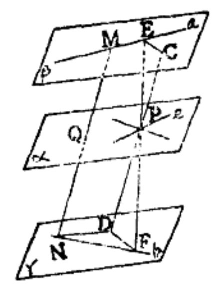


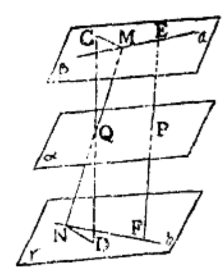
(ii) 有22人过M点作与EF的平行綫与平面∝交于R点而与平面γ交于D点(或設把EF平行移动到MD位置)。再連QR, RP而得証明，但其中有14人把D点落在直綫b上与原設a、b是異面直綫冲突造成錯誤；同样地有8人他們把MN平行移动到ED位置而証明，其中竟有7人和上面犯同样的錯誤。





(iii)有10人过P点作与MN的平行綫与平面β及平面γ各交于C、D点(或說把MN平行移动使过P点，得CD)，再連EC,DF。根据已知条件EF是a、b的公垂綫而証出EF垂直平面∝，又因$\beta \parallel \propto \parallel \gamma$，故$EF$也垂直平面β和平面γ，因而証出$\triangle PEC \cong \triangle PFD$而得証明；但其中有9人把$C$点落在綫$a$上，把$D$点落在直綫$b$上，而陷于錯誤；同样有11人他們把$EF$平行移动使过$Q$点，得$CD$而証明，其中竟有8人和上面犯同样的錯誤。



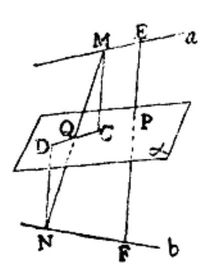


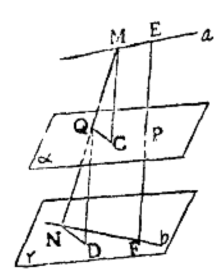
有30人(占6%)企图用下法証明：

作$MC \perp$平面∝，$ND \perp$平面∝。根据已知条件EF是a、b的公垂綫而証出EF垂直平面∝。

∴ $EP \parallel MC, EP = MC, FP \parallel ND, FP = ND$。

又 ∵ $EP = PF$，　∴ $MC = ND$。





連DC，∵ $MC \parallel ND$，∴ D、N、C、M共面而DC必过Q点。

又∵ $\angle MCQ = \angle NDQ = 90°$，$\angle MQC = \angle NQD$，

∴ $\triangle MQC \cong \triangle NQD$，　∴ $MQ = NQ$。

这样証明平面β和平面γ可以不做出，但一定要用EF是a、b公垂綫的条件，在証明过程中，由于一般

考生忽視 D、N、C、M 共面及 DC 必过 Q 点这两个主要关鍵，因而在 30 人中仅有 6 人敍述較明晰，余下的 24 人敍述很不清楚。

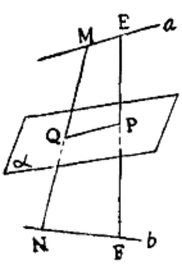
同样有 3 人他們作 $MC\perp\alpha$ 平面，$QD\perp\alpha$ 平面。再根据 EF 是平面 α 及平面 γ 的垂線証出 $\triangle MQC\cong\triangle NQD$ 而得証明，內中有 1 人把 D 点落在直線 b 上而陷于錯誤。

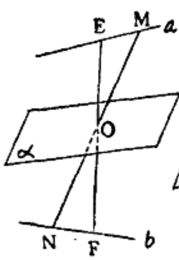
本題所发現的錯誤主要的是对于 a、b 二直線为異面直線不清楚。上面綜合敍述不同的解法时，已經可以看到。除此之外还有以下的錯誤：

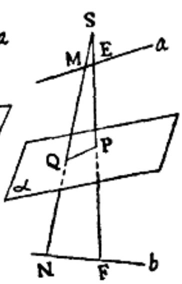
(i) 有 21 人錯認为 $ME\parallel QP\parallel NF$；

(ii) 有 4 人錯認为 EF、MN 交平面 α 于一点 O；

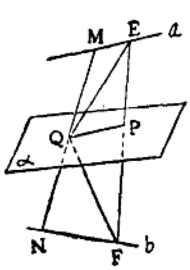
(iii) 有 4 人延长 NM、FE 錯認为可以交于一点 S；

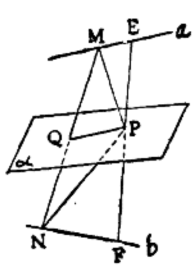






(iv) 有 5 人錯認 M、N、F、E 共面且錯認 $ME\parallel QP\parallel NF$，內中有 2 人連 QE、QF，錯誤証出 $\triangle QEM\cong\triangle QFN$，余下 3 人連 PM、PN，錯誤証出 $\triangle QPM\cong\triangle QPN$。





5. 命題研究：本題証明过程中并不需要 EF 为 a、b 的公垂線这个条件，因而我們認为公垂線这个条件应当删去，或者将原題中"α 为过 EF 中点且与 a、b 平行的平面"改为"α 是 EF 的垂直二等分面"較佳。

II. 解方程 $\begin{cases}\lg(2x+1)+\lg(y-2)=1\\ 10^{xy}=10^x\cdot 10^y\end{cases}$

(註) lg 是以 10 为底的对数 $\log_{10}$ 的符号。

1. 解答及評分标准：

$$\begin{cases}\lg(2x+1)+\lg(y-2)=1 \cdots\cdots (1)\\ 10^{xy}=10^x\cdot 10^y \cdots\cdots (2)\end{cases}$$

由(1) 得：

$\lg(2x+1)(y-2)=\lg 10 \quad (x>-\frac{1}{2}, y>2)$。

$\therefore \quad (2x+1)(y-2)=10$，

即 $2xy=4x-y+12 \quad (x>-\frac{1}{2}, y>2) \cdots (3)$

由(2) 得 $10^{xy}=10^{x+y}$，$\therefore xy=x+y \cdots\cdots (4)$

$(3)-(4)\times 2$ 得 $2x-3y+12=0$，

而 $y=\dfrac{2x+12}{3} \cdots\cdots (5)$

(5)代入(4)化簡得 $2x^2+7x-12=0 \cdots\cdots (6)$

解(6)得 $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+96}}{4}=\dfrac{-7\pm\sqrt{145}}{4}$，

但 $\dfrac{-7-\sqrt{145}}{4}<-\dfrac{1}{2}$，故为增根，应舍去。

以 $x=\dfrac{-7+\sqrt{145}}{4}$ 代入(5)得 $y=\dfrac{17+\sqrt{145}}{6}$，

因 $x=\dfrac{-7+\sqrt{145}}{4}>-\dfrac{1}{2}$，

$y=\dfrac{17+\sqrt{145}}{6}>2$ 适合条件。

故原方程組的解为：

$$x=\frac{-7+\sqrt{145}}{4},\quad y=\frac{17+\sqrt{145}}{6}。$$

〔評分〕(1) 化原方程組为(3)、(4)者，評 3 分；

(2) 化到方程 $2x^2+7x-12=0$ 加 4 分(連前 7 分)；

(3) 解出方程 $2x^2+7x-12=0$，得出 x、y 的值加 5 分(連前 12 分)；

(4) 能最后指出一組解不合原題者，加 3 分(連前 15 分)。

2. 考查目的：(i) 指数函数、对数函数的意义及其性質。(ii) 同解方程的原理。(iii) 二元二次方程組的解法。

3. 成績統計：

分　数	15	14—13	12	11—8	7	6—4	3	2—1	0
人　数	14	52	162	178	22	25	11	19	17
占总人数百分率(%)	2.8	10.4	32.4	35.6	4.4	5.0	2.2	3.8	3.4

4. 質量分析：从成績統計表中可以看到把原方程組变換为方程組(3)、(4)一般考生是能夠掌握的，只有 36 人(占 7.2%)不会或不完全会把方程(1)变換为方程(3)，发現的錯誤主要是：

(i) 沒有掌握对数性質 $\lg xy=\lg x+\lg y$ 和

$\lg\frac{x}{y}=\lg x-\lg y$。有11人錯誤由 $\lg(2x+1)+\lg(y-2)=\lg 10$，获得 $(2x+1)+(y-2)=10$，有 2 人錯認为原方程組即 $\lg\frac{2x+1}{y-2}=\lg 10$，也即 $\frac{2x+1}{y-2}=10$。

(ii) 不知道 $\lg 10=1$，有 15 人錯誤地把原方程組变换为 $\lg(2x+1)(y-2)=\lg 1$，內中有 11 人由此得出 $(2x+1)(y-2)=0$，余下 4 人更錯誤地得出 $(2x+1)(y-2)=1$。

(iii) 胡乱地把对数符号取消。有 1 人把原方程变换为 $\lg(2x+1)(y-2)-\lg 10=0$，馬上錯誤得出：

$$\frac{1}{10}(2x+1)(y-2)=0。$$

把方程(2)变换为方程(4)发現的錯誤較少，但也发現有 2 人对指数法則沒有掌握，內中有 1 人由 $10^{x+y}-10^{xy}=0$ 錯誤得出 $10^{x+y-xy}=0$，余 1 人由 $10^{xy}=10^{x}-10^{y}$ 錯誤得出 $10^{xy}=(10\cdot 10)^{xy}$。

关于解方程組 $\begin{cases}2xy=4x-y+12 & (3)\\ xy=x+y & (4)\end{cases}$

只有 228 人(占 45.6%) 会解，而有 225 人 (占45%)，不会解或解法有缺点，所以还是存在問題的。內中主要缺点是解法原則沒有掌握和对于同解方程原理沒有透彻明了所致。

解方程組(3)，(4)；有 293 人(占58.6%)是先消去 xy 項求出 $y=\frac{2x+12}{3}$（或 $x=\frac{3y-12}{2}$）然后代入(4)得出方程 $2x^2+7x-12=0$（或 $3y^2-17y+12=0$）解出 x（或 y），最后代入 $y=\frac{2x+12}{3}$（或 $x=\frac{3y-12}{2}$）求出它的对应值来，这种解法由于掌握了解法的原則所以方法較簡单。但我們也发現有下列几种較繁复的解法：

(i) 有个別考生消去 xy 項后他們由(4)解出 $y=\frac{x}{x-1}$（或解出 $x=\frac{y}{y-1}$）代入 $2x-3y+12=0$ 而求解。

(ii) 有 3 人他們消去 y 解出 $x=\frac{12}{3y-5}$ 再代入(4)去求解，由于計算上較麻煩，內中有 2 人发生了錯誤。

(iii) 有 151 人(占 30.2%)不先消去 xy 項，內中有 126 人由 (4) 解出 $y=\frac{x}{x-1}$（或 $x=\frac{y}{y-1}$）代入(3)而求解；有 13 人由(3)解出 $y=\frac{4x+12}{2x+1}$（或 $x=\frac{12-y}{2(y-2)}$）代入(2)而求解；又有13人由(3)和(4)解出 $y=\frac{4x+12}{2x+1}$ 和 $y=\frac{x}{x-1}$（或 $x=\frac{12-y}{2(y-2)}$ 和 $x=\frac{y}{y-1}$）再用比較法去解。由于这些解法，运算步驟比較繁复；因而仅有 9 人能得出完全正确的結果。

在方程变换的过程中，有些考生沒有注意到同解方程的原理。例如用(3)÷(4) 而消去 xy 項沒有指出 $x\neq 0$，$y\neq 0$ 的条件；又如利用 $y=\frac{x}{x-1}$ 来消去 y 的考生沒有指出 $x\neq 1$ 的条件，利用 $x=\frac{12-y}{2(y-2)}$ 来消去 x 的考生沒有指出 $y\neq 2$ 的条件。

在解方程 (6) 中需要用到一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式，这个公式絕大多数考生是掌握的。但是还有 10 人記錯了公式，有的搞錯了符号，有的把 b^2-4ac 搞錯为 b^2-2ac，有的把分母 $2a$ 搞錯为 a，又由于这里面要遇到无理数 $\sqrt{145}$，有 25 人(占 5%)直接用它的近似值 12 来代替，这样一来求对应的未知数虽然是方便了，但我們認为这是不符合命題的要求的。

为了避免根式化簡的麻煩，有 13 人由方程組

$\begin{cases}y=\frac{x}{x-1}\\ 2xy-4x+y-12=0\end{cases}$ 求出 x 值后再由方程組

$\begin{cases}x=\frac{y}{y-1}\\ 2xy-4x+y-12=0\end{cases}$ 求出 y 值。但这样一来我們分辨不出哪两个值是組成一組解了！我們固然可以先配成四組，一一代入而驗算，但仍然不能避免根式化簡的麻煩，所以这样做是不好的。

本題的驗根是不可缺少的步驟，但完全掌握的只有 15 人(占3%)。內中有 6 人是求得 $x=\frac{-7\pm\sqrt{145}}{4}$ 后便根据 $2x+1$ 应当大于零的道理而判明如：$x=\frac{-7-\sqrt{145}}{4}$，則 $2x+1<0$ 因而 $x=\frac{-7-\sqrt{145}}{4}$ 是增根，或者求得 $y=\frac{17\pm\sqrt{145}}{6}$ 同样根据 $y-2$ 应当大于零的道理而判明 $y=\frac{17-\sqrt{145}}{6}$ 是增根，这样一来求那个未知数的对应值只要用一个值代入自然要簡单些。但其余 9 人都是等待两个未知数值完全求出后才根据 $2x+1$ 及 $y-2$ 应当大于零的道理而驗根。

有 11 人(占 2.2%)驗根的原則是掌握的，可惜他們把根求錯了，因而沒有获得滿分。

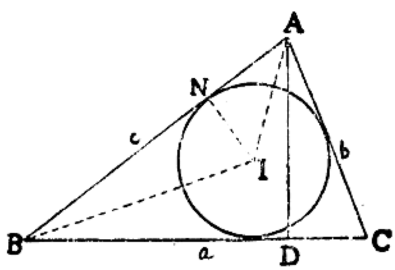
有 67 人(占 13.4%)他們錯誤認为如果所得的未

知数值是負数，便不合題意；又有1人錯認为指数方程$10^{xy}=10^x\cdot 10^y$的未知数值不能是无理数，现在求出的数值是无理数，所以本題无解。

关于驗根問題与函数的允許值有关系。例如本題中方程 $\lg(2x+1)+\lg(y-2)=1$ 变换为 $\lg(2x+1)(y-2)=1$ 时，由于函数允許值扩大而不同解，自然会产生增根。关于方程的驗根問題我們建議在今后教学中应特別予以重視。

Ⅲ. 若$\triangle ABC$的內切圓半徑为r，求証BC边上的高 $AD=\dfrac{2r\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$

1. 解答及評分标准：



〔証〕在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$AD=h_a$

在直角三角形ABD中，$\sin B=\dfrac{h_a}{c}$

即 $h_a=c\sin B$ (1)

設I为$\triangle ABC$的內切圓心，N为AB边上的切点，連結IA、IB与IN，則IA、IB分別二等分$\angle A$、$\angle B$，且$IN\perp AB$，所以$IN=r$。

在直角三角形IAN中，

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{AN}{r},\quad \therefore AN=r\cot\frac{A}{2}\qquad(2)$$

在直角三角形IBN中，

$$\cot\frac{B}{2}=\frac{BN}{r}\quad \therefore BN=r\cot\frac{B}{2}\qquad(3)$$

(2)+(3) $c=AN+BN=r\left(\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}\right)$

$$=r\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\right)$$

$$=\frac{r\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{r\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}=\frac{r\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

代入(1)

$$h_a=\frac{r\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=\frac{2r\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}。$$

〔評分〕(1) 解出$h_a=c\cdot\sin B$者，評2分；

(2) 解出$AN=r\cot\dfrac{A}{2}$者，加3分(連前5分)；

(3) 解出$c=r\left(\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}\right)$者，加2分(連前7分)；

(4) 証完，評15分。

2. 考查目的：(i)銳角三角函数的定义。(ii)三角形內切圓半徑与边角的关系。(iii)由两角和函数所导出的重要公式的应用。

3. 成績統計：

分　数	15	14—12	10—8	7	5	2	0
人　数	143	12	32	59	5	4	245
占总人数百分率(%)	28.6	2.4	6.4	11.8	1.0	0.8	49.0

4. 質量分析：从成績統計中，本題能夠証出(包括在証明过程中有一些缺点)的考生仅155人(占31%)，而零分的竟有245人(占49%)，其中未做的有76人，成績是不夠滿意的。从分析中可以看出很多考生沒有能夠作出論証，主要是由于他們沒有能找到証明的关鍵，因此一开始就失敗了。

根据上面公布的証法，所需用到的数学知識只是內切圓的性質、直角三角形的解法以及三角函数的一些基本公式，是一种較好的方法。但从分析中我們发現利用这种証法的考生仅50人(占10%)，其中只有30人能作出完整的論証，此外有6人虽也証出結果，但把 $r=\dfrac{c\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}$ 当做公式，沒有去証明它。利用这种方法来証明沒有成功的，主要原因是：

(i) 有3人因为找不出r与边角間的关系；

(ii) 有11人是因为对三角函数的定义沒有充分掌握，因此发生了如 $h_a=c\cos B$，$AN=r\tan\frac{A}{2}$，$AN=\frac{\cos\frac{A}{2}}{r}$，$AN=r\cos\frac{A}{2}$ 和 $AN=r\sin\frac{A}{2}$ 之类的錯誤。

較多的考生采用了从三角形面积公式出发的証法，其中較好的方法是从三角形面积公式 $\Delta=\frac{1}{2}ah_a$ 和 $\Delta=rs$ 出发得出关系式：

$$h_a=\frac{2rs}{a}=\frac{r(a+b+c)}{a}。$$

以下的步驟有着3种不同的方法：

(i) 有46人利用了正弦定律，得出：

$$h_a=\frac{2Rr(\sin A+\sin B+\sin C)}{2R\sin A}$$

$$=\frac{4r\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{2r\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

其中有27人首先証出了"当 $A+B+C=180°$，则 $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$"，有19人直接运用了这个結論，作出了証明。另外还有14个考生，虽也懂得这种方法，但其中10人因在运用正弦定律时，忽略了 $a=2R\sin A$，錯誤地变换成 $a+b+c=\sin A+\sin B+\sin C$，犯了重大錯誤；有4人则因不能把 $\sin A+\sin B+\sin C$ 变形为积而得不出結果。

(ii)有3人利用了模尔外得公式，得出：

$$h_a=r\left(1+\frac{b+c}{a}\right)=r\left(1+\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\right)$$

$$=\frac{r\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{r\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2r\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

(iii) 有29人利用了 $a=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$，或 $s=\frac{r}{\tan\frac{A}{2}}+a$ 等关系式得出：

$$h_a=\frac{2r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}$$

其中有2人由此証明"当 $A+B+C=180°$ 时，$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$"；有4人直接运用了这个結論把上式变换成

$$h_a=\frac{2r}{\cos\frac{A}{2}\Big/\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

而完成了証明，其余的由于一开始就化成正弦函数，余弦函数再进行变换，使証明陷于冗繁或記錯公式而遭到失敗。

企图利用三角形面积公式出发来証明的还有以下几种：

(1) 有12个考生利用了三角形面积公式 $\Delta=\frac{1}{2}ah_a$ 和 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 得出关系式：

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

以下步驟又有几种不同方法：

(i) 11人企图由 $s-a=r\cot\frac{A}{2}$，$s-b=r\cot\frac{B}{2}$，$s-c=r\cot\frac{C}{2}$，$s=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$，

代入得出： $h_a=\frac{2}{r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}\times$

$$\sqrt{r^4\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

并由于当 $A+B+C=180°$ 时，$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ 的关系变换成

$$h_a=2r\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\Big/\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

象(iii)一样地証明。其中只有2人作出論証，此外有6人由于不能把 $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$ 变形为积，有3人则因在变换中发生了錯誤如 $s-a=r\tan\frac{A}{2}$ 或 $s-a=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$ 而遭到失敗。

(ii) 有1人企图用正弦定律代入去証明，那就要

証出:

$$s-a=R(\sin B+\sin C-\sin A)=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$s-b=R(\sin C+\sin A-\sin B)=4R\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$s-c=R(\sin A+\sin B-\sin C)=4R\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

才能成功，那是非常复杂的，因而他失败了。

(2) 有20个考生利用了面积公式 $\triangle=\frac{1}{2}ah_a$ 和 $\triangle=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$ 得 $h_a=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}$。下面的証法是:

$$h_a=\frac{a\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

$$\because\quad r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

$$\therefore\quad h_a=\frac{2r\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},$$

其中有4人应用几何性質証出了 $r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$，而其余的只是直接利用了这个关系才証出的。

(3) 有5人用三角形面积公式 $\triangle=\frac{1}{2}ah_a$ 和 $\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A$ 得:

$$h_a=\frac{bc\sin A}{a}。$$

采用这种方法的只有1人能利用正弦定律导出 $h_a=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}$ 象上述証法那样証明。

(4) 还有一些考生利用了更冷僻的三角形面积公式，例如有3人利用了 $\triangle=r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$，有1人利用了 $\triangle=s^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ 来进行証明。

我們認为利用上面的几种方法，虽然也可以作出証明。但有的証明过程較繁复，有的需要記忆很多次要的公式，因此都是不足取的。

由于本題是証明題，因此有不少考生从右边推到左边来进行証明，其中有25人应用了

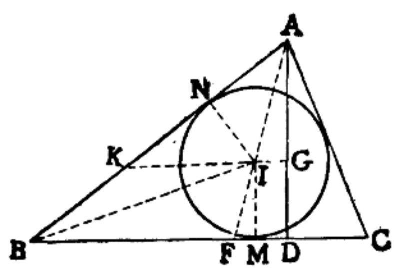
$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},$$

$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$，$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ 代入右边很方便地作出証明。这里也需要記忆一些次要的公式，因此也不是太好的。

与上面的情况相反，在分析中我們也发現有个别考生能夠不单純套用公式而結合着几何知識来証明:

(i) 有1人利用了 $a=h_a(\cot B+\cot C)$ 和 $a=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$ 而得出 $h_a=\frac{r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}{\cot B+\cot C}$，然后再化为正余弦，应用加法定理及倍角公式作出証明。

(ii) 有5人采用了以下的方法，其中3人获得成功。



作 $IG\parallel BC$，则 $h_a=AG+r$，$\angle AIG=\frac{A}{2}+B$

及 $\sin\angle AIG=\frac{AG}{IA}$，$IA=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$

$$\therefore\quad h_a=r+\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)$$

$$=\frac{r\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{r\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{2r\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}。$$

失敗的2人，1人是由于錯認为 $\angle AIG=\angle BIM=90^\circ-\frac{B}{2}$ 而失敗；另1人是将 $\cos\frac{B-C}{2}$ 展开为

$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 而无法推証下去。

(iii) 有 1 人他延长 AI 与 BC 交于 F 点，因得

$$h_a=AF\cos\angle FAD,$$

但 $\angle FAD=\angle FAC-\angle DAC=\frac{C-B}{2}$,

$$AF=AI+IF=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{r}{\cos\frac{C-B}{2}}$$

$$\therefore\quad h_a=\left(\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{r}{\cos\frac{C-B}{2}}\right)\cos\frac{C-B}{2}$$

$$=\frac{r\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{C-B}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C-B}{2}}\cos\frac{C-B}{2}$$

$$=\frac{2r\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}。$$

在已經开始了証明，但沒有成功的考生中，除上面已提到的一些錯誤外，尙有着以下一些較严重的錯誤：

(i) 有 12 人(占2.4%)錯認原三角形为等边三角形，內中 10 人認为 $h_a=AI+r$，1 人認为 $h_a=3r$，1 人認为 $A=60°$。

(ii) 有 8 人把 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑 R 与內切圓半徑 r 相混淆，以致无法推証下去。內中 7 人錯認 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r$，余 1 人錯認 $r=\frac{abc}{4\triangle}$。

(iii)有 1 人錯認为：$\sin\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$，$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$，以致推証失敗，这表明他对于余角函数关系不熟練。

(iv)有 1 人由 $\cos\angle BAD=\frac{h_a}{c}$，$\cos\angle CAD=\frac{h_a}{b}$ 竟得 $\cos A=\frac{h_a}{c}+\frac{h_a}{b}$，那就表明承認 $\cos(x+y)=\cos x+\cos y$ 了！

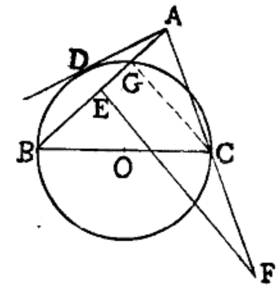
(v) 更有少数考生記錯了公式，因而不能証出結果，計有 $h_a=\frac{2s}{a}$，$h_a=\frac{2\sqrt{s}\,r}{a}$，$h_a=\frac{2r}{a}$ 等錯誤。事实上如果注意了这里 h_a、s、a、r 都是代表着線段，那末即使是偶然的疏忽，这种錯誤也应該立即可以发現的。

Ⅳ. 設 $\triangle ABC$ 为銳角三角形，以 BC 边为直徑作圓，并从 A 作此圓的切線 AD，与圓切于 D，又在 AB 边上取 AE 等于 AD，并过 E 作 AB 的垂線与 AC 边的延长線交于 F，求証：

(i) $AE:AB=AC:AF$；

(ii) $\triangle ABC$ 的面积 $=\triangle AEF$ 的面积。

1. 解答及評分标准：



(i) 設 AB 与圓交于 G，则 $AD^2=AG\cdot AB$

$\because\ AE=AD$，$\therefore\ AE^2=AG\cdot AB$，

$$\therefore\ \frac{AE}{AB}=\frac{AG}{AE}。\qquad(1)$$

連 GC，$\because\ \angle BGC=90°=\angle BEF$，

$$\therefore\ GC\parallel EF,\quad\therefore\ \frac{AG}{AE}=\frac{AC}{AF}。\qquad(2)$$

由(1)及(2)得：$\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AF}$。

(ii) $\because\ \triangle ABC$ 与 $\triangle AEF$ 有公共角 A，

$$\therefore\ \frac{\triangle ABC}{\triangle AEF}=\frac{AB\cdot AC}{AE\cdot AF}$$

由 (i) $\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AF}$ 得 $AB\cdot AC=AE\cdot AF$，

$$\therefore\ \frac{\triangle ABC}{\triangle AEF}=1。$$

故 $\triangle ABC$ 的面积 $=\triangle AEF$ 的面积。

〔評分〕(1) 知道 $AD^2=AG\cdot AB$ 評 2 分。(2) 証出 $\frac{AE}{AB}=\frac{AG}{AE}$ 者加 3 分，連前 5 分。(3) 証出 $\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AF}$ 者加 7 分，連前 12 分。(4) 証完，評 17 分。(5) (i) 未証出，应用 (i) 的結論而証出 (ii) 者評 4 分。

2. 考査目的：本題主要考査学生邏輯推理的能力，在論証过程中应用到的主要定理是：

(i) 由圓外一点，引切線和任意一条割線，那末割線与它在圓外部分的积等于切線的平方。

(ii) 平行于三角形的一边而和其他两边相交的直線，分这两边成比例。

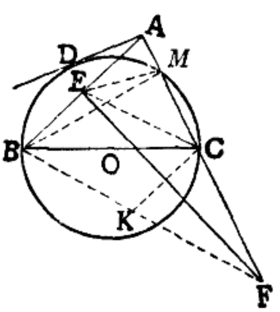
(iii) 两个三角形如果有一个角相等，那末它們的面积的比等于夹这角的两边乘积的比。

3. 成績統計:

分数	17	16-13	12	11-6	5	4	3	2	0
人数	61	17	9	7	4	63	3	27	309
占总人数百分率(%)	12.2	3.4	1.8	1.4	0.8	12.6	0.6	5.4	61.8

4. 質量分析: 从考查目的及解答中可以看到本題的証明所需用到的几何知識都是很基本的，論証过程也較簡单，关鍵在于第一部分的論証中能夠通过分析找到証明的途徑；但是从成績統計表中来看，本題竟有 309 人(占61.8%)得零分，其中有 169 人未做，可見一般考生对几何証明題的邏輯推理能力是很薄弱的。

从要証明的結論 $\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AF}$，考生很容易从分析中发現，只要能証出 $EC \parallel BF$ (或 $\triangle AEC \backsim \triangle ABF$) 就可以了，因此便要作出輔助線 EC 和 BF；这次考生中有 50 人(占10%) 是企图这样着手的。但由于这一途徑，論証过程比較繁难，因此只有 1 人成功。他的証法是:



$\because$ $AD^2=AM\cdot AC$，且 $AE=AD$，

$\therefore$ $AE^2=AM\cdot AC$， 即 $\frac{AM}{AE}=\frac{AE}{AC}$。

連 EM， $\therefore$ $\angle EAM=\angle EAC$，

$\therefore$ $\triangle AEM \backsim \triangle ACE$， $\therefore$ $\angle AME=\angle AEC$；

又 $\because$ $\angle BMF=\angle BMC=90^\circ$， $\angle BEF=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle BMF=\angle BEF$，

$\therefore$ B、E、M、F 四点共圓，

而 $\angle AME=\angle ABF$， $\therefore \angle AEC=\angle ABF$，

$\therefore$ $EC \parallel BF$。

但是要証明四線段成比例除掉直接利用平行于三角形的一边而和其他两边相交的直綫，分这两边成比例(或相似三角形的对应边的关系)外，还有另外的途徑；那就是通过一个中間的比証明这个比与要証明的比例中左右两个比分别相等，这种方法学生过去在学习中应該是有經驗的。如果注意到这一点，我們从已知条件 AD 是切線及 $AD=AE$ 便能証得 $\frac{AE}{AB}=\frac{AG}{AE}$。剩下的問題是証 $\frac{AG}{AE}=\frac{AC}{AF}$，我們不难从另外的已知条件 $EF\perp AB$ 及 BC 是圓的直徑而想到把 GC 連起来便可証明。这是本題第一部分証明的分析过程，如果学生过去在学习中对几何題的証明，不是只会盲目地着手，而有着先进行分析，找寻証題途徑的习慣，那末考虑到解答中所指出的方法也就很自然了。可惜的是从考查結果中反映出有这样习慣的考生并不多，这是我們今后教学中需要特别加以注意的。

除了以上两种証法之外，在分析中我們也发現有 2 人是連 BM 去証明，这种証法本質上与上面的証法一样。但由于証明过程較繁，只有 1 人成功。他的証法是:

$\because$ $AE^2=AM\cdot AC$，即 $\frac{AM}{AE}=\frac{AE}{AC}$；

又 $\because$ $\angle BAM=\angle EAF$，$\angle AMB=90^\circ=\angle AEF$，

$\therefore$ $\triangle AMB \backsim \triangle AEF$， $\therefore$ $\frac{AM}{AE}=\frac{AB}{AF}$，

$\therefore$ $\frac{AE}{AC}=\frac{AB}{AF}$。

再按更比定理得 $\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AF}$。

在第一部份的証明中，考生除掉不善于分析，找不到証明途徑因而失败外，我們还发現有些考生对几何知識的掌握上存在着以下一些缺陷:

(i) 有 8 人对切線定理不熟悉。錯認为: $AD^2=AE\cdot AB$，$AD^2=AC\cdot AF$，或 $AD^2=AM\cdot AF$。

(ii) 有6人把定理搞錯，錯認为"两三角形中如有一个角相等，那末夹这角的两边的乘积相等。"他們貿然地运用这个不存在的"定理"，从 $AB\cdot AC=AE\cdot AF$，推得 $\frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AF}$。

(iii) 有 17 人对相似三角形的知識还很模糊。他們胡乱地去証明实际上并不相似的三角形，如 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$，$\triangle ADF$ 与 $\triangle ABC$，$\triangle AGC$ 与 $\triangle ABC$，$\triangle ABD$ 与 $\triangle AEF$ 相似。

(iv) 有 7 人对四点共圓的条件以及共圓后获得什么結果很模糊，他們胡乱地去証明实質上并不共圓的四点，如 (E、B、F、C)；(D、B、F、C)；(A、D、E、O)；(A、D、E、M) 共圓，并錯認为由此可推出如 $EC \parallel BF$，$CD \parallel FB$ 的結論。

此外还有不少考生，对証題的态度不严肃，他們在証明过程中遇到困难，就乱用定理，随便做出結論，認为已經証明了。例如企图証 $EC \parallel BF$ 而失敗的49人，有

的利用了內錯角相等(如$\angle CEF=\angle BFE$),有的利用了同位角相等(如$\angle AEC=\angle ABF$),有的利用了平行線間所截的弧相等(如$\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}$)……"証出"$EC\parallel BF$。而这些前提却是沒有根据的。我們認为"証明必須有要根据,不盲目下結論"是学生应該有的习慣,而且是一种应有的品质,对此必須加强教育。

第一部分証明中考生陷于失敗的另一原因是对作图不夠注意,由于图形作得不好,例如把$AMCF$画成了象圓的切線,因此造成了直观上的錯誤,或影响了通过图形来帮助思考。

第一步証出后,考生利用这个結論去証第二步有四种方法:

(i) 有55人采用解答中所举的方法,內中有30人第一步不能証出或証錯。

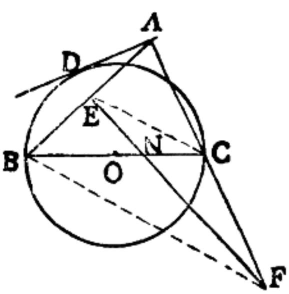
(ii) 有25人能把几何和三角联系起来,由于$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$, $\triangle AEF=\frac{1}{2}AE\cdot AF\sin A$,

得 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle AEF}=\dfrac{AB\cdot AC}{AE\cdot AF}$

也是很好的,但本質上是和(i)一样的,內中也有12人第一步沒有証出或証錯。

(iii) 有72人由第一步的結論得$EC\parallel BF$,再用变形概念証出,有下面两种証法:

1° 有50人用下法証出(內中有37人第一步沒有証出或証錯)。



$\because$ $\triangle ABC=\triangle AEC+\triangle BCE$,

$\triangle AEF=\triangle AEC+\triangle ECF$,

又 $EC\parallel BF$, $\therefore \triangle BCE=\triangle ECF$(同底等高),

$\therefore$ $\triangle ABC=\triangle AEF$。

2° 有22人用下法証出(內中有16人第一步沒有証出或証錯):

$\because$ $\triangle ABC=$ 四边形 $AENC+\triangle BEN$

$\triangle AEF=$ 四边形 $AENC+\triangle FCN$

又 $EC\parallel BF$,

$\therefore$ $\triangle BEF=\triangle BCF$(同底等高),

$\triangle BEF-\triangle BNF=\triangle BCF-\triangle BNF$,

$\therefore$ $\triangle BEN=\triangle FCN$。

(iv) 有17人由第一步的結論再利用两三角形面积之比等于它們底高乘积之比而証出。

$\because$ $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle AEF}=\dfrac{AB\cdot CG}{AE\cdot EF}$,

由(i) $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AC}{AF}$, 又 $\because$ $\triangle AGC\backsim\triangle AEF$,

$\therefore$ $\dfrac{AC}{AF}=\dfrac{CG}{EF}$, $\therefore$ $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{CG}{EF}$,

即 $AB\cdot CG=AE\cdot EF$ 而得証明。

第二部分証明中,我們发現有些考生証明的方法是对的,但由于搞錯了定理或者沒有通过証明武断地做出了結論,因而有下列两种錯誤:

(i) 有1人錯認为$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC$, $\triangle AEF=\frac{1}{2}AE\cdot AF$来証明。

(ii) 有20人采用变形概念去証明,不經过証明$EC\parallel BF$ 就武断 $\triangle BCE=\triangle ECF$ 或 $\triangle BEN=\triangle FCN$。

我們还发現有6人他們証明第二步是不利用第一步的的結論,共有两种証法:

(i) 有5人的証法是 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle AEF}=\dfrac{AB\cdot CG}{AE\cdot EF}$,

$\because$ $AD^2=AG\cdot AB$, 且 $AE=AD$,

$\therefore$ $AE^2=AG\cdot AB$, 即 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AG}{AE}$,

但 $\triangle AGC\backsim\triangle AEF$, $\therefore$ $\dfrac{AG}{AE}=\dfrac{CG}{EF}$,

$\therefore$ $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{CG}{EF}$, 即 $AB\cdot CG=AE\cdot EF$

而得証明。

(ii) 余1人証法是: $\because$ $\triangle AGC\backsim\triangle AEF$,

$\therefore$ $\dfrac{\triangle AGC}{\triangle AEF}=\dfrac{AG^2}{AE^2}=\dfrac{AG^2}{AG\cdot AB}=\dfrac{AG}{AB}$,

又 $\therefore$ $\dfrac{\triangle AGC}{\triangle ABC}=\dfrac{AG\cdot AC}{AB\cdot AC}=\dfrac{AG}{AB}$,

$\therefore$ $\triangle AEF=\triangle ABC$。

这种不利用第一步的結論去証明第二步的,我們也发現有下面两种錯誤: