★高职高专通用教材★

# 高等数学

GAODENG SHUXUE


主　编◎胡强国

副主编◎周志燕


上册


合肥工业大学出版社

**高职高专通用教材**

# 高等数学(上)

主　编　胡强国
副主编　周志燕
编　委　(以姓氏笔画为序)
冯英华　周志燕　宫传瑞
胡强国　程黄金　喻为民
主　审　史元祜

合肥工业大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学/胡强国主编.—合肥:合肥工业大学出版社,2006.7
ISBN 7-81093-424-4

Ⅰ.高... Ⅱ.胡... Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 071654 号

**高 等 数 学**(上)

主 编 胡强国 责任编辑 陆向军

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **出 版** | 合肥工业大学出版社 | | **发 行** | 全国新华书店 | |
| **地 址** | 合肥市屯溪路 193 号 | | **开 本** | 787×1092 1/16 | |
| **邮 编** | 230009 | | **印 张** | 11.5 | **字 数** 279 千字 |
| **电 话** | 总编室 | 0551-2903938 | **版 次** | 2006 年 8 月第 1 版 | |
| | 发行部 | 0551-2903188 | **印 次** | 2006 年 8 月第 1 次印刷 | |
| **网 址** | www.hfutpress.com.cn | | **印 刷** | 安徽江淮印务有限责任公司 | |

ISBN 7-81093-424-4/O·28 **定价**:34.00 元(本册定价:17.00 元)

# 前　言

《高等数学》是高职高专工科、经济类和医学类等各专业的一门基础课，为适应高职高专教学改革和发展的需要，在淮南联合大学基础部牵头和组织下，由教学第一线经验丰富的骨干教师联合组成《高等数学》编写组，进行本教材的编写工作。本书从高职高专的培养目标和数学课程的教学基本要求出发，汲取了理、工、农和医类培养应用型人才的高等学校专科数学教学改革的成功经验。本教材力求具有以下特点：

1. 突出培养应用型人才的宗旨，注意贯彻"以应用为目的，以必需够用为度"的原则，使本教材更符合高职高专的培养目标，更适合高职高专数学课程的教学需要，更具有高职高专的特色。

2. 强调数学的思想和方法，并力图通过较多的例题和习题，介绍众多应用领域，促进学生数学素质的培养和训练。

3. 教材内容难度适中，注意高等教育大众化的新形势，如极限部分只介绍描述定义，让学生尽快学习导数与微分、积分的知识，全书通俗易懂。

本教材分上、下两册，上册的主要内容是微积分基本知识，下册的主要内容是线性代数和概率论与数理统计的相关内容。

本教材由胡强国主编，周志燕任副主编，参加本教材编写的成员有(以姓氏笔画为序)：冯英华、周志燕、官传瑞、胡强国、程黄金和喻为民。

本教材由史元祜主审，他对本教材的编写提出了许多宝贵的意见。本教材在编写过程中得到校领导、教务处和郑亚强等同志的大力支持和帮助，编者在此表示衷心的感谢。

由于我们的水平所限，加上时间较紧，书中必有不少缺点和错误，敬请各位专家、同行和读者批评指正。

**编　者**

2006 年 7 月

# 目 录

## 第五章　多元函数的微分学



## 第六章　多元函数积分学



## 第七章　级　数

# 第一章　函数的极限与连续

本书的主要内容是微积分学及其应用.微积分与中学里学的初等数学是有重大区别的.初等数学研究的对象基本上是不变的量(称为常量),而微积分则是以函数(变量)作为研究对象.研究变量时,着重考察变量之间的依赖关系,并讨论当某个变量变化时,与它相关的变量的变化趋势.这种研究方法就是极限方法.本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念及其相关知识,这些内容都是学习本课程必须掌握的基础知识.

## 第一节　函　数

### 一、集合与区间

1. 集合

集合是最基本的数学概念,是具有某种共同性质的事物的全体.集合常用大写拉丁字母表示,组成这个集合的具体事物称为该集合的元素.集合的元素常用小写的拉丁字母表示,$x$ 是集合 $A$ 的元素,记作 $x\in A$,$y$ 不是集合 $A$ 的元素,记作 $y\notin A$.

一个集合,若其元素的个数是有限的,则称为有限集;否则,就称为无限集,有限集可用列举出它的全体元素的方法来表示,例如方程 $x^2+5x+6=0$ 的解所成的集合 $A=\{-2,-3\}$.无限集通常用明确表示元素特性的符号来表示,如以 $\{x|x$ 具有性质 $P\}$ 表示具有性质 $P$ 的事物的全体,如集合 $M=\{(x,y)|x^2+y^2=1,x,y\in R\}$ 表示 $xOy$ 平面内以原点 $O$ 为圆心,1 为半径的圆周.

为了以后书写的方便,本书用一些符号表示常用词语.符号"$\forall$"表示"对任意的"或者"对每一个";符号"$\exists$"表示"存在"或者"有".

对集合 $A$、$B$,如果 $\forall x\in A$,总有 $x\in B$,则称 $A$ 是 $B$ 的子集,记作 $A\subset B$,读作 $A$ 包含于 $B$ 或 $B$ 包含 $A$.如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 $A$ 与 $B$ 相等,记作 $A=B$.不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$,空集是任何集合的子集.如 $\{x|x^2+1=0,x\in R\}=\varnothing$.

在本教材中,变量总是在实数范围内讨论,常用的数集有自然数集 $N$,整数集 $Z$,有理数集 $Q$,实数集 $R$.

2. 区间

区间是用得较多的一类数集,设 $a,b\in R$ 且 $a<b$.

开区间　$(a,b)=\{x|a<x<b,x\in R\}$;

闭区间　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b,x\in R\}$;

半开区间　$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b,x\in R\}$;

$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b,x\in R\}$.

以上四种区间为有限区间,有限区间右端点 $b$ 与左端点 $a$ 的差 $b-a$,叫做区间的长度.开区间不包括端点,闭区间包括端点.引入 $+\infty$ 和 $-\infty$,可以有以下几种无限区间:

$$(a,+\infty)=\{x|a<x,x\in R\},[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x,x\in R\};$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b,x\in R\},(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b,x\in R\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in R\}$$，即实数集合.

为了讨论函数在一点附近的某些性态，下面引入点的邻域概念. 把$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$叫做点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域，简称点 $x_0$ 的邻域，将$(x_0-\delta,x_0)$和$(x_0,x_0+\delta)$分别叫做点 $x_0$ 的左邻域和右邻域，一般地，$\delta$ 是一个很小的正数. 例如，$|x-2|<0.1$，是以点 $x_0=2$ 为中心，长度为 0.2 的邻域，也就是开区间(1.9,2.1).

3. 常量与变量

在考察现实世界中的事物时，常常会遇到各种形式的量，其中有的量在考察过程中不起变化，这种量称为常量，常用小写字母 $a,b,c$ 等表示；还有一些量，在考察的过程中可取不同的数值，这种量称为变量，常用小写字母 $x,y,z,t$ 等表示.

如一架空中客机在连续的飞行过程中，乘客人数是一个常量，而飞机飞行的高度和速度则一个变量.

## 二、函数的概念

在我们周围的世界中，变化的量随处可见，例如温度、湿度、降雨量等等，如果稍加注意，会发现这些变化的量随时间、地域、季节的不同而不同. 同样，在经济领域中，这种变化的量也是随处可见的，如国民经济增长率、商品的产量、价格等等. 这些变化的量都有一个共同的特点，那就是它们之所以变化是因为受到其他一些变化的量的制约或者与其他一些变化的量的相互制约. 变化的量之间相互制约的关系是普遍存在的，我们将其中一类关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个的重要的概念，那就是函数. 它是我们定性、定量的研究各种变化的量的一个非常重要的工具.

**定义 1** 设 $x$ 和 $y$ 是某变化过程中的两个变量，$D$ 是一非空数集，如果存在一个对应法则 $f$，使得对 $D$ 内的每一个值 $x$ 都有唯一的 $y$ 与之对应，则这个对应法则 $f$ 称为定义在集合 $D$ 上的一个函数，并将由对应法则 $f$ 所确定的 $x$ 与 $y$ 之间的对应关系记为 $y=f(x)$，此时称 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量或函数值，$D$ 称为函数的定义域.

表示对应关系的符号 $f$ 也可使用 $g,F$ 等等.

由定义 1 可知，两个函数相同的充分必要条件是对应关系相同、定义域也相同，与自变量、因变量选用的字母无关.

例如：函数 $y=|x|$ 与 $y=x$ 的对应关系不同，因此它们是两个不同的函数；由于函数 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 的定义域不同，因此它们也是两个不同的函数；函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 不仅是同一个函数，而且 $y=|x|$ 与 $u=\sqrt{v^2}$ 也是同一个函数.

**【例 1】** 某商场 2005 年第一季度各月毛线的零售量(Kg)如下表：

| 月　份 $t$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 零售量 $s$ | 48.1 | 53.9 | 32.4 |

上表表示了该商场 2005 年第一季度月零售量(因变量)$s$ 与月份(自变量)$t$ 之间的对应关系.

**【例 2】** 某地某日的气温 $T$ 由气温自动记录仪描得一条曲线，如图 1－1 所示，这个图形

表示了气温 $T$ 和时间 $t$(从 0 时开始)之间的对应关系，记录的时间($h$)范围是[0,24].

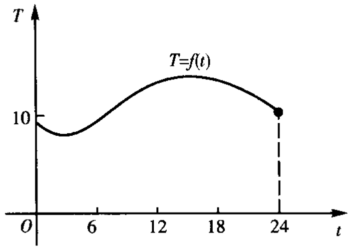


图 1－1

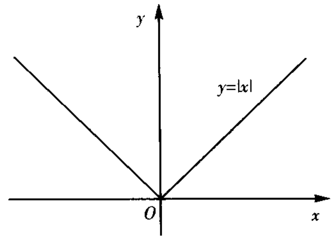


图 1－2

**【例 3】** 数学式 $y=f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 表明变量 $y$ 是 $x$ 的函数，它的图形如图 1－2 所示.

**【例 4】** 数学式 $y=f(x)=\begin{cases} 1-x, & 0<x\leqslant 1, \\ 0, & x=0, \\ -1-x, & -1\leqslant x<0 \end{cases}$ 也表明变量 $y$ 是 $x$ 的函数，它的图形如图 1－3 所示.

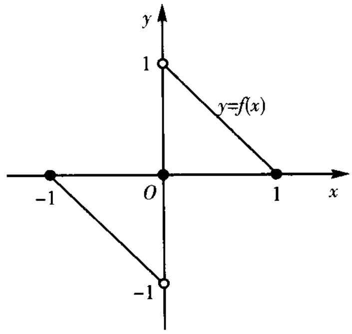


图 1－3

函数的定义域，对于具有实际意义的函数来说，则要按实际意义来确定，如例 1 中函数的定义域 $D=\{1,2,3\}$，例 2 中的函数的定义域 $D=[0,24]$，又如圆周的面积 $A$ 是半径 $r$ 的函数 $A(r)=\pi r^2$，它的定义域 $D=(0,+\infty)$. 对于抽象地用解析式表达的函数，函数的定义域是自变量所能取的使解析式有意义的一切值. 如例 3 中函数的定义域 $D=R$. 例 4 中的函数，其自变量的取值范围在函数的表达式中已经给定了，它的定义域为 $D=[-1,1]$.

**【例 5】** 求函数 $y=\dfrac{\ln(1+x)}{2x}$ 的定义域.

**解**:此函数的定义域 $D$ 为满足不等式组 $\begin{cases} 1+x>0, \\ x\neq 0 \end{cases}$ 的 $x$ 的集合，即 $D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

## 三、函数的表示法

为了表示一个函数，要把它的定义域和对应关系表述清楚，一般可根据函数自身的特点选择适当的表示方法. 常用的方法有:表格法、图示法和解析法.

1. 表格法(又称列表法)将自变量的一些值与相应的函数值列成表格表示变量之间的对应关系. 如例 1 中的函数是用表格法表示的. 用表格法表示函数，清楚、适用，但一般只能列出有限个自变量的值.

2. 图示法(又称图像法)用平面直角坐标系中的曲线来表示两个变量之间的对应关系. 如例 2 的函数就是用图示法表示的. 用图示法表示函数，直观、形象，但一般的函数难以做出它们的图像.

3. 解析法(又称公式法) 用数学式子来表示两个变量之间的对应关系. 如例 3、例 4、例 5 的函数都是用解析法表示的. 在高等数学中讨论的函数基本上采用解析法表示.

对于表示函数的解析法,需要作以下几点说明:

1. 有时一个函数不能由一个式子表示,而需要在定义域的不同子集上用不同的解析式来表示,这样的函数称为分段函数. 如例 3、例 4.

2. 如果因变量 $y$ 可以表示成一个只包含自变量 $x$ 的式子,那么我们将这样的函数称为显函数. 如果两个变量之间的对应关系可以由一个方程 $F(x,y)=0$ 来确定,即当 $x$ 的值给定后可以由此方程确定 $y$ 的值,我们就说这个方程确定了一个函数 $y=f(x)$. 我们将这样由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=f(x)$ 称为隐函数. 如方程 $x^2+y^2=1$ 就确定了变量 $y$ 是变量 $x$ 的隐函数.

3. 在函数关系中,自变量和因变量的地位往往是相对的. 可以把任意一个变量看成是自变量或因变量. 例如某种商品销售总收入为 $R$,销售量为 $x$,已知该商品的单价为 $p$. 如果给定了销售量 $x$,则可以通过关系 $R=px$ 确定销售总收入. 这种关系称为总收入是销售量的函数. 但反过来由销售总收入确定销售量的关系 $x=\dfrac{R}{p}$,则称为销售量是销售总收入的函数,这时我们称后一函数是前一函数的反函数.

**定义 2** 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $A$,值域为 $B$. 若对于 $B$ 中的每一个 $y$,都有唯一确定的 $x\in A$,使 $f(x)=y$,则这时 $x$ 也是 $y$ 的函数,称为 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$. 此时,$y=f(x)$ 称为直接函数.

由定义可见,反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域是直接函数的值域,反函数的值域是直接函数的定义域.

函数的实质在于它的定义域和对应法则,而用什么字母来表示自变量和因变量是无关紧要的. 习惯上常以 $x$ 表示自变量,$y$ 表示因变量,因此,习惯上把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 仍记作 $y=f^{-1}(x)$. 这样做并不改变反函数的对应法则.

| 函数<br>($y=f(x)$) | 反函数<br>($x=f^{-1}(y)$) | 反函数<br>(习惯写法 $y=f^{-1}(x)$) |
|---|---|---|
| $y=2x-1$ | $x=\dfrac{y+1}{2}$ | $y=\dfrac{x+1}{2}$ |
| $y=x^3$ | $x=\sqrt[3]{y}$ | $y=\sqrt[3]{x}$ |
| $y=10^x$ | $x=\lg y$ | $y=\lg x$ |

由反函数定义及上面举例可看出,$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 表示变量 $x$ 与 $y$ 之间的同一关系. 因而,它们的图形应是同一条曲线. 而 $y=f^{-1}(x)$ 是将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 $x$ 与 $y$ 互换得到的. 因而,$y=f^{-1}(x)$ 的图形与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的,所以 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

在函数的三种表示法当中,解析法是对函数的精确描述,它便于对函数进行理论分析和研究. 图示法是对函数的直观描述,通过图形可清楚地看出函数的一些性质. 列表法常常是在实际应用问题中使用的描述方法,这是由于在许多实际问题当中,变量之间的对应关系常常难以由一个确定的解析式来表示.

## 四、函数的基本属性

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$. 若对于 $D$ 内任意的 $x_1, x_2$，如果 $x_1<x_2$，就有 $f(x_1)<f(x_2)$ 则称函数 $y=f(x)$ 在 $D$ 内是单调增加的；如果 $x_1<x_2$，就有 $f(x_1)>f(x_2)$ 则称函数 $y=f(x)$ 在 $D$ 内是单调减少的.

在上面，若将 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数在 $D$ 内是单调不减（或不增）的. 单调增加或单调减少的函数，以及单调不减或单调不增的函数，统称为单调函数.

有些函数在其定义域 $D$ 内不是单调函数，但在 $D$ 内的一个区间具有单调性，我们将这种区间称为函数的单调区间，如图 1－4 所示.

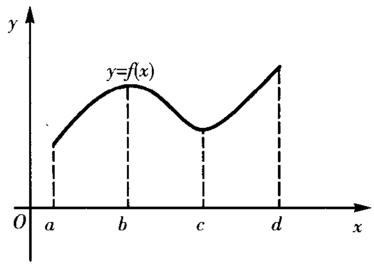

图 1－4

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$ 关于原点对称，若对于 $D$ 中任意的 $x$，满足 $f(-x)=f(x)$ 则称函数 $y=f(x)$ 是 $D$ 上的偶函数；若对 $D$ 中任意的 $x$，满足，$f(-x)=-f(x)$ 则称函数 $y=f(x)$ 是 $D$ 上的奇函数.

奇函数和偶函数都具有对称性，在研究这类函数时，只要知其一半，便可知其全部. 从函数的图形上看，偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，奇函数的图形关于原点对称. 在这里特别注意：只有当函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称时，才有可能讨论它的奇偶性.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在正数 $M$，使得对于 $D$ 中的任意 $x$，有：$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 是有界的.

上面的正数 $M$ 称为函数 $y=f(x)$ 的界. 从几何直观上看，有界函数的图形在两条平行于 $x$ 轴的直线 $y=M$ 及 $y=-M$ 所确定的带形区域内，如图 1－5 所示. 函数 $y=2-x$ 是无界的，因为对于这个函数不存在正数 $M$，使 $|2-x|\leqslant M$ 成立.

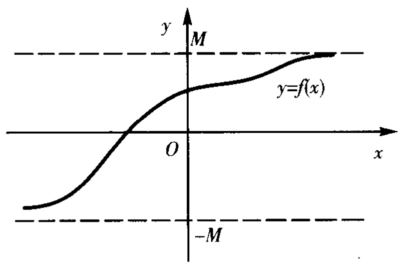

图 1－5

4. 周期性

有这样一类函数，每当自变量增加或减少一个固定的数值时，它的状态及特征就会重复出现，函数的这种性质就是周期性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在一个数 $T$，使得对于 $D$ 中任意的 $x$，$x+T$ 属于 $D$，且有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是以 $T$ 为周期的周期函数，$T$ 称为函数 $y=f(x)$ 的一个周期. 我们知道正弦函数 $y=\sin x$ 就是一个以 $2\pi$ 为周期的周期函数.

由周期函数的定义可以看出，若 $T$ 是 $f(x)$ 的一个周期，则 $2T$，$3T$ 及 $T$ 的任意正整数倍也是 $f(x)$ 的周期，对此，今后在讨论周期函数的周期时只讨论它的最小正周期. 对于周期函数，我们只要知道它在一个周期上的性质，就可以知道整个函数的性质.

## 五、初等函数

1. 基本初等函数及其图形

(1)常值函数

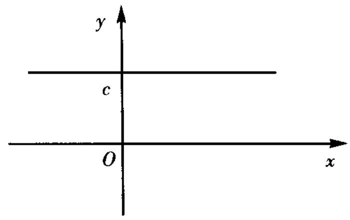


图 1－6

函数 $y=c$($c$ 为常数)称为常值函数，如图 1－6 所示. 常值函数在函数中的作用十分重要，并且有广泛的实际意义，因此，它本身被看作一类基本初等函数. 例如 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 就是一个常值函数，因为由三角公式可知，上式右端恒等于 1. 常值函数 $y=c$ 的图形就是一条过点$(0,c)$且平行于 $x$ 轴的直线.

(2)幂函数

函数 $y=x^\alpha$($\alpha$ 为实数)称为幂函数，以下按几种情况讨论幂函数的性质：

①$\alpha=0$；$y=1$ 是常值函数.

②$\alpha>0$；$\alpha$ 为整数，定义域为$(-\infty,+\infty)$. $\alpha$ 为奇数时，$y=x^\alpha$ 是单调增加的奇函数，值域为$(-\infty,+\infty)$，图形如图 1－7(a)所示；$\alpha$ 为偶数时，$y=x^\alpha$ 是偶函数，$x<0$ 时单调减少，$x>0$

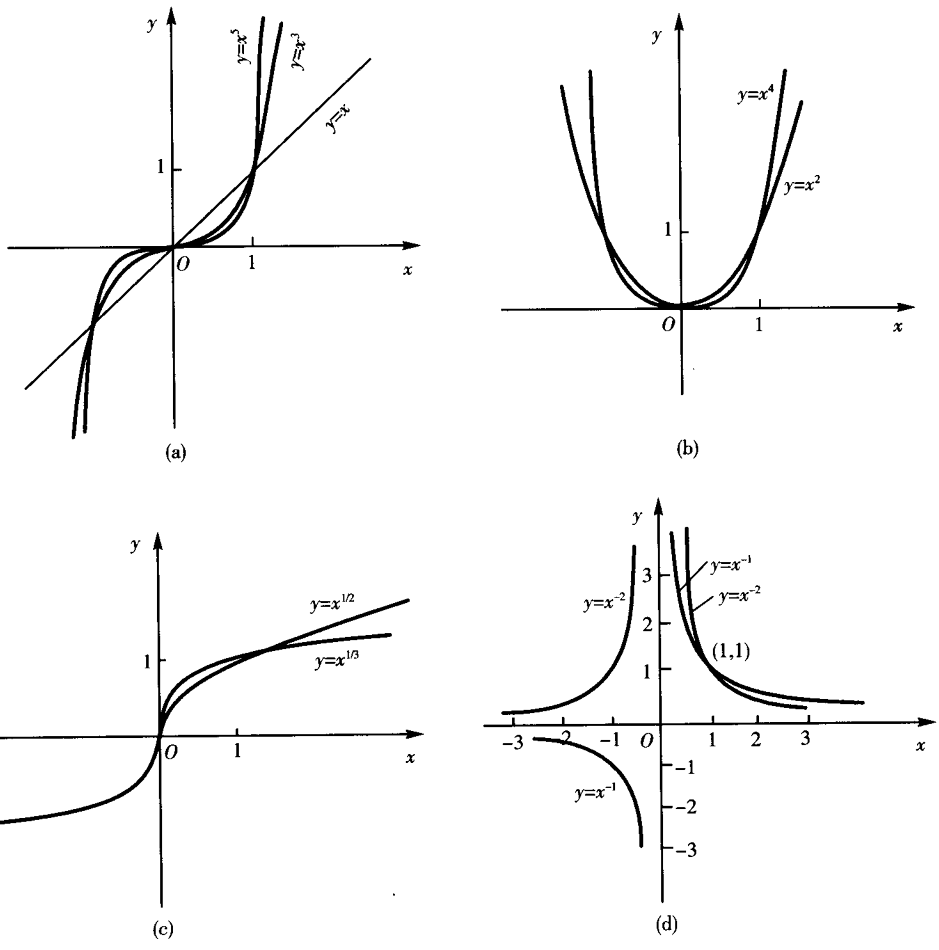


图 1－7

时单调增加，值域为$[0,+\infty)$，图形如图 1-7(b)所示. $\alpha$ 为分数，当 $\alpha=\frac{1}{n}$，$n$ 为奇数时，$y=x^{\frac{1}{n}}$ 是单调增加的奇函数，定义域为$(-\infty,+\infty)$；$n$ 为偶数时，$y=x^{\frac{1}{n}}$ 的定义域为$[0,+\infty)$. 图形如图 1-7(c)所示.

③$\alpha<0$；$\alpha=-1$ 时，$y=x^{-1}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，是奇函数，在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$上分别单调减少，但在整个定义域上不是单调函数.

$\alpha=-2$，$y=x^{-2}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，是偶函数，在$(-\infty,0)$上单调增加，在$(0,+\infty)$上单调减少. 函数 $y=x^{-1}$ 和 $y=x^{-2}$ 的图形如图 1-7(d)所示.

$\alpha$ 为任意实数时，$y=x^{\alpha}$ 的图形都过$(1,1)$点，并且 $y=x^{\alpha}$ 在$(0,+\infty)$内总有定义.

(3)指数函数

函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$称为指数函数.

指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，指数函数 $y=a^x$ 图形都经过$(0,1)$，如图 1-8 所示，其中函数 $y=e^x$ 的底数 $e=2.71828\cdots$是我们将在后面中要提到的一个重要极限的值. 它是一个无理数.

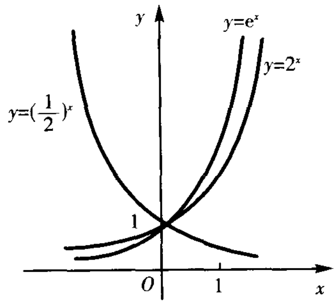


图 1-8

(4)对数函数

函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$称为对数函数.

对数函数的定义域是$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，所有对数函数 $y=\log_a x$ 的图形过点$(1,0)$，如图 1-9 所示，其中以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 称为自然对数，简记为 $y=\ln x$.

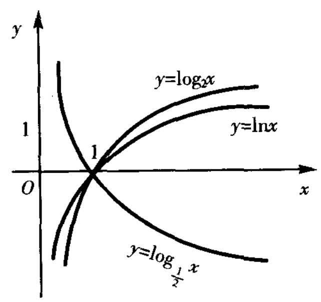


图 1-9

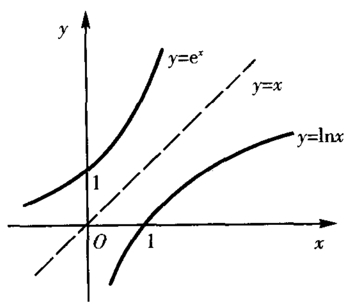


图 1-10

对数函数与指数函数是两类不同的基本初等函数，但它们之间联系密切，对于同一个 $a(a>0,a\neq1)$，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-10 所示. 如果在同一坐标系中两个函数的图形关于直线 $y=x$ 对称，那么称两个函数互为反函数.

(5)三角函数

①正弦函数

函数 $y=\sin x$ 称为正弦函数.

正弦函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是以 $2\pi$ 为周期的有界的奇函数. 图

形如图 1 - 11 所示.

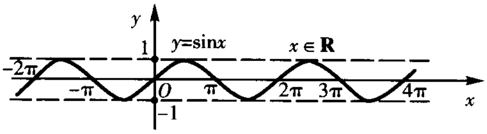


图 1 - 11

②余弦函数

函数 $y=\cos x$ 称为余弦函数.

余弦函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是以 $2\pi$ 为周期的有界的偶函数. 图形如图 1 - 12 所示.

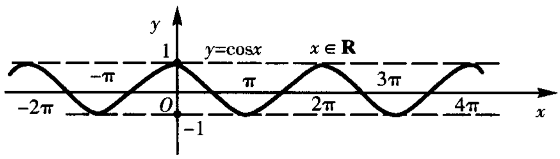


图 1 - 12

③正切函数

函数 $y=\tan x$ 称为正切函数.

正切函数在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$($k$ 为任意整数)处无定义，值域为$(-\infty,+\infty)$，它是以 $\pi$ 为周期且无界的奇函数. 图形如图 1 - 13 所示.

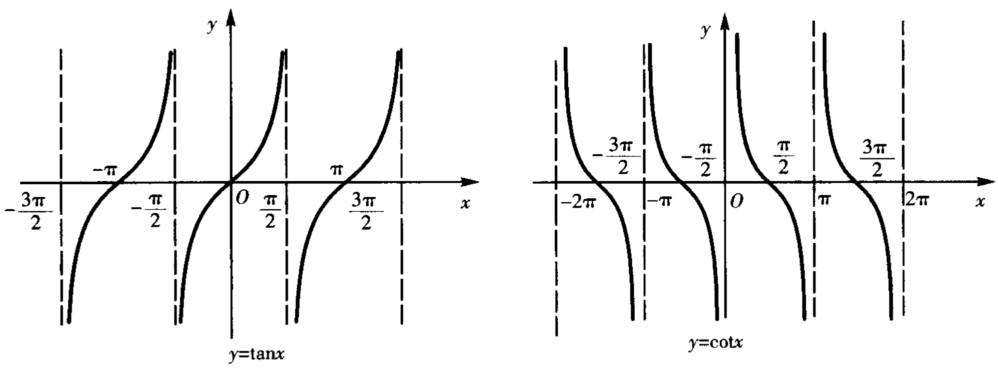


图 1 - 13

④余切函数

函数 $y=\cot x$ 称为余切函数.

余切函数在 $x=k\pi$($k$ 为任意整数)处无定义，值域为$(-\infty,+\infty)$，它是以 $\pi$ 为周期且无界的奇函数. 图形如图 1 - 13 所示.

(6)反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的反函数依次为 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$. 它们都是多值函数，通常使用

的是它们的主值，即 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数为 $y=\arcsin x$. $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数为 $y=\arccos x$. $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的反函数为 $y=\arctan x$. $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$内的反函数为 $y=\operatorname{arccot} x$. 它们的图像如图 1－14 所示.

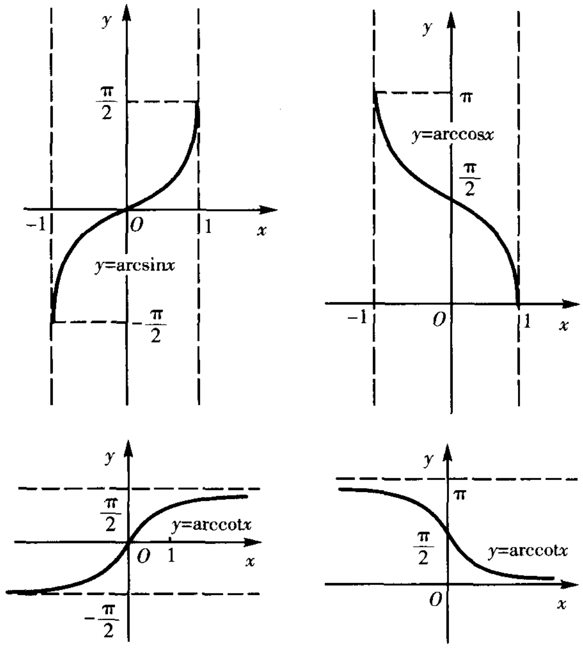


图 1－14

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等六大类函数统称为基本初等函数.

2. 复合函数

先看一个例子，$y=\ln u$，$u=\sin x$ 可以得到函数 $y=\ln\sin x$. 对此，我们理解为 $y$ 是 $u$ 的函数，那么 $y$ 通过 $u$ 就是 $x$ 的函数.

**定义 3**　若函数 $y=f(u)$的定义域为 $U$，而函数 $u=\varphi(x)$的值域包含在 $U$ 中，则对 $X$ 中任意的 $x$，通过 $u$ 有唯一的 $y$ 与之对应，即 $y$ 是 $x$ 的函数，记为：

$$y=f[\varphi(x)],$$

这种函数称为复合函数，其中 $u$ 称为中间变量.

许多复杂的函数，都可看作几个简单函数经过中间变量复合而成的. 如 $y=e^{\tan x^2}$，就可以看作是经 $y=e^u$，$u=\tan v$，$v=x^2$ 几个函数复合而成. 而这几个函数都是基本初等函数.

复合函数是函数之间的一种运算的结果，而不是一种类型的函数.

**【例 6】**　设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0,\\ 2-x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f[f(3)]$.

**解：**$f[f(3)]=f(1-3)=f(-2)=2-(-2)=4$.

**【例 7】**　设函数 $f(x)=x^3$，$\varphi(x)=\sin\sqrt{x}$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

**解**：$f[\varphi(x)]=\varphi(x)^3=\sin^3\sqrt{x}$，

$\varphi[f(x)]=\sin\sqrt{f(x)}=\sin(x^{\frac{3}{2}})$.

**【例 8】** 分别指出函数 $y=\sin 5x$，$y=e^{\cos\frac{1}{x}}$ 是由哪些简单函数复合而成的.

**解**：$y=\sin 5x$ 是由 $y=\sin u$，$u=5x$ 复合而成的；

$y=e^{\cos\frac{1}{x}}$ 是由 $y=e^u$，$u=\cos v$，$v=x^{-1}$ 复合而成的.

3. 初等函数

函数之间除复合运算之外，还有加、减、乘、除等几种运算. 由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除或复合而得到的，并且能用一个解析式表达的函数称为初等函数.

微积分所研究的函数主要是初等函数，由初等函数的定义可以看出任意一个初等函数可以分解为基本初等函数的四则运算或复合运算. 例如 $y=\sin(\ln\sqrt{x^2-1})$，$y=\dfrac{1+\sin^4 x}{\cot x^3}$，$y=|x|=\sqrt{x^2}$ 等等都是初等函数. 高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数.

4. 建立函数关系的实例

在一些实际问题中，常用分析该问题中变量之间的等量关系来建立函数关系.

**【例 9】** 在底为 $a$，高为 $h$ 的三角形中内接一个矩形，把这矩形的面积 $S$ 表示为它的底的函数，如图 1-15 所示.

**解**：设 $DE=y$，

则 $S=xy$，$EA=h-y$.

$\because \triangle AFK\sim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{EA}{DA}=\dfrac{FK}{BC}$

即 $\dfrac{h-y}{h}=\dfrac{x}{a}$，

解得 $y=h-\dfrac{hx}{a}$，

从而 $S=\dfrac{hx(a-x)}{a}$.

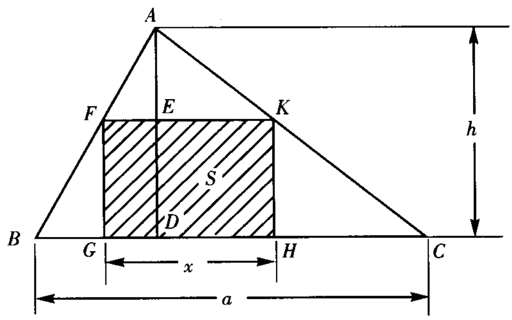


图 1-15

**【例 10】** 已知一物体的质量为 $m$，它与地面的摩擦系数是 $\mu$，设有一与水平方向成 $\alpha$ 角的拉力 $F$，要使力 $F$ 平行于地面的分力和物体与地面的摩擦力相等，求拉力 $F$ 与角 $\alpha$ 之间的函数关系，如图 1-16 所示.

**解**：要使水平拉力 $F\cos\alpha$ 与摩擦力 $R$ 平衡，

因为摩擦力 $R=\mu(mg-F\sin\alpha)$，

所以 $F\cos\alpha=\mu(mg-F\sin\alpha)$，

$$F=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\quad(0^\circ<\alpha<90^\circ).$$

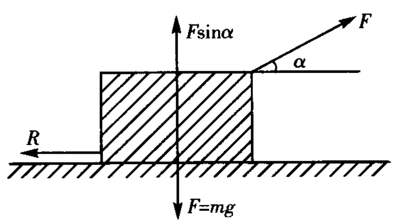


图 1-16

**【例 11】** 设合肥到某地的行李费按如下规定收费：当行李不超过 50kg 时，按基本运费 0.40 元/kg 计算；当超过 50kg 时，超过部分按 0.60 元/kg 收费，试求合肥到该地的行李费 $y$（元）与行李量 $x$(kg)之间的函数关系.

**解**：当 $0\leqslant x\leqslant 50$，$y=0.40x$；

当 $x>50$，$y=0.40\times 50+0.6(x-50)=0.6x-10$，

$$\therefore y=f(x)=\begin{cases}0.40x, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 0.6x-10, & x>50.\end{cases}$$

## 习题 1－1

1. 用区间表示下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x+3}{1+\sqrt{3x-x^2}}$；

(2) $y=\ln(4-x)+\arcsin\dfrac{x-1}{6}$；

(3) $y=\begin{cases}x, & -4\leqslant x\leqslant 0,\\ 1+x, & 0<x.\end{cases}$

2. 求下列函数的函数值：

(1) 设 $f(x)=\arcsin(\lg x)$，求 $f(\frac{1}{10})$，$f(1)$，$f(10)$；

(2) $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\leqslant 0,\\ 3^x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-3)$，$f(0)$，$f[f(-1)]$；

(3) 设 $f(x)=2x-1$，求 $f(a^2)$，$f[f(a)]$，$[f(a)]^2$.

3. 下列各对函数是否相同，为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$；

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=|x|$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$，$g(x)=x-2$.

4. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$；　　(2) $f(x)=\sin x+\cos x$；

(3) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{5}$；　　(4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

5. 做函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0,\\ 3^x, & x>0\end{cases}$ 的图形.

6. 讨论下列函数在指定区间上的单调性：

(1) $y=x^2$，　$x\in(-1,0)$；

(2) $y=\log_3 x$，　$x\in(0,+\infty)$；

(3) $y=\sin x$，　$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$；

(4) $y=x^2-x+1$，　$x\in(-\infty,+\infty)$.

7. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin 3x$；　　(2) $y=e^{\frac{1}{x}}$；

(3) $y=e^{\sin^3 x}$；　　(4) $y=\arcsin[\ln(2x+1)]$.

8. 某市的出租车按如下办法收费：路程在 3 公里内一律收费 10 元；路程在 3 公里到 10 公里之间的，超过 3 公里部分每公里加收 2 元；路程超过 10 公里的，超过 10 公里部分每公里加收 3 元. 设 $x$ 为乘车路程，$y$ 为出租车费，试建立函数关系 $y=y(x)$ 并画出函数图形.