数学物理方法(第2版)

郭玉翠 编著

清华大学出版社

内容简介

本书是在北京邮电大学出版社出版的《数学物理方法(研究生用)》的基础上修订而成的.此次修订除了对一些章节的内容作了调整,以便更适合教学外,主要增加了计算机软件 Maple 在求解定解问题中的应用,以及用 Maple 将一些结果可视化的内容.

全书内容分为 10 章,分别介绍矢量分析与场论的基础知识、数学物理定解问题的推导、求解数学物理问题的分离变量法、行波法与积分变换法、Green 函数法、变分法、二阶线性常微分方程的级数解法与 Sturm-Liouville 本征值问题、特殊函数(一)——Legendre 多项式、特殊函数(二)——Bessel 函数以及积分方程的基本知识.

本书从理论到实例都考虑了电子、通信类各专业的特点,兼顾数学理论的严谨性和物理背景的鲜明性,体现了数学物理方法作为数学应用于物理和其他科学的桥梁作用.

本书可以作为高等学校工科硕士研究生的教材,也可以供对这门课程要求较高的专业的本科生使用,或作为教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/郭玉翠编著.—2 版.—北京:清华大学出版社,2006.12
ISBN 7-302-14004-9

Ⅰ.数… Ⅱ.郭… Ⅲ.数学物理方法—高等学校—教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 121562 号

责任编辑:刘 颖 王海燕
责任校对:赵丽敏
责任印制:何 芊
出版发行:清华大学出版社 **地 址**:北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn **邮 编**:100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机:010-62770175 **邮购热线**:010-62786544
投稿咨询:010-62772015 **客户服务**:010-62776969
印 刷 者:北京鑫海金澳胶印有限公司
装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂
经 销:全国新华书店
开 本:185×230 **印 张**:21.5 **字 数**:440 千字
版 次:2006 年 12 月第 2 版 **印 次**:2006 年 12 月第 1 次印刷
印 数:1~4000
定 价:34.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177 转 3103 产品编号:020970-01

第1版前言

本教材为通信、电子、电磁场及应用物理类硕士研究生学习数学物理方法这门课程而编写，也可以作为应用数学及应用物理等对这门课程有较高要求的专业的本科生的教材或教学参考书.

本书的特点在于：一、充分考虑通信、电子类及相关专业研究生的培养目标及相关课程的设置情况，在确保理论体系完整和概念正确的前提下，加强实际背景的阐述和分析；二、注重物理思想和数学方法、手段之间的有机联系和依存关系，注重物理思想的建立，同时兼顾数学上的严谨与玄妙，不仅讲知识，更强调讲方法，充分体现数学物理方法作为数学联系其他自然科学和技术领域最重要桥梁之一的作用，培养学生综合利用数学知识解决实际问题的能力；三、体现科学的新进展，这一点一般在基础课中很难做到，本书力图加强数学物理近代方法的成分，以适应科学发展和计算机广泛普及的需要.

数学物理方法历来以内容多而杂，题目难而繁著称，教好和学好这门课程都不是容易的事.作者的初衷是写一本好的教材以帮助教师教好、学生学好这门课，但由于水平有限，不足乃至错误在所难免，敬请读者不吝赐教.

本书的编写与完成得到了赵启松教授多方面的鼓励与帮助，编者对赵老师深表敬意和谢意；本书的出版得到了北京邮电大学教材出版基金的资助；在此，编者对北京邮电大学教材出版基金委员会、北京邮电大学教务处以及北京邮电大学出版社给予的关怀与支持深表感谢；北京师范大学彭芳麟教授和北方交通大学李文博教授审阅了全书，并提出了许多宝贵意见，在此一并表示深深的感激.

编者

2002 年 12 月

第2版前言

本书第1版于2003年1月出版后，曾蒙广大师友和读者的关怀与厚爱，于2005年9月进行了第2次印刷．此次修订主要是增加了应用数学软件Maple来辅助求解数学物理定解问题，并将部分结果用Maple进行可视化的内容．因为“数学物理方法”这门课程作为众多理工科学生的基础课之一，在后续课程和完成学业后的科研工作中都有许多应用，需要学生清楚地理解其中的概念，娴熟地掌握解题方法，并且了解结果的物理意义．但是由于课程本身的内容多而难，题目繁而杂，被公认为是一门难学的课程，主要体现在公式推导多，求解习题往往要计算复杂的积分或级数等．随着计算机的深入普及，功能强大的数学软件（如Maple等）为复杂数学问题的求解提供了有力的工具，笔者近年来在科研和教学工作中对应用数学软件求解数学物理问题有了一些体会，现在尝试着将这些内容加到本次修订的教材中，目的在于：(1)将繁难的数学运算，比如求解常微分方程、计算积分、求解复杂代数方程等借助于计算机完成，可使读者更专注于模型（数学物理方程）的建立、物理思想的形成和数学方法应用于物理过程的理论体系；(2)借助于计算机强大的可视性功能，把一些抽象难懂但又非常有用的知识变成生动的、“活”的物理图像展现在读者面前，这无疑有益于读者对知识的理解和掌握．数学软件Maple的符号运算功能强大，它的最大好处是不用编程，可以直接进行符号运算，因此读者不用另外学习编程的知识，更不要求以会编程为学习基础，这会带来极大的方便，读者只要在计算机上装上Maple软件，直接输入命令即可．

本次修订除了增加上述内容外，还对原版的内容作了以下调整：将第1章“场论初步”改成“矢量分析与场论初步”，增加了矢量分析的内容，删去了矢量场的梯度、张量及其计算，以及并矢分析两节内容；将第5章“特殊函数”分成两章“特殊函数（一）——Legendre多项式”和“特殊函数（二）——Bessel函数”；在“变分法”一章中，增加了复杂泛函Euler方程的推导，因为在数学物理问题中经常会遇到求解复杂变分的问题；在“积分方程的一

般性质和解法”一章中,按照积分核的类型讲解相应的解法,以便使内容更加清晰和系统.全书的文字内容进行了重写或修改,也改正了第 1 版中几处印刷错误.书中加“*”号内容可作为选学内容,读者可根据需要取舍.

编著者十分感谢清华大学出版社对本书再版的大力支持和帮助,尤其感谢刘颖和王海燕两位编辑,其严谨、辛勤的敬业精神令人钦佩.

编著者

2006 年 6 月

目　录

第1章

矢量分析与场论初步

1.1 矢量函数及其导数与积分

在本科高等数学课程中，我们学习过矢量代数的知识，这一节是在矢量代数的基础上，进一步引进矢量函数的概念，逐步建立矢量函数微积分理论，为场论分析打下基础. 下面首先介绍矢量函数的概念，类似于数量函数，给出其极限和连续的定义.

1.1.1 矢量函数

1. 矢量函数和矢端曲线的定义

我们知道，如果在全部空间或部分空间里的每一点，都对应着某个物理量的一个确定的值，就说在这个空间里确定了该物理量的一个场. 如果该物理量是数量，就称这个场为数量场或标量场，用标量函数 $f(x,y,z)$表示. 如温度场、密度场等都是标量场. 同样我们可以定义向量场.

定义 1 对空间区域 D 上的每一点 M 确定着一个矢量 $\boldsymbol{A}$，则称在空间区域 D 内确定了一个矢量场. $\boldsymbol{A}$ 称为点 M 的矢量函数(或称向量值函数)，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(M)$. 当点用坐标$(x,y,z)$表示时，则记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$，此时称 $\boldsymbol{A}$ 是变量 x,y,z 的矢量函数(或向量值函数). 空间区域 D 称为 $\boldsymbol{A}$ 的定义域.

力场、速度场和电位场等都是矢量场.

在讨论三维或二维实数空间 $\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{R}^2$ 中的矢量函数时，我们通常将矢量函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(M)=\boldsymbol{A}(x,y,z)$和 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(M)=\boldsymbol{A}(x,y)$表示为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

和

$$A(x,y) = P_1(x,y)\boldsymbol{i} + Q_1(x,y)\boldsymbol{j},$$

或

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

和

$$\boldsymbol{A}(x,y) = (P_1(x,y), Q_1(x,y)),$$

其中 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$和 $R(x,y,z)$($P_1(x,y)$,$Q_1(x,y)$)为定义在区域 $\Omega\in\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^2)$上的(数量)函数.

当 $\boldsymbol{A}$ 的大小和(或)方向随着时间变量 t 变化时,我们得到变量 t 的向量值函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$.

定义 2 对某区间 I 上的每一个 t 值,确定一个向量 $\boldsymbol{A}$,则称向量 $\boldsymbol{A}$ 为 t 的向量值函数,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$,或 $\boldsymbol{A}(t)=A_1(t)\boldsymbol{i}+A_2(t)\boldsymbol{j}+A_3(t)\boldsymbol{k}$,式中 $A_1(t)$,$A_2(t)$,$A_3(t)$表示向量值函数的分量. 它们是 t 的三个数值函数,并且它们的定义域就是 $\boldsymbol{A}(t)$的定义域. 例如

$$\boldsymbol{A}(t) = \ln t\boldsymbol{i} + \sqrt{1-t^2}\boldsymbol{j} + t^4\boldsymbol{k},$$

分量函数分别为 $A_1(t)=\ln t$,$A_2(t)=\sqrt{1-t^2}$,$A_3(t)=t^4$,它们的定义域是$(0,1]$.

若把向量值函数写成点 M 的向径形式,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M), \tag{1.1.1}$$

则当 t 在区间 I 上变动时,向量 $\boldsymbol{r}(t)$的终点 $M(x(t),y(t),z(t))$在空间画出一条曲线,称为 $\boldsymbol{r}(t)$的轨迹曲线或矢端曲线,它的方程的参数形式是

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{1.1.2}$$

它的向量方程是

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}. \tag{1.1.3}$$

例 1 设 $\boldsymbol{F}(t)=\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}$,验证 $\boldsymbol{F}(t)$在 Oxy 平面上的轨迹曲线为逆时针方向的单位圆.

解 因 $\boldsymbol{k}$ 方向的分量为零,故曲线在 Oxy 平面上. 记 $x=\cos t$,$y=\sin t$,则

$$\|\boldsymbol{F}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

对所有 t 成立,即 $x^2+y^2=1$,故 $\boldsymbol{F}(t)$画出单位圆周. 当 t 增加时,$\boldsymbol{F}(t)$向逆时针方向转动,问题得证.

例 2 设 $\boldsymbol{F}(t)=\cos t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\sin t\boldsymbol{k}$,作 $\boldsymbol{F}(t)$的轨迹曲线.

解 设(x,y,z)为 $\boldsymbol{F}(t)$上点的坐标,则

$$x = \cos t, \quad y = \cos t, \quad z = \sqrt{2}\sin t,$$

由此有

$$x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \cos^2 t + 2\sin^2 t = 2,$$

及 $x=y$. 故点(x,y,z)在半径为$\sqrt{2}$的球面和平面 $x=y$ 上,所以 $\boldsymbol{F}(t)$的轨迹曲线是球面与平面$x=y$的交线,即大圆周,如图 1.1.1 所示.

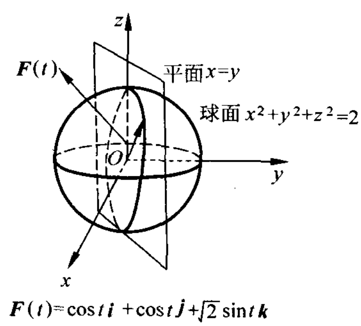

图 1.1.1

2. 向量值函数的运算

定义 3 设 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$ 是向量值函数，f,g 为实数值函数，则函数 $\boldsymbol{F}\pm\boldsymbol{G},f\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G},\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{F}\circ g$ 分别由下列各式定义：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{F}\pm\boldsymbol{G})(t)=\boldsymbol{F}(t)\pm\boldsymbol{G}(t),\\(f\boldsymbol{F})(t)=f(t)\boldsymbol{F}(t),\\(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(t)=\boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{G}(t),\\(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})(t)=\boldsymbol{F}(t)\times\boldsymbol{G}(t),\\(\boldsymbol{F}\circ g)(t)=\boldsymbol{F}(g(t)),\end{cases}\tag{1.1.4}$$

式中左端函数的定义域是使其相应右端函数都有意义的 t 的取值范围.

例 3 设 $\boldsymbol{F}(t)=\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\boldsymbol{G}(t)=-\sin t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},g(t)=\sqrt{t}$，求 $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G},g\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G},\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{F}\circ g$.

解

$$(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})(t)=(\cos t-\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t+\cos t)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k};$$

$$(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G})(t)=(\cos t+\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-\cos t)\boldsymbol{j};$$

$$(g\boldsymbol{F})(t)=\sqrt{t}\cos t\boldsymbol{i}+\sqrt{t}\sin t\boldsymbol{j}+t^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{k};$$

$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(t)=-\cos t\sin t+\sin t\cos t+t^2=t^2;$$

$$(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})(t)=t(\sin t-\cos t)\boldsymbol{i}-t(\sin t+\cos t)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k};$$

$$(\boldsymbol{F}\circ g)(t)=\boldsymbol{F}(g(t))=\cos\sqrt{t}\,\boldsymbol{i}+\sin\sqrt{t}\,\boldsymbol{j}+\sqrt{t}\,\boldsymbol{k}.$$

以上各函数除了 $g\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}\circ g$ 外的定义域都为 $(-\infty,+\infty)$，而 $g\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}\circ g$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

1.1.2 矢量函数的极限与连续性

和数量函数一样，矢量函数的极限和连续性是矢量函数的微分与积分的基础，于是我们先来介绍矢量函数的极限.

1. 矢量函数极限的定义

定义 4 设矢量函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义（但在 t_0 处可以没有定义），$\boldsymbol{A}_0$ 为一个常矢量. 对于任给 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使当 t 满足 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，就有

$$\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_0\|<\varepsilon,$$

则称 $\boldsymbol{A}_0$ 为矢量函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}_0.\tag{1.1.5}$$

一般地，设在 $\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{R}^2$ 中，矢量函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(M)$ 在 M_0 点的某个去心邻域 $U_0(M_0)$ 内有定义，$\boldsymbol{b}$ 为一常矢量，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当 $M\in U_0(M_0,\delta)$ 时，有

$$\|\boldsymbol{A}(M)-\boldsymbol{b}\|<\varepsilon$$

成立，则称 $\boldsymbol{b}$ 为矢量函数 $\boldsymbol{A}(M)$ 当 $M\to M_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{M \to M_0} \boldsymbol{A}(M) = \boldsymbol{b}.$$

定理 1 设 $\boldsymbol{A}(t)=A_1(t)\boldsymbol{i}+A_2(t)\boldsymbol{j}+A_3(t)\boldsymbol{k}$,其在 t_0 处有极限的充要条件是 $A_1(t)$,$A_2(t)$,$A_3(t)$在 t_0 处有极限,此时有

$$\lim_{t \to t_0}\boldsymbol{A}(t) = (\lim_{t \to t_0}A_1(t))\boldsymbol{i} + (\lim_{t \to t_0}A_2(t))\boldsymbol{j} + (\lim_{t \to t_0}A_3(t))\boldsymbol{k}. \tag{1.1.6}$$

这个定理给出了求矢量函数极限的方法.

2. 矢量函数极限的运算法则

矢量函数极限的定义与数值函数极限的定义完全一致,矢量函数极限的运算是通过它们的分量,即数值函数的极限进行的.因此,矢量函数也有类似于数值函数中的一些极限运算法则.

设 $\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{G}$ 是矢量函数,f,g 为实数值函数,如果$\lim\limits_{t \to t_0}\boldsymbol{F}(t)$,$\lim\limits_{t \to t_0}\boldsymbol{G}(t)$存在,并且$\lim\limits_{t \to t_0}f(t)$,$\lim\limits_{s \to s_0}g(s)=t_0$ 存在,则有

$$\begin{aligned}
&① \lim_{t \to t_0}(\boldsymbol{F}\pm\boldsymbol{G})(t)=\lim_{t \to t_0}\boldsymbol{F}(t)\pm\lim_{t \to t_0}\boldsymbol{G}(t);\\
&② \lim_{t \to t_0}(f\boldsymbol{F})(t)=\lim_{t \to t_0}f(t)\lim_{t \to t_0}\boldsymbol{F}(t);\\
&③ \lim_{t \to t_0}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(t)=\lim_{t \to t_0}\boldsymbol{F}(t)\cdot\lim_{t \to t_0}\boldsymbol{G}(t);\\
&④ \lim_{t \to t_0}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})(t)=\lim_{t \to t_0}\boldsymbol{F}(t)\times\lim_{t \to t_0}\boldsymbol{G}(t);\\
&⑤ \lim_{t \to t_0}(\boldsymbol{F}\circ g)(s)=\lim_{s \to s_0}\boldsymbol{F}(g(s)).
\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

例 4 设 $\boldsymbol{F}(t) = \cos\pi t\,\boldsymbol{i} + 2\sin\pi t\boldsymbol{j} + 4t^2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{G}(t) = t\,\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{k}$,求 $\lim\limits_{t \to 1}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(t)$,$\lim\limits_{t \to 1}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})(t)$.

解 对所求极限可以选用两种方法:①先求 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 的乘积,然后取此乘积的极限;②先求$\lim\limits_{t \to 1}\boldsymbol{F}(t)$和$\lim\limits_{t \to 1}\boldsymbol{G}(t)$,然后按上述公式求这两个极限的乘积.

对$\lim\limits_{t \to 1}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(t)$应用方法①.因为

$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(t) = (\cos\pi t\boldsymbol{i} + 2\sin\pi t\boldsymbol{j} + 4t^2\boldsymbol{k})\cdot(t\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{k}) = t\cos\pi t + 4t^5,$$

所以,有

$$\lim_{t \to 1}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(t) = \lim_{t \to 1}(t\cos\pi t + 4t^5) = \cos\pi + 4 = 3.$$

对$\lim\limits_{t \to 1}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})(t)$应用方法②.因为

$$\lim_{t \to 1}\boldsymbol{F}(t) = \cos\pi\boldsymbol{i} + 2\sin\pi\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}, \quad \lim_{t \to 1}\boldsymbol{G}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k},$$

所以,有$\lim\limits_{t \to 1}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})(t)=(-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})=5\boldsymbol{j}$.

3. 矢量函数的连续性

定义 5 如果

$$\lim_{t \to t_0}\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}(t_0), \tag{1.1.8}$$

则称矢量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t_0 点连续.

矢量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t_0 点连续的充要条件是它的三个分量在 t_0 处连续.

对于 $\mathbb{R}^3$（或 $\mathbb{R}^2$）中的矢量函数 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(M)$，如果有

$$\lim_{M\to M_0}\boldsymbol{A}(M)=\boldsymbol{A}(M_0),$$

则称 $\boldsymbol{A}(M)$ 在 M_0 点连续.

例 5　求矢量函数 $\boldsymbol{A}(M)=\left(\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1},x+z,\dfrac{\sin(xy)}{y}\right)$ 的极限 $\lim\limits_{M\to(0,0,0)}\boldsymbol{A}(M)$.

解　因为 $\lim\limits_{M\to(0,0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=2$，$\lim\limits_{M\to(0,0,0)}(x+z)=0$，$\lim\limits_{M\to(0,0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}=0$，故 $\lim\limits_{M\to(0,0,0)}\boldsymbol{A}(M)=(2,0,0)$.

例 6　讨论矢量函数 $\boldsymbol{A}(M)=(x+y)\boldsymbol{i}+\dfrac{x^2-9}{x-3}\boldsymbol{j}+(x^3+z)\boldsymbol{k}$ 在点 $M_0(3,1,-1)$ 处的连续性.

解　分别考虑三个分量函数的连续性：$\lim\limits_{M\to M_0}(x+y)=4=P(M_0)$，连续；$\lim\limits_{M\to M_0}(x^3+z)=26=R(M_0)$，连续；虽然 $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ 存在，但 $Q(M_0)$ 无定义，M_0 是 $Q(M)$ 的第一类间断点. 因此，所论矢量函数在 M_0 点不连续.

1.1.3　矢量函数的导数和积分

1. 矢量函数的导数

设有起点在 O 点的矢量函数 $\boldsymbol{A}(t)$，当数量变量 t 在其定义域内从 t 变到 $t+\Delta t(\Delta t\neq 0)$ 时，对应的矢量分别为（如图 1.1.2）

$$\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{OM},\quad \boldsymbol{A}(t+\Delta t)=\overrightarrow{ON},$$

而

$$\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{MN}$$

叫做向量值函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的增量，记作 $\Delta\boldsymbol{A}$，即 $\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{MN}$，据此，我们给出向量值函数导数的定义如下.

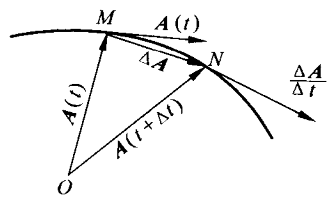

图　1.1.2

定义 6　设矢量函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t 的某一个邻域内有定义，并设 $t+\Delta t$ 也在这个邻域内，如果极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$

存在，则称此极限为 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 t 的导数（简称导矢），记为

$$\boldsymbol{A}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}.\tag{1.1.9}$$

此时称 $\boldsymbol{A}(t)$在 t 处可微(或可导),或 $\boldsymbol{A}(t)$在 t 处有导数,或 $\boldsymbol{A}'(t)$存在.

定理 2 设 $\boldsymbol{A}(t)=A_1(t)\boldsymbol{i}+A_2(t)\boldsymbol{j}+A_3(t)\boldsymbol{k}$,其在 t_0 处可导的充要条件是 $A_1(t)$, $A_2(t)$,$A_3(t)$在 t_0 处可导,此时有

$$\boldsymbol{A}'(t_0) = A_1'(t_0)\boldsymbol{i} + A_2'(t_0)\boldsymbol{j} + A_3'(t_0)\boldsymbol{k}. \tag{1.1.10}$$

这个定理说明向量值函数的求导可以化为数量函数的求导.

例 7 已知圆柱螺旋线的向量方程为

$$\boldsymbol{r}(\theta) = a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j} + b\theta\boldsymbol{k},$$

求 $\boldsymbol{r}'(\theta)$.

解

$$\boldsymbol{r}'(\theta) = (a\cos\theta)'\boldsymbol{i} + (a\sin\theta)'\boldsymbol{j} + (b\theta)'\boldsymbol{k} = -a\sin\theta\boldsymbol{i} + a\cos\theta\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}.$$

2. 矢量函数的求导公式

① $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{C}$ 为常矢量);

② $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k\boldsymbol{F})(t)=k\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}$ (k 为常数);

③ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{F}\pm\boldsymbol{G})(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(t)}{\mathrm{d}t}\pm\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}(t)}{\mathrm{d}t}$;

④ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\boldsymbol{F})(t)=\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{F}(t)+f(t)\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(t)}{\mathrm{d}t}$; (1.1.11)

⑤ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{G}(t)+\boldsymbol{F}(t)\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}(t)}{\mathrm{d}t}$;

⑥ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(t)}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{G}(t)+\boldsymbol{F}(t)\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}(t)}{\mathrm{d}t}$;

⑦ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{F}\circ g)(t)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(g)}{\mathrm{d}g}\dfrac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}$.

这些公式的证明,与微积分学中数量函数的类似公式的证明法完全相同. 比如选证公式⑤:因为

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}) &= (\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F})\cdot(\boldsymbol{G}+\Delta\boldsymbol{G})-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}\\ &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{G}+\Delta\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}+\Delta\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}\\ &= \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{G}+\Delta\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}+\Delta\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{G},\end{aligned}$$

用 Δt 除等式两端,有

$$\frac{\Delta(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})}{\Delta t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{G}}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta t}\cdot\boldsymbol{G}+\Delta\boldsymbol{F}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{G}}{\Delta t},$$

再令 $\Delta t\to0$,就得到

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{G}+\boldsymbol{0}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{G}.$$

例 8　证明矢量函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的模不变的充要条件是 $\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=0$.

证明　假定 $\|\boldsymbol{A}\|=$ 常数，则有 $\boldsymbol{A}^2=\|\boldsymbol{A}\|^2=$ 常数. 两端对 t 求导，得到

$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=0.$$

反之，若有 $\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=0$，则有 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^2}{\mathrm{d}t}=0$. 从而 $\boldsymbol{A}^2=\|\boldsymbol{A}\|^2=$ 常数，所以有

$$\|\boldsymbol{A}\|=\text{常数}.$$

这个例子可以简单地说成定常矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 与其导矢相互垂直.

例 9　设 $\boldsymbol{F}(t)=\arctan t\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{G}(t)=\boldsymbol{i}+\ln t\boldsymbol{j}-2t\boldsymbol{k}$，求 $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})'(t)$，$(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})'(t)$.

解　对题中要求的两个导数可以选用两种方法：①先求 $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(t)$ 或 $(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})(t)$，然后求导；②先求 $\boldsymbol{F}'(t)$ 和 $\boldsymbol{G}'(t)$，然后再用求导公式求 $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})'(t)$ 或 $(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})'(t)$.

对 $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})'(t)$ 选用方法①：因为 $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})(t)=\arctan t-10t$，故

$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})'(t)=\frac{1}{1+t^2}-10.$$

对 $(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})'(t)$ 选用方法②：因为

$$\boldsymbol{F}'(t)=\frac{1}{1+t^2}\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{G}'(t)=\frac{1}{t}\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{F}'(t)\times\boldsymbol{G}(t)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{1}{1+t^2}&0&0\\ 1&\ln t&-2t\end{vmatrix}=\frac{2t}{1+t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\ln t}{1+t^2}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{F}(t)\times\boldsymbol{G}'(t)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \arctan t&0&5\\ 0&\frac{1}{t}&-2\end{vmatrix}=\frac{-5}{t}\boldsymbol{i}+2\arctan t\boldsymbol{j}+\frac{\arctan t}{t}\boldsymbol{k},$$

所以，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})'(t)&=\boldsymbol{F}'(t)\times\boldsymbol{G}(t)+\boldsymbol{F}(t)\times\boldsymbol{G}'(t)\\&=-\frac{5}{t}\boldsymbol{i}+\left(\frac{2t}{1+t^2}+2\arctan t\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\ln t}{1+t^2}+\frac{\arctan t}{t}\right)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

3. 高阶导数

向量值函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的导数的导数称为 $\boldsymbol{A}(t)$ 的二阶导数，记为 $\boldsymbol{A}''(t)$. 设

$$\boldsymbol{A}(t)=A_1(t)\boldsymbol{i}+A_2(t)\boldsymbol{j}+A_3(t)\boldsymbol{k},$$