湖南省高等院校21世纪课程教材 · 湘潭大学教材建设基金资助教材

工程数学

（线性代数与概率统计）

周勇 朱砾 骆先南 谢清明 刘韶跃 等编

湖南科学技术出版社
Hunan Science & Technology Press

TB11
47
2004

湖南省高等院校21世纪课程教材 ★ 湘潭大学教材建设基金资助教材

工程数学

（线性代数与概率统计）

周勇 朱砾 骆先南 谢清明 刘韶跃 等编

湖南科学技术出版社
Hunan Science & Technology Press

湖南省高等院校 21 世纪课程教材
湘潭大学教材建设基金资助教材
工程数学(线性代数与概率统计)
编　　者：周　勇　朱　砾　骆先南
　　　　　谢清明　刘韶跃等
策划编辑：曹　阳
文字编辑：陈一心
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 276 号
　　　　　http: //www. hnstp. com
印　　刷：长沙政院印刷厂
　　　　（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：长沙市芙蓉中路 3 段 33 号
邮　　编：410074
出版日期：2006 年 2 月第 1 版第 2 次
开　　本：700mm×960mm　1/16
印　　张：19
字　　数：338000
书　　号：ISBN 7－5357－4047－2/O·231
定　　价：32.00 元
(版权所有·翻印必究)

序　言

工程数学是继高等数学之后大学数学中又一门重要课程，包括线性代数和概率统计两大部分．线性代数中的矩阵、线性方程组在科学技术和经济领域中有着广泛的应用．概率论与数理统计则是解决和处理自然科学和社会科学中大量随机现象问题的有力工具．正因为如此，线性代数与概率统计不仅列为理工类和经济类各专业所必修的内容，而且成为研究生入学考试数学中的必考内容．然而，经验表明，学生在学习这两部分内容并把它们应用于实际，都往往感到困惑，无所适从．线性代数中，基本概念和重要结论多而抽象，概率统计不仅思维缜密，而且有异于确定性数学中所习惯的形式逻辑的思维方式．因此，把握教学改革的发展趋势，探索教学体系和教学内容的变迁轨迹，编写一本能适应新形势下需求的工程数学教材是非常必要的．《工程数学》一书的编写和出版，不仅为培养学生的数学素质，满足日益拓广的专业需要，提供了丰富的知识载体，而且为有志于报考研究生的学生提供了有力的支撑．

本书作者常年工作在教学科研第一线，具有深厚的理论功底和丰富的教学经验．对于教材的编写，从参与第一本《高等数学复习指南》的编著，到后来的湖南省21世纪课程系列教材《大学数学》的出版，经历了十年有余，积累了许多宝贵的资料和经验．因此，今天本书的出版已是顺理成章，水到渠成．本书内容经典，体系完备，结构合理，重点、难点叙述详尽，通俗易懂．特别是在例题和习题的选择配置方面，更是循序渐进，层次分明，集启发性，实用性和新颖性于一体，从而增强了该书的适用性，因此，本书既可用作大学理工类、经济类各个层次和专业的教材，也是一本有实用价值的参考书．

工程数学是我校正在建设的省级重点课程．课程建设，教材为先．该书的出版，预示着工程数学在继省优秀课程高等数学之后，将会成为又一门新的优秀数学课程．

周维楚

2004年7月于湘潭大学

前　言

工程数学作为高等院校理工科一门重要的基础理论课，对提高学生的素质、优化知识结构、培养学生的逻辑思维能力、抽象思维能力、分析问题和解决问题的能力，提高创新意识，并为后续课程的学习打下坚实的数学基础起着重要的作用，在公共基础课中有着重要的地位.

近几年来，我们承担了湖南省高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划项目“工程数学课程体系的改革和多媒体教学课件的研制”，湘潭大学工程数学课程被列为省级重点课程和湘潭大学精品课程.在此基础上，我们结合多年的教学实践，编写了这本工程数学教材，该书被选入了湘潭大学教材建设基金资助教材.全书共十六章，主要介绍线性代数、概率论和数理统计等基础知识.本书内容的选取紧扣大纲，力求简明扼要，文字叙述力求通俗易懂，深入浅出，每一章都有典型例题和习题.本教材适合高等院校工科各专业学生和教师使用.

本书由湘潭大学数学与计算科学学院周勇教授，朱砾副教授，骆先南副教授，谢清明副教授，刘韶跃副教授共同编写完成.借此机会，编者感谢湘潭大学教务处、数学与计算科学学院的大力支持，感谢湖南科学技术出版社的编辑们为本书的出版付出的辛勤努力，同时感谢周维楚教授在本书的编写过程中提出许多宝贵的意见和建议并为本书作序.

限于编者的学识水平和经验，书中尚有不妥之处，恳请同行和读者批评指正.

编　者

2004年6月于湘潭大学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章　行列式

第一节　二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

使用加减消元法，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1)有解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

(1.2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得. 其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1.1)的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组(1.1)中的位置，排成两行两列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)所确定的行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1.4}$$

数 a_{ij} $(i = 1,2;\ j = 1,2)$ 称为行列式(1.4)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义可用对角线法则记忆. 如图 1－1 所示，即实线联结的两个元素(主对角线)的乘积减去虚线联结的两个元素(次对角线)的乘积.

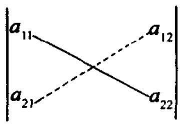

图 1－1

例 1 $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1-(-2)\times 2=7.$

二、三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.5}$$

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

上式称为数表(1.5)所确定的三阶行列式,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.6}$$

三阶行列式表示的代数和,也可以由下面的对角线法则来记忆,如图 1-2 所示,其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项,各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项.

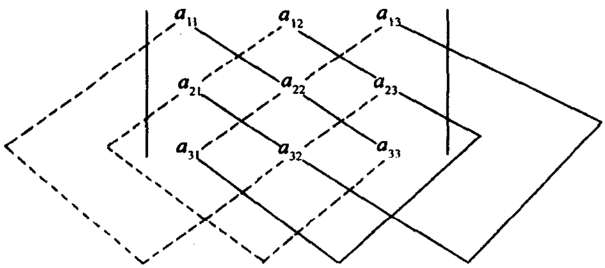

图 1-2

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&-2&-1\\-3&4&-5\end{vmatrix}.$$

解　由对角线法则

$$D=1\times(-2)\times(-5)+2\times(-1)\times(-3)+3\times4\times2-$$
$$3\times(-2)\times(-3)-2\times2\times(-5)-1\times4\times(-1)=46.$$

例 3　$\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&0\\4&1&1\end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

解　由对角线法则

$$\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&0\\4&1&1\end{vmatrix}=a^2-1.$$

$a^2-1>0$ 当且仅当 $|a|>1$,因此可得:

$\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&0\\4&1&1\end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是 $|a|>1$.

第二节　n 阶行列式的定义

一、全排列及其逆序数

把 n 个不同元素按某种次序排成一列,称为 n 个元素的全排列. n 个元素的全排列的总个数,一般用 P_n 表示,且

$$P_n=n!.$$

对于 n 个不同元素,先规定各元素间有一个标准次序(如 n 个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序),于是在这 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说它们构成了一个逆序.一个排列中所有逆序的总和,称为该排列的逆序数,排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如,对排列 32514 而言,4 与 5 就构成了一个逆序,1 与 3、2、5 也分别构成一个逆序,3 与 2 也构成一个逆序,所以,$\tau(32514)=5$.

逆序数的计算法:不失一般性,不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数,并规定由小到大为标准次序,设 $i_1i_2\cdots i_n$ 为这 n 个自然数的一个排列,自右至左先计算排在最后一位数字 i_n 的逆序数,等于排在 i_n 前面且比 i_n 大的数字的个数,

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

再计算 $i_{n-1}\cdots i_2$ 的逆序数，然后把所有数字的逆序数加起来，就是该排列的逆序数．

例1 计算 $\tau[1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n)]$．

解 从排列 $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n)$ 看，前 n 个数 $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)$ 之间没有逆序，后 n 个数 $2\ 4\cdots(2n)$ 之间也没有逆序，只有前后 n 个数之间才构成逆序．

$2n$ 最大且排在最后，逆序数为 0，

$2n-2$ 的前面有 $2n-1$ 比它大，故逆序数为 1，

$2n-4$ 的前面有 $2n-1$、$2n-3$ 比它大，故逆序数为 2，

………………

2 前面有 $n-1$ 个数比它大，故逆序数为 $n-1$，因此有

$$\tau[1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n)]=0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列．

二、对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素保持不动，这种作出新排列的方法叫做对换．将相邻两个元素对换，叫做相邻对换．

定理 2.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性．

证 先证相邻对换的情形．设排列为

$$a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{ab}b_1b_2\cdots b_n,$$

对换 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，变为 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{ba}b_1b_2\cdots b_n$，显然这时排列中除 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两数的顺序改变外，其他任意两数和任意一个数与 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 之间的顺序都没有变．当 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 时，经对换后，$\boldsymbol{a}$ 的逆序数不变，$\boldsymbol{b}$ 的逆序数减少 1；当 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ 时，对换后，$\boldsymbol{a}$ 的逆序数增加 1，$\boldsymbol{b}$ 的逆序数不变，所以新排列与原排列奇偶性不同．

再证一般对换的情形．

设排列为 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{a}b_1b_2\cdots b_n\boldsymbol{b}c_1c_2\cdots c_p$，对换 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，变为 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{b}b_1b_2\cdots b_n\boldsymbol{a}c_1c_2\cdots c_p$．可以把它看做将原排列作 n 次相邻对换变成 $a_1a_2\cdots a_mb_1\cdots b_n\boldsymbol{ab}c_1\cdots c_p$，再作 $n+1$ 次相邻对换变成 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{b}b_1b_2\cdots b_n\boldsymbol{a}c_1c_2\cdots c_p$．因此经过 $2n+1$ 次相邻对换，排列 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{a}b_1b_2\cdots b_n\boldsymbol{b}c_1c_2\cdots c_p$ 变为 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{b}b_1b_2\cdots b_n\boldsymbol{a}c_1c_2\cdots c_p$．所以这两个排列的奇偶性不同．

三、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先研究三阶行列式的定义，三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

由定义可看出：

(1) 上式右边的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列；且每一项三个元素的第一个下标(行标)依次为 123，排成了标准次序，第二个下标(列标)排成了 $p_1p_2p_3$，它是 1,2,3 三个数的某一个排列，对应上式右端的 6 项，恰好等于这三个数排列的种数. 因此除了正负号外，右端的每一项都可以写成下列形式：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $p_1p_2p_3$ 是 1,2,3 的某一个排列，其项数等于 $P_3 = 3!$.

(2) 各项的正、负号与列标排列的逆序数有关. 易验证上式右端带正号的项的列下标的排列都是偶排列，带负号的项的列下标的排列都是奇排列. 因此各项所带符号由该项列下标的排列的奇偶性所决定，从而各项可表示为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

综合(1)、(2)得：三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $\tau(p_1p_2p_3)$ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数. $\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有全排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

由此，我们引入 n 阶行列式的定义.

定义 2.1　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，并冠以符号 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$，即得

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{2.1}$$

的项，由于 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，这样的排列共有 $n!$ 个，

因而形如(2.1)式的项共有 $n!$ 项,所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为n阶行列式,记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记为 $\det(a_{ij})$,其中数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}. \tag{2.2}$$

按此定义的二阶、三阶行列式,与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的.特别当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a|=a$,注意与绝对值记号的区别.

例 2 按行列式的定义计算下三角形行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中未写出的元素全为零(以后均此).

解 由定义,n 阶行列式中共有 $n!$ 项,其一般项为

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $\tau=\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.现第 1 行除 a_{11} 外其余元素全为零,故只有一个元素 a_{11},在第 2 行中除了 a_{21},a_{22} 外全是零,故应在 a_{21},a_{22} 中取一个,且只能取一个,因为 a_{11} 是第一行第一列的元素,$p_1=1$,故 $p_2,\cdots,p_n$ 不能再取 1,所以 $p_2=2$,即第二行取 a_{22},依此类推,第 n 行只能取 $p_n=n$,即取元素 a_{nn},从而有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即 D 等于主对角线上元素的乘积.

同理可得上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

作为三角形式特例的对角行列式(除对角线上的元素外,其他元素都为0,在行列式中未写出来),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例3 证明

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证 由行列式的定义

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

其中 $\tau=\tau[n(n-1)\cdots 1]$为排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数,又

$$\tau[n(n-1)\cdots 1] = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{(n-1)n}{2},$$

所以结论得以证明.

四、n 阶行列式定义的其他形式

利用定理2.1,我们来讨论行列式定义的其他表示法.

对于行列式的任一项

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列,对换 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这时,这一项的值不变,而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换.设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 τ_1,则 τ_1 为奇数;设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots$

$p_i \cdots p_n$ 的逆序数为 τ_2，则

$$(-1)^{\tau_2} = -(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)}, \text{故} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} = (-1)^{\tau_1 + \tau_2},$$

于是

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau_1 + \tau_2} a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}.$$

这就说明，对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了一次对换，因此行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性. 经过一次对换如此，经过多次对换亦如此. 于是经过若干次对换，使列标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ [逆序数 $\tau = \tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$] 变为自然排列（逆序数为 0）；行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1 q_2 \cdots q_n$，则有

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}.$$

又若 $p_i = j$，则 $q_j = i$（即 $a_{ip_i} = a_{ij} = a_{q_j j}$），可见排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 由排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 所唯一确定.

由此可得

定理 2.2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}. \tag{2.3}$$

证 按行列式定义有

$$D = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

记

$$D_1 = \sum (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n},$$

按上面的讨论知：对于 D 中任一项 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$，总有 D_1 中唯一的一项 $(-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等；反之，对于 D_1 中的任一项 $(-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$，同理总有 D 中唯一的一项 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 与之对应并相等，所以 $D = D_1$.

更一般的

定理 2.3 n 阶行列式可定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau_1 + \tau_2} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}, \tag{2.4}$$

其中 $\tau_1 = \tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$，$\tau_2 = \tau(q_1 q_2 \cdots q_n)$.

第三节　行列式的性质

记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
将其中的行与列互换，即把行列式中的各行换成相应的列，得到行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
上式称为行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T}（或记为 D'）.

性质 1　$D=D^{\mathrm{T}}$.

证　记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式
$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$
则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按行列式的定义
$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$
由定理 2.2 知 $D^{\mathrm{T}}=D$.

此性质表明，在行列式中行与列有相同的地位，凡是有关行的性质对列同样成立，反之亦然.

性质 2　交换行列式的两行（或两列），行列式改变符号.

证　设行列式
$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$
是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 交换第 i、j 两行得到的，当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i$ 或 j 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$. 于是

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com