★高职高专通用教材★

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编◎胡强国
副主编◎周志燕

下册

合肥工业大学出版社

高职高专通用教材

高等数学(下)

主　编　胡强国
副主编　周志燕
编　委　(以姓氏笔画为序)
冯英华　周志燕　宫传瑞
胡强国　程黄金　喻为民
主　审　史元祜

合肥工业大学出版社

高 等 数 学(下)

主　编　胡强国　　　　　　　　　　责任编辑　陆向军

出　版	合肥工业大学出版社	**发　行**	全国新华书店
地　址	合肥市屯溪路 193 号	**开　本**	787×1092　1/16
邮　编	230009	**总印张**	21.5　　**总字数**　536 千字
电　话	总编室　0551－2903938	**版　次**	2006 年 12 月第 1 版
	发行部　0551－2903188	**印　次**	2006 年 12 月第 1 次印刷
网　址	www.hfutpress.com.cn	**印　刷**	安徽江淮印务有限责任公司

ISBN 7－81093－424－4/O・28　　　　　**定价**:34.00 元(**本册定价**:17.00 元)

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/胡强国主编.—合肥:合肥工业大学出版社,2006.12
ISBN 7－81093－424－4

Ⅰ.高…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.高等数学－高等学校－教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第071654号

前　言

《高等数学》是高职高专工科、经济类和医学类等各专业的一门基础课，为适应高职高专教学改革和发展的需要，在淮南联合大学基础部牵头和组织下，由教学第一线经验丰富的骨干教师联合组成《高等数学》编写组，进行本教材的编写工作。本书从高职高专的培养目标和数学课程的教学基本要求出发，汲取了理、工、农和医类培养应用型人才的高等学校专科数学教学改革的成功经验。本教材力求具有以下特点：

1. 突出培养应用型人才的宗旨，注重贯彻“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，使本教材更符合高职高专的培养目标，更适合高职高专的数学课程的教学需要，更具有高职高专的特色。

2. 强调数学的思想和方法，并力图通过较多的例题和习题，介绍众多应用领域，促进学生数学素质的培养和训练。

3. 教材内容难度适中，注意高等教育大众化的新形势，如极限部分只介绍描述定义，让学生尽快学习导数与微分、积分的知识，全书通俗易懂。

本教材分上、下两册，上册的主要内容是微积分基本知识，下册的主要内容是线性代数和概率论与数理统计的相关内容。

本教材由胡强国主编，周志燕任副主编，参加本教材编写的成员有（以姓氏笔画为序）：冯英华、周志燕、宫传瑞、胡强国、程黄金和喻为民。

本教材由淮南联合大学原基础部主任史元祜副教授主审，他对本教材编写提出了许多宝贵的意见。编写组在本教材的编写过程中得到校领导、教务处和郑亚强等同志的大力支持和帮助，编者在此表示衷心感谢。

由于我们的水平所限，加上时间较紧，因此书中必有不少缺点和错误，敬请各位专家、同行和读者批评指正。

编　者

2006 年 12 月

目　录

第一章　行列式与克莱姆法则

第一节　二阶与三阶行列式 …… 1
第二节　n 阶行列式 …… 3
第三节　行列式的性质及行列式的计算举例 …… 6
第四节　克莱姆法则 …… 10
本章小结 …… 13
复习题一 …… 13

第二章　矩阵

第一节　矩阵的概念与运算 …… 15
第二节　几种特殊的矩阵 …… 22
第三节　分块矩阵 …… 25
第四节　逆矩阵 …… 28
第五节　矩阵的初等变换 …… 33
本章小结 …… 38
复习题二 …… 38

第三章　n 维向量和线性方程组

第一节　n 维向量 …… 41
第二节　向量间的线性关系 …… 42
第三节　向量组和矩阵的秩 …… 46
第四节　线性方程组的解法 …… 50
第五节　线性方程组解的结构 …… 57
本章小结 …… 63
复习题三 …… 63

第四章　随机事件与概率

第一节　随机事件 …… 65
第二节　事件的概率 …… 69
第三节　条件概率、全概率公式与贝叶斯公式 …… 72
第四节　事件的独立性与贝努利概型 …… 76
本章小结 …… 80
复习题四 …… 80

第五章　随机变量及其分布

第一节　随机变量与分布函数 …… 82

第二节 离散型随机变量及分布 …… 84
第三节 连续型随机变量及分布 …… 88
第四节 一维随机变量函数的分布 …… 94
第五节 随机变量的数字特征 …… 96
第六节 大数定律和中心极限定理 …… 103
本章小结 …… 106
复习题五 …… 106

第六章 参数估计与假设检验

第一节 样本及抽样分布 …… 108
第二节 参数估计 …… 114
第三节 假设检验 …… 120
本章小结 …… 128
复习题六 …… 128

第七章 一元线性回归分析

第一节 一元线性相关与回归直线方程 …… 130
第二节 线性相关关系的检验 …… 133
第三节 利用回归直线进行预测和控制 …… 135
本章小结 …… 139
复习题七 …… 139

附录

附表一 常用分布表 …… 141
附表二 正态分布表 …… 142
附表三 t 分布表 …… 143
附表四 F 分布表(一) …… 144
F 分布表(二) …… 146
F 分布表(三) …… 148
F 分布表(四) …… 150
附表五 χ^2 分布表 …… 152

第一章　行列式与克莱姆法则

第一节　二阶与三阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

为消去未知量 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘(1-1) 的两个方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

类似地，我们消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21};$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得线性方程组(1-1) 的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1-2}$$

(1-2) 式中分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得. 为便于记忆求解公式(1-2)，引进二阶行列式的概念.

定义 1　用 2^2 个数组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示数值 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式的元素，行列式中横排称为为行，竖排称为列，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

根据二阶行列式的定义，(1-2) 式中的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

那么(1-2)式可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

上面的行列式 D 是由方程组(1-1)的系数所构成的,称为方程组(1-1)的系数行列式,而 D_1 与 D_2 则分别是用方程组(1-1)的常数项 b_1,b_2 替换其系数行列式 D 中 x_1 与 x_2 的系数列后所构成的行列式.

【例 1】 计算二阶行列式:$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$.

解:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = (-2)\times 8 - 3\times 4 = -28.$$

【例 2】 解线性方程组:$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 = 2. \end{cases}$

解:$\because D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 10 = -3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

$\therefore$ 方程组的解为$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-3}{-1} = 3, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{1}{-1} = -1. \end{cases}$

仿照二阶行列式,下面给出三阶行列式的定义.

定义 2 用 3^2 个数组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示数值 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$,称为三阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

等式右端称为三阶行列式的展开式,它有如下特点:共有六项,每一项都是行列式的不同

行、不同列的三个元素之积，其中三项取正号，三项取负号.

【例 3】 计算三阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}2&1&3\\5&3&2\\-1&4&-3\end{vmatrix}.$$

解：

$$\begin{aligned}D&=2\times3\times(-3)+1\times2\times(-1)+3\times5\times4-3\times3\times(-1)-1\times5\times(-3)-2\times2\times4\\&=-18-2+60-(-9)-(-15)-16\\&=48\end{aligned}$$

【例 4】 求解方程：

$$\begin{vmatrix}x^2&0&1\\1&-4&-1\\-x&8&3\end{vmatrix}=-16.$$

解：方程左端的三阶行列式

$$D=-12x^2+8-4x+8x^2=-4x^2-4x+8.$$

从而
$$-4x^2-4x+8=-16.$$

即
$$x^2+x-6=0.$$

解方程，得 $x_1=-3,x_2=2$.

习题 1－1

1. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix}7&2\\-2&4\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}-3&5\\6&-7\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}3&4&-5\\8&7&-2\\2&-1&8\end{vmatrix}$.

2. 用行列式解线性方程组：$\begin{cases}4x+7y=-13,\\5x+8y=-14.\end{cases}$

第二节　n 阶行列式

三阶行列式与二阶行列式有如下关系：

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{1-3}$$

其中三个二阶行列式分别是原来的三阶行列式 D 中划去 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 所在第 1 行与第 j 列的元素，剩下的元素保持原来相对位置所组成的二阶行列式.

按照(1-3)式这一规律，我们可用三阶行列式定义四阶行列式，以此类推，在定义了 $n-1$

阶行列式之后，便可得 n 阶行列式的定义.

定义 1 用 n^2 个数组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其值为

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \tag{1-4}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为 n 阶行列式 D 中第 i 行第 j 列的元素.

这种用低阶行列式定义高一阶行列式的方法，称为递推定义法.

定义 2 在 n 阶行列式 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素后，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的相对位置所构成的 $(n-1)$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

$(-1)^{i+1}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

于是 n 阶行列式递推式定义(1-4)可写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}. \tag{1-5}$$

(1-5)式又称为行列式 D 按第一行元素展开式.

【例 1】 已知

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 6 \\ -3 & -4 & -2 & 7 \\ 8 & 9 & -5 & -6 \end{vmatrix},$$

求 D 中元素 -4 的余子式及代数余子式.

解:因为 $a_{32}=-4$,所以 $a_{32}=-4$ 的余子式为

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1&4&0\\5&-1&6\\8&-5&-6\end{vmatrix}=348.$$

而 -4 的代数余子式为

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-348.$$

【例 2】 计算:

$$D=\begin{vmatrix}3&2&0&-1\\2&1&-1&0\\0&2&1&-1\\1&-1&0&-2\end{vmatrix}.$$

解:由 n 阶行列式定义,得

$$D=3\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\\-1&0&-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&-1&0\\0&1&-1\\1&0&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\1&-1&0\end{vmatrix}$$
$$=-21+6+5=-10.$$

主对角线以上的元素均为零的行列式称为下三角行列式;主对角线以下的元素均为零的行列式称为上三角行列式.

【例 3】 求下三角行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解:因为第一行元素中除 a_{11} 可能不为零外,其余元素都为零,因此按第一行元素展开只有一项,如此逐次按第一行元素展开,得

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\cdots&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n2}&a_{n3}&a_{n4}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&0&\cdots&0\\a_{43}&a_{44}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n3}&a_{n4}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这就是说,下三角行列式的值等于主对角线上所有元素的乘积.

习题 1—2

1. 写出三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{13}, a_{22}, a_{32} 的代数余子式.

2. 计算：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

第三节　行列式的性质及行列式的计算举例

前面我们用行列式的定义并不困难地得到 n 阶行列式的结果，但是当行列式的阶数越大，计算量也越大. 为此，我们讨论 n 阶行列式的性质，以便利用这些性质简化行列式的计算.

定义 1　设 n 阶行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 中的行与列互换，所得的 n 阶行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^T. 即

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式与其转置行列式相等，即对任意行列式 D，有 $D = D^T$.

性质 1 表明凡是对行列式的"行"成立的性质对"列"也同样成立，反之亦然.

性质 2　交换行列式的两行(列) 行列式变号(交换 i、j 两行(列))，记为

$$r_i \longleftrightarrow r_j (c_i \longleftrightarrow c_j)；$$

推论　行列式中有两行(列) 的对应元素相等，则此行列式等于零.

证明：交换行列式中对应元素相等的两行(列)，得到行列式仍是 D，由性质 2，得 $D = -D$，所以 $D = 0$.

性质 3　行列式某一行(列) 的所有元素同乘以数 k，等于用数 k 乘以这个行列式.

行列式中第 i 行或第 j 列中所有元素都乘以数 k，记作 kr_i 或 kc_j.

推论　行列式中某一行(列) 所有元素有公因子数 k，则数 k 可提到行列式符号外面.

性质 4　行列式中有两行(列) 的对应元素对应成比例，则此行列式等于零.

性质 5　行列式的某一行(列) 的元素都是两数之和，则这个行列式等于两个行列式之和.

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$.

性质 6　把行列式某一行(列)的各元素同乘以数 k 再加到另一行(列)的对应元素上去，则行列式的值不变.

数 k 乘第 i 行(列)的各元素，再加到第 j 行(列)的对应元素上，记作 $kr_i+r_j(kc_i+c_j)$.

例如，以数 k 乘第 i 行加到第 j 行上，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[(i\neq j)]{kr_i+r_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 7　n 阶行列式：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

等于其任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\qquad(i=1,2,3,\cdots,n)\tag{1-6}$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\qquad(j=1,2,3,\cdots,n)\tag{1-7}$$

(1-6)式称为行列式 D 按第 i 行展开式；(1-7)式称为行列式 D 按第 j 列展开式，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

证明：由性质 1，我们只需证(1-6)式成立.

把 D 中第 i 行与它相邻的上一行元素逐次交换，经 $i-1$ 次交换后，得

$$D \xlongequal{\text{由性质 2}} (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一行展开}} (-1)^{i-1}[(-1)^{1+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{1+2}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{in}M_{in}]$$

$$=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik}.$$

其中 M_{ij} 及 A_{ij} 分别为行列式 D 中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式($j = 1,2,\cdots,n$).

推论 行列式某行(列)元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积之和的值为零,即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0 \qquad (j \neq j).$$

以上性质,除已证明外,其余性质的证明从略.

利用行列式的性质可简化行列式的计算,下面举例说明.

【例 1】 计算上三角行列式:$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解:因为 D 的转置行列式是下三角行列式,所以

$$D = D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

【例 2】 计算:$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解:把 D 化成上三角行列式

$$D \xlongequal{c_1 \longleftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[5r_1 + r_4]{(-1)r_1 + r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \longleftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[(-8)r_2 + r_4]{4r_2 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\frac{5}{4}r_3 + r_4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.$$

【例 3】 计算：$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&0\\5&1&3&-1\\2&0&0&1\\0&-5&3&1\end{vmatrix}$.

解：$D\xlongequal{(-2)c_4+c_1}\begin{vmatrix}3&1&-1&0\\7&1&3&-1\\0&0&0&1\\-2&-5&3&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 3 行}}1\times(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}3&1&-1\\7&1&3\\-2&-5&3\end{vmatrix}$

$\xlongequal[c_3+c_2]{3c_3+c_1}-\begin{vmatrix}0&0&-1\\16&4&3\\7&-2&3\end{vmatrix}=-(-1)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}16&4\\7&-2\end{vmatrix}$

$=-32-28=-60.$

【例 4】 计算 n 阶行列式：$D=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a&a\\a&x&\cdots&a&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&\cdots&x&a\\a&a&\cdots&a&x\end{vmatrix}$

解：此行列式的特点：各行元素的和相同，因此第 2 列，第 3 列，…，第 n 列都加至第 1 列，并提取公因式.

$$D\xlongequal[(k=2,3,\cdots,n)]{c_k+c_1}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&\cdots&a&a\\x+(n-1)a&x&\cdots&a&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x+(n-1)a&a&\cdots&x&a\\x+(n-1)a&a&\cdots&a&x\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&\cdots&a&a\\1&x&\cdots&a&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a&\cdots&x&a\\1&a&\cdots&a&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(k=2,3,\cdots,n)]{(-1)r_1+r_k}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&\cdots&a&a\\0&x-a&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&x-a&0\\0&0&\cdots&0&x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

习题 1－3

1. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 计算 n 阶行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

第四节　克莱姆法则

n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1-8}$$

在一定条件下，它的解也可用 n 阶行列式来表示.

定理 1　（克莱姆法则）如果线性方程组（1－8）的系数行列式不等于零，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组（1－8）有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{1-9}$$

其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是用方程组（1－8）右端的常数列替换 D 中第 i 列元素所得的 n 阶行列式，即

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明：若方程组（1－8）有解. 由行列式性质，x_i 乘以行列式 D，等于 x_i 乘以行列式 D 的第 i 列的各元素，即