高等农业学校二年制专修科

高等數学

（試用本）

农业机械化专业适用

河南省农林厅教材編輯委員会編

河南人民出版社

高等数学

(試用本)

农業机械化專業适用

河南省农林厅教材編輯委員会編

*

河南人民出版社出版(郑州市行政区經五路)

河南省書刊出版業营業許可証出字第一号

地方国营郑州印刷厂印刷　河南省新华書店發行

*

豫总書号：1320

850×1168耗1/32 · $7\frac{1}{2}$印張 · 156,000字

1959年2月第1版　1959年2月第1次印刷

印数：1—1,087册

統一書号：K7105.142

定价：(8)0.70元

检1

前　　言

在党的建設社会主义总路綫的光輝照耀下，我省早已出現了工农业生产为中心的全面大跃进的新形势和已經掀起群众性的技术革命和文化革命的高潮，各地均先后开办了农业大学、中等农业技术学校、初級农校以及“紅专”学校。为适应这一新的革命形势的需要，我省农业教育工作必須从教学計划、教学大綱、教学內容、教学組織、教学方法等各方面进行根本的改革，才能保証貫徹实現党的“鼓足干劲、力爭上游，多快好省地建設社会主义”的总路綫，实現勤工俭学、勤俭办学、教育与生产相結合的教育方針，培养出又“紅”又“专”的技术队伍。

为此，我們于今年三月中旬組織了农业技术学校、农林干校的126名教職員分为14个专业小組到71个县(市)178个农业生产合作社，1307个生产单位进行了参观和調查研究工作，总結出340个先进生产經驗和高額丰产典型，收集了3193种参考資料。現已編写出十六种专业教学計划、155种教学大綱和教科書，陆續出版，供各地教学試用。由于我們水平不高，时間短，和有关方面研究的不够，难免有不妥之处。望各地在試用中多多提出意見，并可随着农业生产发展的需要加以修改。

河南省农林厅教材編輯委員会

1958年8月26日

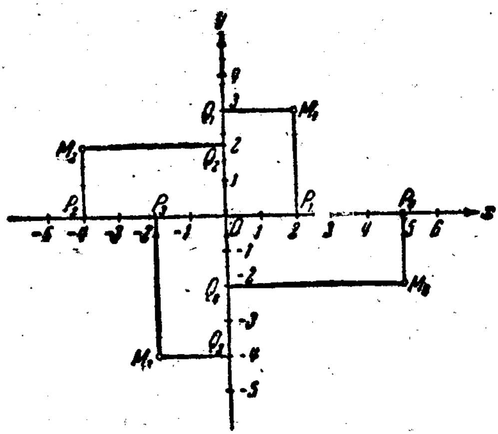
目　录

第一章　平面上直角坐标系与它在簡单問題上的应用

§1. 平面上点的直角坐标。

确定平面上点的位置的数，称为这个点的坐标，而用来确定坐标的方法称为坐标法。

最簡单的确定平面上点的位置的方法如下：



（图1）

在平面上作两条互相垂直的直綫，这两条直綫称为坐标軸，水平綫叫做横軸或 ox 軸，鉛垂綫叫做縱軸或 oy 軸，两軸的交点称为坐标原点。

欲定平面上一点的位置，可从此点作二垂綫各垂直于坐标軸，用两个垂足到坐标原点的距离来定这点的位置，在 Ox 軸上的距离，叫做这点的横坐标，在 Oy 軸上的距离，叫做縱坐标。

习惯上，在原点右边或上边的值是正的，左边和下边的值是負的。設有一点 P. 若横坐标为 a，縱坐标为 b，可記为 $P(a, b)$。所以在平面上的一切点都可以用（$\pm x$, $\pm y$）来代替它的位置。

如图1所示，M_1 点的坐标是 (2,3)，M_2 点的坐标是 (−4,2)，M_3 点的坐标是 (−2,−4)，M_4 点的坐标是 (5,−2)。

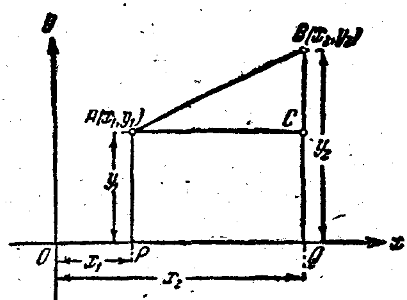
Ox 軸与 Oy 軸将平面分为四部分，每一部分都称为象限，由右上角起，按反时針方向，依次为第一象限，第二象限，第三象限，第四象限。在各象限中，点的坐标符号如下表。

象限 \ 坐标符号	x	y
[illegible]	+	+
	−	+
Ⅲ	−	−
Ⅳ	+	−

§2. 兩点間的距离。

設 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 为平面上任意两点(图2)，試用其坐标来表示这两点間的距离 d。

設 A 到 B 的距离为 d，由点 A,B 分别作 AP, BQ 与 ox 軸垂直，并过 A 点引与 ox 軸的平行直綫 AC，则得直角三角形 ABC。



(图2)

故 $d^2 = AB^2 = AC^2 + CB^2$，

但 $AC = PQ = OQ - OP = x_2 - x_1$，

$CB = QB - QC = QB - PA = y_2 - y_1$。

由此得 $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$，

所以 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$。 ……………………(1)

很明显，在这里采取根的算术值是必要的。

因而，**两个已知点間的距离等于这两点同名坐标之差的平方和的平方根。**

在推演这个公式的时候，我們是假設 A 点与 B 点在第一象限。不难証明，当这两个点中有一个或两个都在其它的象限时，此公式仍然为真。

在此两点中，如果有一点是坐标原点，即 $(0,0)$，另一点的坐标是 (x,y)，那末这一点到原点的距离公式是：

$$d=\sqrt{x^2+y^2}\quad\cdots\cdots(2)$$

例：試計算点 $A(-1,4)$ 与 $B(2,0)$ 間的距离。

在这里　$x_1=-1$，$y_1=4$，$x_2=2$，$y_2=0$；

代入公式得　$AB=\sqrt{[2-(-1)]^2+(0-4)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$。

§3. 綫段的定比分割。

假設連結点 $A(x_1,y_1)$ 与 $B(x_2,y_2)$ 的綫段 AB 被点 $C(x,y)$ 分为两部分，使这两部分的比 $\frac{AC}{CB}$ 等于已知数 L。

試用綫段 AB 端点的坐标表示点 $C(x,y)$ 的坐标 x, y。

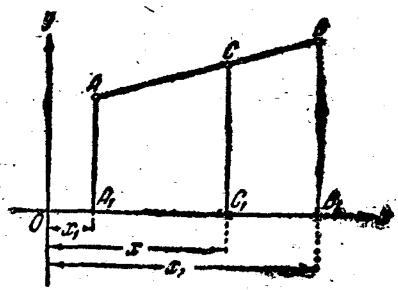
通过点 A, B 与 C 各作 ox 軸的垂綫 AA_1, BB_1 与 CC_1. 由平面几何我們知道：

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB},$$

故 $$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=L.$$

由图 3 知 $A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1$,

$C_1B_1=OB_1-OC_1=x_2-x$.



（图 3）

代入上式得　$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=L,$$

解此方程得　$$x=\frac{x_1+Lx_2}{1+L}.$$

同样　$$y=\frac{y_1+Ly_2}{1+L},$$

因此，按照定比 L，分割綫段 AB 的点 $C(x, y)$ 的坐标用下列公式来确定：

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1+Lx_2}{1+L} \\ y&=\frac{y_1+Ly_2}{1+L} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

如果点 C 平分綫段 AB，則 $AB=CB$，因此

$$L=\frac{AC}{CB}=1,$$

代入公式（3）

則得 $$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y&=\frac{y_1+y_2}{2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

也就是**綫段中点的坐标等于两端点对应坐标的半和**。

应当注意在推演公式（3）与（4）时，我們假設綫段 AB 之端点都在第一象限。同样可以証明当这两个点中有一个或两个都在其它象限时，公式（3）仍成立。

例1. 点 $M(x, y)$ 将点 $A(1,2)$ 与 $B(-1,4)$ 間的綫段 AB 分为比值1:2，試求点 M 的坐标。

在这里 $x_1=1$，$y_1=2$，$x_2=-1$，$y_2=4$，而且 $L=\frac{1}{2}$；

由公式（3）得： $$x=\frac{1+\frac{1}{2}\times(-1)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

$$y=\frac{2+\frac{1}{2}\times 4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}$$

例2. 重力作用于质点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$ 上，它們的质量分别为 m_1 和 m_2，試求这两个力系的重心的坐标。

由力学定理可知，重心 $N(x, y)$ 必在連綫 M_1M_2 上，且它分綫段 M_1M_2 所成的比与作用在点 M_1 和 M_2 上的重力成反比例，

即 $\dfrac{M_1N}{NM_2}=\dfrac{m_2g}{m_1g}=\dfrac{m_2}{m_1}$. 这里的 g 是重力加速度.

由此得 $x=\dfrac{x_1+\dfrac{m_2}{m_1}x_2}{1+\dfrac{m_2}{m_1}}$, $\quad y=\dfrac{y_1+\dfrac{m_2}{m_1}y_2}{1+\dfrac{m_2}{m_1}}$;

化簡得 $x=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$, $\quad y=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$.

习　题

1. 位于第一象限的一个等边三角形，其边长等于 10，一个頂点与原点重合，而三角形底边在 Ox 軸上，試决定此三角形頂点的坐标。

   答：$(0,0)$，$(10,0)$，$(5,5\sqrt{3})$。

2. 直綫 MN 平行于縱軸，且位于它的右边 5 个单位，設点 B 与点 $A(2,4)$ 对称于直綫 MN；又 B_1 与 $A_1(-1,3)$ 关于同一直綫 MN 对称，試求点 B 与点 B_1 的坐标。　答：$B(8,4)$，$B_1(11,3)$。

3. 試在 Ox 軸上求出与点 $A(3,4)$ 的距离等于 5 的点。

   答：$x_1=6$，$y_1=0$，$x_2=0$，$y_2=0$.

4. 連結点 $A(2,5)$ 与点 $B(4,8)$ 的綫段 AB 被点 C 分成 $2:3$，試求点 C 的坐标。　答：$C\left(2\frac{4}{5},\ 6\frac{1}{5}\right)$。

5. 点 $C(2,3)$ 将綫段 AB 分为 $1:2$，如已知 A 点的坐标为 $x=1$，$y=2$. 試求 B 点的坐标。　答：$B(4,5)$。

6. 試求頂点为 $A(-2,1)$，$B(2,-1)$，$C(4,3)$ 的三角形 ABC 的重心 N 的坐标(三角形的重心与中綫的交点相重合，每一中綫由頂点起，此交点把它分成比 $2:1$)。　答：$N\left(1\frac{1}{3},\ 1\right)$。

7. 点 $A(x_0, y_0)$ 与点 $B(x, y)$ 間的綫段被分为 n 等分，試决定分点的坐标 x_i, y_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$。

答：$x_i=x_0+ih$，$y_i=y_0+ik(i=1,2\cdots\cdots n-1)$；

其中 $h=\dfrac{x-x_0}{n}$，$k=\dfrac{y-y_0}{n}$。

8. 三角形 ABC 的頂点坐标是 $A(1,2)$，$B(0,5)$，$C(-2,3)$，試求三中綫的交点。

9. 設在 n 个点 $A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，……，$A_n(x_n,y_n)$ 順次放上質量 $m_1,m_2,\cdots\cdots m_n$. 証明这个質量系的重心的坐标決定于公式

$$x=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\cdots\cdots+x_nm_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots m_n};$$

$$y=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\cdots\cdots+y_nm_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots m_n}.$$

10. 勻質的板子为正角梯形，其长底等于 a，短底等于 b，且高等于 h，試求其重心位置(厚度从略)。

答：重心到长底的距离等于 $\dfrac{h(2b+a)}{3(a+b)}$，到垂直于两底边的距离等于 $\dfrac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$.

11. 三角形 ABC 的三頂点是 $A(2,3)$，$B(-3,3)$，$C(0,-1)$，試求三角形的周长。

12. 从点$(1,-1)$到点$(-4,5)$引綫段，問应該沿同一方向延长到怎样的点，才能使全长等于原长的三倍？

13. 在横軸上求一点，使这点与坐标原点間的距离等于这点与点$(-5,3)$間的距离。 答：$(-3.4,0)$。

14. 两点$(x,5)$和$(-2,y)$間的綫段在$(1,1)$被平分，試求这两点。

15. 将两点$(0,2)$与$(8,0)$間的綫段划分为两段，使其比等于这两点到坐标原点的距离之比。

16. 欲挖一水庫，距公社的三块高額丰产試驗田等远，問此水庫应选在什么地方？

17. 求一点使它到两坐标軸和点$(3,6)$都有相等的距离。

18. 求一点使它离横軸和到点$(-5,2)$都有10单位长的距离。

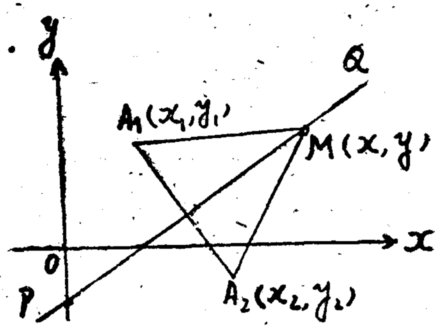
19. 三角形的三頂点是 $A(2,1)$，$B(-2,3)$，$C(0,3)$求三中綫的长度。

第二章 直 綫

§4. 直綫方程的概念。

在前一章中，我們研究了用数来决定平面上点的位置的問題，然而坐标法的应用并不局限于此点，从用坐标法来表示平面上点的位置这一基本概念出发，我們能够进一步用代数的方法来研究比較复杂的几何图形，現在先来研究最簡单的几何图象——直綫。

如右图，設 $A_1(x_1, y_1)$ 及 $A_2(x_2, y_2)$ 为任意两已知点，从平面几何中知道一切与 A_1、A_2 两点等距离的点都在綫段 A_1A_2 的垂直平分綫 PQ 上，也就是說，直綫 PQ 是与 A_1 和 A_2 两点等距离的点的軌迹。



(圖4)

任一点 $M(x,y)$ 位于直綫 PQ 上的条件可以用等式

$$A_1M = A_2M$$

来表示。

根据两点間距离的公式得

$$A_1M=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},$$
$$A_2M=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2};$$

所以

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}.$$

这个方程表示 $M(x, y)$ 点在直綫 PQ 上时 x 与 y 之間的关系式，这个关系式叫做直綫 PQ 的方程。

将上式化簡得

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2)=0;$$

为了簡便設 $2(x_2-x_1)=A,\quad 2(y_2-y_1)=B,$

$$x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2=C,$$

代入上式則得 $Ax+By+C=0$

此方程是直綫上点的坐标 (x, y) 的一次方程，因为任一直綫均可看作是与两个已知点等距离的点的軌迹，因而在我們得到方程 $Ax+By+C=0$ 的同时，也得到下面的定理。

定理．任一直綫都可表示为流动坐标(x, y)的一次方程。

要确定一点是否位于某直綫上，只要确定它的坐标是否滿足直綫方程即可，如果滿足 此点就位于直綫上，如不滿足，此点就不在直綫上。

例如．点 $N_1(7,3)$ 在直綫 $2x-3y-5=0$ 上，因为

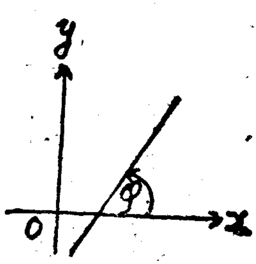
$$2\times7-3\times3-5=0;$$

点 $N_2(-1,3)$ 不在直綫 $2x-3y-5=0$ 上，因为

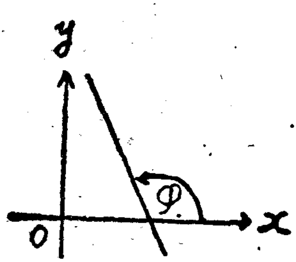
$$2\times(-1)-3\times3-5\neq0.$$

§5. 角系数式的直綫方程。

1. 直綫的傾斜角与角系数：与 ox 軸相交的直綫对 ox 軸都有一个傾斜角。这里所說的傾斜角是指射綫由正方向的 ox 軸起，繞交点（直綫与 ox 軸的交点）按反时針方向旋轉到已知直綫的位置时所成的角。



（图 5）



（图 6）

如果直綫平行于 Ox 軸，則它对于 Ox 軸的傾斜角就等于零度。

由于以上情况，对于任何一条直綫我們都有：

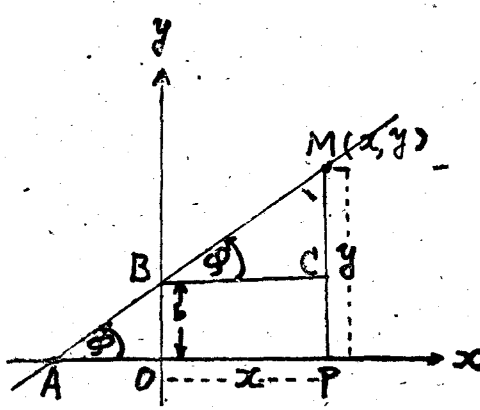
$$0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ.$$

直綫对 ox 軸的傾斜角的正切叫做直綫的角系数，角系数习慣上用 k 来表示，也就是

$$tg\,\varphi = k \quad \cdots\cdots(1)$$

2. 角系数式的直綫方程：如果給定直綫对于横軸的傾斜角和它在縱軸上被截下的綫段的数值（就是起点是坐标原点，終点是直綫与軸 Oy 的交点間的綫段），那末，直綫在平面上的位置就可以完全确定下来。（如图 7）

兹作直綫 AB 的方程，它对于Ox 軸的正向傾斜角为φ，并且在Oy 軸上截取綫段 OB 等于 b；又假設 AB 不平行于 Oy 軸。



（图 7）

为此，在直綫 AB 上取任意点 $M(x, y)$，并自該点向Ox 軸作垂綫MP。

显然 $OP = x$,

$PM = y$.

再作綫段 $BC /\!/ Ox$ 軸，

因而 $\angle CBM = \varphi$,

故 $CM = BC \cdot tg\,\varphi \quad \cdots\cdots(2)$

兹用 M点的坐标来表示 CM 及 BC：

$$CM = PM - PC = PM - OB = y - b,$$

$$BC = OP = x.$$

将 BC 与 CM 的値代入（2），則得方程 $y - b = tg\,\varphi \cdot x$,

即 $y = kx + b \quad \cdots\cdots(3)$

方程(3)称为**角系数式的直綫方程**，包含在它里边的而用来决定直綫在平面上之位置的二量 b 及 k 称为該直綫的参量，显然这两个

参量可以有任意的实数值。其中 b 是直綫与 Oy 軸交点的縱坐标，叫做直綫的縱軸截距。

注意：在直綫的方程(3)內，仅含有流动坐标 x 与 y 的一次項，因此我們說直綫是**一次曲綫**。

若直綫經过坐标原点，則显然 $b=0$，那末直綫方程表达为如下的形式：

$$y=kx.$$

若直綫平行于 Ox 軸，那末，傾斜角即等于零，因而

$$k=tg\,0°=0, \quad \text{則直綫方程变为 } y=b.$$

若直綫垂直于 Ox 軸 那末它就不与 Oy 軸相交，并且 $\varphi=90°$。这时直綫的縱軸截距就不存在，且也沒有角系数 k，($tg\,90°$ 不存在)所以垂直于 Ox 軸的直綫不能表达为角系数式的直綫方程。

例：直綫在縱軸上被截下的綫段的数值等于 -2，并且对于横軸有 $45°$ 的傾斜角，試求这直綫的方程。

在这里 $b=-2$，$\quad k=tg\,45°=1$，

因而所求的直綫方程是 $y=x-2$.

§6. 直綫方程的一般形式和它的特殊情形。

在§4里，我們曾証明过在笛卡尔坐标系統下任何直綫都可用一次方程表达出来，同时我們又会联想到另一个問題，就是：任何 x, y 的一次方程是不是都表示一条直綫？为了解答这个問題，可分两种情形来討論。

任何含 x, y 的一次方程都可写为形式：

$$Ax+By+C=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

其中 A, B, C 为常数，且 A 和 B 不能同时为零。

(1) 首先假設 $B\neq 0$，解方程 $Ax+By+C=0$ 求 y，

得
$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \quad \cdots\cdots(5)$$

将方程(5)与方程 $y=kx+b$ 比較，显然方程(5)为一直綫的角系式方程；它的斜率 k 为 $-\frac{A}{B}$，b 就是 $-\frac{C}{B}$.

（2） 假設 $B=0$，那末方程（4）变成

$$Ax+C=0$$

因 $A\neq0$，所以 $x=-\dfrac{C}{A}=$常数。

此方程为平行于縱軸的直綫方程。

从以上結果，便可得到下面定理：

定理．含 x，y 的一般一次方程：

$$\mathbf{Ax+By+C=0}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

其軌跡为一条直綫，方程 Ax＋By＋C＝0 称为直綫的一般式方程。

下边我們再来更詳細地研究方程 $Ax+By+C=0$ 的几种特殊情形：

Ⅰ． $C=0$，$A\neq0$，$B\neq0$．則

方程（6）变为

$$Ax+By=0.$$

这个方程被原点的坐标所滿足，因此，直綫方程中如果缺少常数項，那末直綫必通过原点。

Ⅱ． $B=0$，$A\neq0$，$C\neq0$．

这种情形我們已經討論过了，这是和 Oy 軸平行的一条直綫，即

$$x=L.$$

Ⅲ． $A=0$，$B\neq0$，$C\neq0$．

方程（4）变成

$$By+C=0 \text{ 或 } y=-\frac{C}{B};$$

令 $-\dfrac{C}{B}=L$ 就得方程 $y=L$.

所以当 $A=0$ 时，方程（4）表达一条和 Ox 軸平行的直綫。

总之，如果直綫方程中沒有 x 項，那末直綫和 Ox 軸平行．如果沒有 y 項，則直綫和 Oy 軸平行。

Ⅳ． $A=0$，$C=0$，$B\neq0$．

方程（4）变成 $By=0$ 或 $y=0$，