高职高专数学改革教材

Gongcheng Shuxue Jiaocheng

# 工程数学教程

主 编 朱永银 易同贸 魏 莹
主 审 马晓明 龚友运


华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

高职高专数学改革教材

# 工程数学

## 教 程

主编 朱永银 易同贸 魏 莹
主审 马晓明 龚友运

华中科技大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

工程数学 教程、学习指导/朱永银　易同贸　魏莹　主编．—武汉：华中科技大学出版社，2007年2月

ISBN 978-7-5609-3962-9

Ⅰ.工…　Ⅱ.①朱…　②易…　③魏…　Ⅲ.工程数学-高等学校：技术学校-教学参考资料　Ⅳ.TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第020515号

**工程数学 教程**　　朱永银　易同贸　魏莹　主编

责任编辑：徐正达　　封面设计：刘　卉

责任校对：朱　霞　　责任监印：张正林

出版发行：华中科技大学出版社

武昌喻家山　邮编：430074　电话：(027)87557437

录　排：武汉佳年华科技有限公司

印　刷：武汉首壹印刷厂

开本：850×1168　1/32　印张：6.625　字数：155 000

版次：2007年2月第1版　印次：2007年2月第1次印刷　定价：16.80元

ISBN 978-7-5609-3962-9/TB・89　(教程、学习指导)

(本书若有印装质量问题，请向出版社发行部调换)

# 前 言

为了推动我省高职高专数学教材建设，提高教学质量，在省教育厅高教处的直接领导下，湖北省高职高专数学研究会和华中科技大学出版社根据教育部关于高职高专教育改革的有关精神，特组织全省部分具有较高理论水平和丰富教学经验的骨干教师，编写了一套理工专业通用的高等数学改革教材.《工程数学教程》是该套教材中的一本，供工科专业使用.

本书在编写过程中力求做到以应用为目的，以"必需、够用"为度.其特点是：以讲清概念为前提，强化应用为重点，在保留传统体系的基础上，力求有所创新；体现建模思想，注重应用和训练；强化实践技能、配有丰富的例题、习题及演算过程和参考答案.

本书内容包括多元函数微积分，无穷级数，拉普拉斯变换，傅里叶变换和行列式、矩阵与线性方程组等内容，书后附有习题答案，打"*"号的内容可供选学.另编有与本教材配套的教学辅导书《工程数学学习指导》，供教师、学生参考使用.

本教材由朱永银、易同贸、魏莹担任主编，马晓明、龚友运担任主审，山军、张汉萍、郭炳艳担任副主编. 参加编写的还有李伟文、林敏、陈婷、吴章文、花威、吴亚敏等.全书由朱永银教授统稿.

武汉职业技术学院、长江工程职业技术学院、荆州职业技术学院、鄂东职业技术学院、咸宁职业技术学院对本套教材的顺利出版

发行给予了大力支持，本套教材还参考吸收了有关教材及著作的成果，在此一并致谢．

由于编者水平所限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者不吝赐教，提出批评建议，使本套教材日臻完善．

编　者

2006年6月



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 目 录

# 第一章　多元函数微积分

在许多实际问题中存在着一个变量依赖于多个变量的情形，这就产生了多元函数及多元函数微积分的问题. 本章将在一元函数微积分的基础上，讨论多元函数微积分及其应用. 讨论中以二元函数为主要对象.

## 第一节　空间直角坐标系

为了更好的学习多元函数微积分，有必要对空间点的坐标以及空间图形作一个简要的介绍.

### 一、空间点的坐标

过空间一定点$O$作三条互相垂直的数轴$Ox$，$Oy$，$Oz$，指定正向（它的正向符合右手法则）并选定相同的单位长度后，即在空间建立了直角坐标系，如图1-1所示. 点$O$称为坐标原点；$Ox$，$Oy$，$Oz$分别称为$x$轴、$y$轴、$z$轴，统称为坐标轴. 每两条坐标轴所确定的平面称为坐标平面. 三个坐标平面将空间分成八个部分，每个部分称为一个卦限，八个卦限的顺序如图1-2所示.

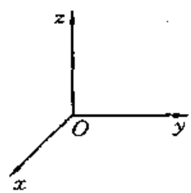

图 1-1

建立直角坐标系以后，空间内的一个点就可以用坐标来表示. 过点$M$作三个平面分别垂直于坐标轴，记它们与$x$，$y$，$z$轴的交点依次为$I$，$J$，$K$三点，如图1-3所示. 若点$I$，$J$，$K$在对应坐标轴上的坐标分别为$x$，$y$，$z$，则把$(x, y, z)$称为点$M$的直角坐标，记为$M(x, y, z)$；$x$称为横坐标，$y$称为纵坐标，$z$称为竖坐标. 这样，空



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

间内任意一点 $M$ 都唯一地确定了一组有序实数 $(x,y,z)$；反之，任意给定一组有序实数 $(x,y,z)$，在空间内也唯一确定一个点 $M$，其坐标是 $(x,y,z)$.

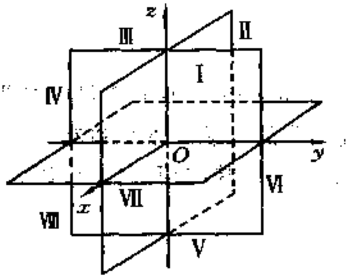

图 1-2

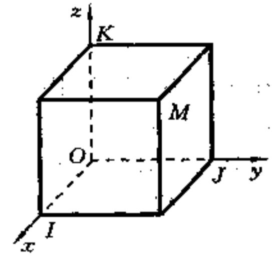

图 1-3

由坐标的概念可以知道，原点的坐标为 $(0,0,0)$，$x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$，$xOy$，$yOz$，$zOx$ 平面上的点的坐标依次为 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$.

点所在卦限不同，其坐标值的正负也不同，各卦限中点的坐标，其正负如下表 1-1 所示.

表 1-1

| | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ | Ⅴ | Ⅵ | Ⅶ | Ⅷ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | + | − | − | + | + | − | − | + |
| $y$ | + | + | − | − | + | + | − | − |
| $z$ | + | + | + | + | − | − | − | − |

从表 1-1 可以看出，第Ⅰ卦限到第Ⅳ卦限，$z$ 都是正，$x$ 和 $y$ 的符号和坐标平面四个象限的符号一致；第Ⅴ卦限到第Ⅷ卦限，$z$ 都是负，$x$ 和 $y$ 的符号与坐标平面四个象限的符号一致.

依据表 1-1，任意给一点 $M$ 的坐标，就能很快确定点 $M$ 在哪一个卦限，并且能画出它在空间的位置. 例如，已知点 $M(3,-1,3)$，由表 1-1 知它在第Ⅳ卦限，如果要画出点 $M$ 的位置，可以先在 $xOy$ 平面上画出横坐标为 3，纵坐标为 −1 的点 $P$，即 $P(3,-1,0)$. 再由

点$P$引垂线$PQ$，其中$PQ$的方向和$z$轴正向一致，在$PQ$上截取$PM$的长度为3，所得点$M(3,-1,3)$即为所求.

另外，由平面解析几何中关于坐标轴的对称点的坐标和关于原点的对称点的坐标的特征，可列出在空间直角坐标系下关于坐标轴、坐标平面、坐标原点对称点的坐标. 点$M(x,y,z)$关于原点对称点的坐标为$(-x,-y,-z)$，关于$xOy$，$yOz$，$zOx$平面对称点的坐标分别$(x,y,-z)$，$(-x,y,z)$，$(x,-y,z)$，关于$x$轴、$y$轴、$z$轴对称点的坐标分别为$(x,-y,-z)$，$(-x,y,-z)$，$(-x,-y,z)$. 例如，点$M(1,2,3)$关于原点对称点的坐标为$(-1,-2,-3)$，关于$xOy$平面对称点的坐标为$(1,2,-3)$，关于$y$轴对称点的坐标为$(-1,2,-3)$.

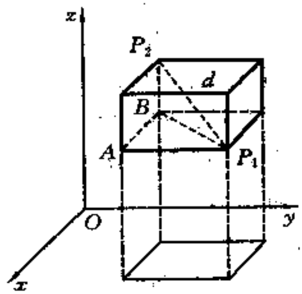


图 1-4

由立体几何知识不难知道，空间中任意两点$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离公式（图1-4）为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例如，点$M_1(0,1,-1)$，$M_2(2,3,-1)$之间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2+(-1+1)^2}=2\sqrt{2}.$$

特别地，点$P(x,y,z)$到原点的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

## 二、空间图形简介

### 1. 空间曲面

在日常生活中，我们经常会见到各种各样的曲面，例如水管的侧面、球面、汽车前灯的反光面等. 在平面解析几何中，平面曲线可

与一个二元方程对应起来，比如圆心在点$(a,b)$、半径为$r$的圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，中心在原点、长轴为$2a$、短轴为$2b$的椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$等等．在空间解析几何中也是一样，任何曲面都可看做点的轨迹，在这样的意义下，如果曲面$S$与三元方程

$$F(x,y,z)=0 \qquad ①$$

有如下关系：

1° 曲面$S$上任一点的坐标都满足方程①，

2° 不在曲面$S$上的点的坐标都不满足方程，

则方程①就称为曲面$S$的方程，曲面$S$称为方程①的图形，如图1-5所示．

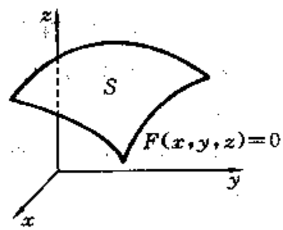


图1-5

例如，球心在$M(a,b,c)$、半径为$r$的球面方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

下面介绍两种常见的曲面．

(1) 旋转曲面

一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面，这条定直线叫做旋转曲面的轴．

例如，$yOz$平面上的直线$y=kz$（$k$为常数）绕$z$轴旋转一周而成的旋转面是圆锥面（图1-6），其方程为

$$x^2+y^2-k^2z^2=0.$$

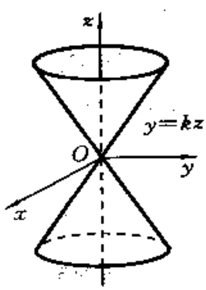


图1-6

由此可见，圆锥面的方程是一个齐次方程．

(2) 柱面

一直线沿已知平面定曲线$C$（直线和曲线$C$不在同一平面上）平行移动所形成的曲面称为柱面．运动的直线叫做柱面的母

线，定曲线$C$叫做柱面的准线．我们经常遇到的是母线平行于坐标轴的柱面，如图1-7所示的就是一个母线平行于$z$轴的柱面，图1-8所示的是一个以$xOy$平面上的圆$C$：$x^2+y^2=r^2$为准线、母线平行于$z$轴的圆柱面．

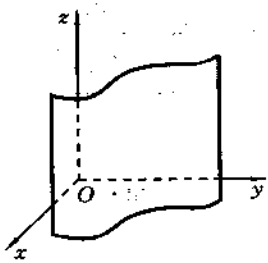


图1-7

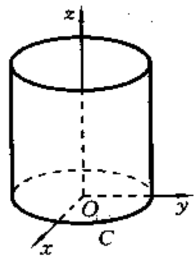


图1-8

在$xOy$平面内，方程$x^2+y^2=r^2$表示一个圆，但在空间直角坐标系中，$x^2+y^2=r^2$表示圆柱面．

一般地，任一不含$z$的方程

$$F(x,y)=0 \qquad ②$$

在空间直角坐标系中表示母线平行于$z$轴的柱面．如方程$y^2=2px$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$在空间直角坐标系中分别表示母线平行于$z$轴的抛物柱面、椭圆柱面和双曲柱面．

**2. 空间平面**

空间中任一平面可用三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad ③$$

表示，反之，任一三元一次方程的图形都是空间中的平面．方程③称为平面的一般方程．

**3. 空间曲线与直线**

(1) 空间曲线

空间曲线可以看做空间两曲面的交线．设

$$F(x,y,z)=0 \quad 和 \quad G(x,y,C)=0$$

是两个曲面，它们的交线为$C$，如图1-9所示．方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases} \qquad ④$$

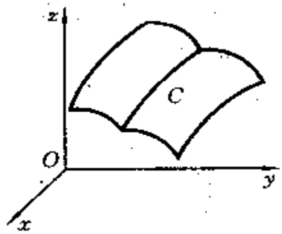

图 1-9

就称为空间曲线$C$的一般方程．

如方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\z=1\end{cases}$$

表示球面$x^2+y^2+z^2=4$与平面$z=1$的交线为一个圆．

(2) 空间直线

空间中的直线可以看做空间两平面的交线，方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases} \qquad ⑤$$

就称为空间直线的一般方程．

空间直线方程还有另外的表示形式，比如说点法式、参数方程形式，这里不作详细的介绍．

## 习　题　1-1

1. 求点$M(2,-3,-2)$关于各坐标平面的对称点的坐标，并指出这些点在哪一卦限．

2. 求点$P(4,-3,5)$与原点及各坐标轴间的距离．

3. 建立以点$(1,-3,2)$为球心且通过原点的球面方程．

4. 求球面方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z=0$的球心和半径．

5. 指出下列方程在平面解析几何和在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $y=x+1$；　　　　(2) $x^2-y^2=1$．

# 第二节　多元函数的极限与连续

## 一、多元函数的定义

### 1. 平面点集和区域

在一元函数中经常用到邻域和区间的概念. 类似地，在多元函数中经常要用到邻域和区域的概念. 邻域和区域都是符合一定条件的点的集合. 为简单、直观起见，我们就平面点集来说明邻域和区域的概念.

平面上与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 $\delta$ ($\delta>0$) 的点 $P(x,y)$ 的全体构成的集合称为点 $P_0$ 的 $\delta$ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |P_0P|<\delta\},$$

也就是

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

从图形上看，$U(P_0,\delta)$ 就是以 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta$ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

任意一点 $P\in\mathbf{R}^2$ 与任意一个点集 $E\subseteq\mathbf{R}^2$ 之间必有以下三种关系中的一种.

1° 内点. 如果存在点 $P$ 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subseteq E$，则称 $P$ 为 $E$ 的内点(如图 1-10 中，$P_1$ 为 $E$ 的内点).

2° 外点. 如果存在点 $P$ 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 $P$ 为 $E$ 的外点(如图 1-10 中，$P_2$ 为 $E$ 的外点).

3° 边界点. 如果点 $P$ 的任一邻域内既含有属于 $E$ 的点，又含有不属于 $E$ 的点，则称 $P$ 为 $E$ 的边界点(如图 1-10 中，$P_3$ 为 $E$ 的边界点).

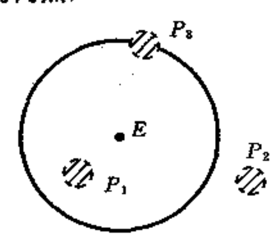

图 1-10



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com