



聚骄公司全心专业设计

# 考研数学 十年真题 全方位解码

世 华 潘正义  
主 编

吃透真题，  
考研成功一半！

**2008版**  
(数学四)

世界图书出版公司

013-44

198

:4

2007



**FOCUS**  
聚焦图书

聚骄公司全心专业设计

**考研  
数学**

**十年真题**

**全方位解码**

**世 华 潘正义 主编**

**2008版  
(数学四)**

世界图书出版公司

## 图书在版编目(CIP)数据

考研数学十年真题全方位解码. 数学四 / 世华, 潘正义  
主编. — 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2006. 2  
ISBN 978 - 7 - 5062 - 7921 - 5

I. 考... II. ①世... ②潘... III. 高等数学 — 研究生 — 入学考试 — 解题 IV. 013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 007840 号

### 十年真题全方位解码(数学四)

---

主 编: 世 华 潘正义

责任编辑: 安秋明

封面设计: 耕者工作室

---

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话: 88861708 邮编: 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 大厂县圣启印务有限公司

---

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 13.5

字 数: 259 千字

版 次: 2007 年 2 月第 2 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

---

ISBN 978-7-5062-7921-5/O · 546

定价: 17.80 元

---

服务热线: 010 - 88861708

# 前 言

本书严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写,对十年(2007-1998)来的考研数学真题的进行了详解、分析、归类和题型点对点演练。

## 本书分为三个部分:

**第一部分为2007-1998年的十年真题。**目的在于给考生形成一个完整的印象,了解考研数学命题的基本形式和题型分布。考生应充分利用这些真题,在规定时间内完成试卷,以达到模拟现场考试的目的。

**第二部分为题型归类总结部分。**我们将考研数学知识点分成了几十个不同的题型,将十年真题“打散”开,“融入”到各个题型中。目的在于让考生清楚、直观地看到每个知识点是通过何种题型来考查的,每种题型又有哪些变化形式,这样,可以做到知己知彼。

**第三部分为真题及题型演练解析部分。**通过“命题目的”、“思路点拨”、“详细解答”、“易错辨析”、“延伸拓展”几个部分,让考生不但知道题目该怎么做,而且知道题目为什么这么设计,易错的点在哪里,真正达到举一反三,触类旁通的目的。每套试卷的考点分布表统计了历年真题的考点分布情况,让考生可以直观地把握考试重点、了解考试特点。

## 本书使用建议:

在基础复习阶段,考生可以利用第二部分,体会各个知识点和题型的命题形势和特点。同时,对照第三部分,体会各种解题方法和技巧。

在模拟演练阶段,考生应在考试规定的时间内,完成第一部分的真题,锻炼提高解题速度和准确率。然后对照第三部分的真题解析归纳出自己的问题和错误点,并针对这些错误点和薄弱环节,先在《数学复习指南》(陈文灯教授编著)上找到相应的知识点和题型详解,最后结合第二部分的真题和题型演练题进行有针对性地训练。

# 目 录

## 第一篇 真题回顾

|                                |      |
|--------------------------------|------|
| 2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四) ..... | (1)  |
| 2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四) ..... | (5)  |
| 2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四) ..... | (9)  |
| 2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四) ..... | (13) |
| 2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四) ..... | (17) |
| 2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四) ..... | (21) |
| 2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四) ..... | (25) |
| 2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四) ..... | (29) |
| 1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四) ..... | (32) |
| 1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学(四) ..... | (35) |

## 第二篇 题型归类与演练

### 第一部分 微积分

#### 第一章 函数、极限、连续

|                                         |      |
|-----------------------------------------|------|
| 题型 1 求 $1^\infty$ 型极限 .....             | (38) |
| 题型 2 求 $\frac{0}{0}$ 型极限 .....          | (38) |
| 题型 3 求 $\infty - \infty$ 型极限 .....      | (38) |
| 题型 4 求 $\infty \cdot 0$ 型极限 .....       | (39) |
| 题型 5 函数性质(奇偶性、周期性、单调性、有界性)的判定 .....     | (39) |
| 题型 6 无穷小的比较或确定无穷小的阶 .....               | (39) |
| 题型 7 数列极限存在的判定或证明或求解 .....              | (40) |
| 题型 8 函数极限存在的判定或证明或解 .....               | (40) |
| 题型 9 函数的连续的讨论或证明或其逆问题 .....             | (40) |
| 题型 10 函数间断点的判定或证明 .....                 | (41) |
| 题型 11 已知函数的极限存在,反求参数 .....              | (41) |
| 题型 12 与极限的定理(介值定理,保号性、单调有界等)有关的命题 ..... | (42) |

#### 第二章 一元函数微分学

|                          |      |
|--------------------------|------|
| 题型 1 与导数式微分概念相关的命题 ..... | (42) |
|--------------------------|------|

|       |                               |      |
|-------|-------------------------------|------|
| 题型 2  | 求复合函数、隐函数的导数以及高阶导数            | (42) |
| 题型 3  | 函数极值、拐点的判定或求解                 | (43) |
| 题型 4  | 函数(含分段函数)在某点可导或不可导的判定         | (43) |
| 题型 5  | 函数在某一区间至少存在一点或两点使某一式子成立的判定或证明 | (44) |
| 题型 6  | 函数不等式的证明                      | (44) |
| 题型 7  | 求一元函数在一点的切线方程或法线方程            | (45) |
| 题型 8  | 微分学在经济中的应用题                   | (45) |
| 题型 9  | 与导数的几何意义相关的命题                 | (46) |
| 题型 10 | 与函数图形有关的命题                    | (46) |
| 题型 11 | 方程的根的判定式证明                    | (46) |

### 第三章 一元函数积分学

|      |                    |      |
|------|--------------------|------|
| 题型 1 | 求不定积分或原函数          | (47) |
| 题型 2 | 函数的定积分的计算          | (47) |
| 题型 3 | 含有变限积分的等式中函数表达式的求解 | (48) |
| 题型 4 | 定积分等式或不等式的判定或证明    | (48) |
| 题型 5 | 求反常积分              | (48) |
| 题型 6 | 求平面图形绕坐标轴旋转所得体积    | (49) |

### 第四章 多元函数微积分学

|      |                       |      |
|------|-----------------------|------|
| 题型 1 | 求多元复合函数或隐函数的偏导或全导或全微分 | (49) |
| 题型 2 | 多元函数极值的判定式求解或应用       | (50) |
| 题型 3 | 二重积分的计算               | (51) |

### 第五章 常微分方程

|      |                     |      |
|------|---------------------|------|
| 题型 1 | 与线性微分方程解的结构和性质相关的命题 | (52) |
| 题型 2 | 求阶线性微分方程的通解或特解      | (52) |

## 第二部分 线性代数

### 第一章 行列式

|      |                    |      |
|------|--------------------|------|
| 题型 1 | 求 $n$ 阶行列式的计算      | (53) |
| 题型 2 | 求矩阵的行列             | (53) |
| 题型 3 | 与行列式的概念、性质或定理相关的命题 | (53) |

### 第二章 矩阵

|      |                  |      |
|------|------------------|------|
| 题型 1 | 与矩阵的逆相关的计算、判定或证明 | (54) |
| 题型 2 | 矩阵的运算            | (54) |
| 题型 3 | 矩阵的幂的计算          | (55) |
| 题型 4 | 矩阵等价的判定          | (55) |
| 题型 5 | 含伴随矩阵的计算或证明      | (55) |
| 题型 6 | 与矩阵的秩相关的计算、判定或证明 | (56) |
| 题型 7 | 与初等矩阵或初等变换相关的命题  | (56) |

### 第三章 向量

|      |                      |      |
|------|----------------------|------|
| 题型 1 | 向量组线性相关性的判断或证明 ..... | (57) |
| 题型 2 | 根据向量的线性相关性求参数 .....  | (57) |
| 题型 3 | 向量的线性表出 .....        | (57) |
| 题型 4 | 讨论含量变量的向量的线性表出 ..... | (58) |

### 第四章 线性方程组

|      |                                     |      |
|------|-------------------------------------|------|
| 题型 1 | 与解的判定、性质和结构相关的命题的判定或证明 .....        | (58) |
| 题型 2 | 线性方程组的通解的计算或判定 .....                | (59) |
| 题型 3 | 讨论含参数的线性方程组的解的情况,如果方程组有解时求出通解 ..... | (59) |

### 第五章 矩阵的特征值和特征向量

|      |                                        |      |
|------|----------------------------------------|------|
| 题型 1 | 利用矩阵的特征值或特征向量、反求矩阵的表达式或对角矩阵 .....      | (60) |
| 题型 2 | 已知矩阵的特征值和特征向量,求另一个矩阵的特征值、特征向量或参数 ..... | (61) |
| 题型 3 | 矩阵对角化的判定或证明或对角阵求解 .....                | (61) |
| 题型 4 | 两个矩阵相似的判定或逆问题 .....                    | (62) |

## 第三部分 概率论与数理统计

### 第一章 随机事件和概率

|      |                    |      |
|------|--------------------|------|
| 题型 1 | 求随机事件的概率 .....     | (63) |
| 题型 2 | 随机事件概率的关系运算 .....  | (63) |
| 题型 3 | 随机事件独立的判定或证明 ..... | (63) |
| 题型 4 | 随机事件的表示问题 .....    | (64) |

### 第二章 随机变量及其分布

|      |                              |      |
|------|------------------------------|------|
| 题型 1 | 求一维随机变量的分布规律、分布密度或分布函数 ..... | (64) |
| 题型 2 | 求一维随机函数的分布或在某一区间的概率 .....    | (64) |
| 题型 3 | 与一维随机变量的概念、性质相关的命题 .....     | (65) |

### 第三章 二维随机变量及其分布

|      |                                     |      |
|------|-------------------------------------|------|
| 题型 1 | 求二维随机变量的联合分布律或分布函数或边缘概率分布 .....     | (66) |
| 题型 2 | 求二维连续型随机变量的分布或分布密度或边缘密度函数 .....     | (67) |
| 题型 3 | 两个或多个随机变量的独立性或相关性的判定或证明 .....       | (67) |
| 题型 4 | 求两个随机变量的相关系数 .....                  | (68) |
| 题型 5 | 求两个随机变量的函数的概率分布或概率密度或在某一区间的概率 ..... | (69) |

### 第四章 随机变量的数字特征

|      |                        |      |
|------|------------------------|------|
| 题型 1 | 求一维随机变量或函数的数字特征 .....  | (69) |
| 题型 2 | 求二维随机变量或函数的数字特征 .....  | (70) |
| 题型 3 | 数字特征在经济中的应用 .....      | (70) |
| 题型 4 | 与数字特征的概念、性质相关的命题 ..... | (70) |

|                         |      |
|-------------------------|------|
| 题型 1 估计概率的值 .....       | (71) |
| 题型 2 与中心极限定理相关的命题 ..... | (71) |
| 题型 3 分位数的求解与判定 .....    | (72) |
| 题型演练参考答案 .....          | (73) |

## 第三篇 答案详解

|                                        |       |
|----------------------------------------|-------|
| 2007 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)详解·拓展·评析 ..... | (95)  |
| 2007 年数学(四)试卷评析 .....                  | (106) |
| 2006 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)详解·拓展·评析 ..... | (107) |
| 2006 年数学(四)试卷评析 .....                  | (116) |
| 2005 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)详解·拓展·评析 ..... | (117) |
| 2005 年数学(四)试卷评析 .....                  | (128) |
| 2004 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)详解·拓展·评析 ..... | (129) |
| 2004 年数学(四)试卷评析 .....                  | (141) |
| 2003 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)详解·拓展·评析 ..... | (142) |
| 2003 年数学(四)试卷评析 .....                  | (152) |
| 2002 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)详解·拓展·评析 ..... | (153) |
| 2002 年数学(四)试卷评析 .....                  | (163) |
| 2001 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)详解·拓展·评析 ..... | (164) |
| 2001 年数学(四)试卷评析 .....                  | (174) |
| 2000 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)详解·拓展·评析 ..... | (175) |
| 2000 年数学(四)试卷评析 .....                  | (185) |
| 1999 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)详解·拓展·评析 ..... | (186) |
| 1999 年数学(四)试卷评析 .....                  | (197) |
| 1998 年全国硕士研究生入学统一考试(数学四)详解·拓展·评析 ..... | (198) |
| 1998 年数学(四)试卷评析 .....                  | (207) |



## 2007 年全国硕士研究生入学统一考试

### 数学(四)

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当  $x \rightarrow 0^+$  时,与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是

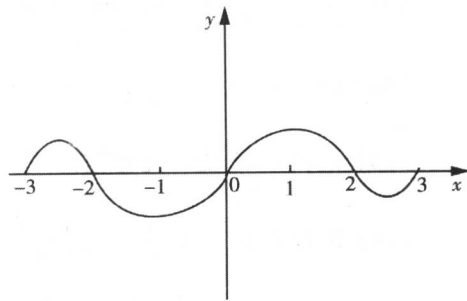
- A.  $1 - e^{\sqrt{x}}$       B.  $\ln(1 + \sqrt{x})$       C.  $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$       D.  $1 - \cos \sqrt{x}$

(2) 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续,下列命题错误的是:

- A. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在,则  $f(0) = 0$       B. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在,则  $f(0) = 0$   
 B. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  存在,则  $f'(0)$  存在      D. 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$  存在,则  $f'(0)$  存在

(3) 如图,连续函数  $y = f(x)$  在区间  $[-3, -2]$ ,  $[2, 3]$  上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间  $[-2, 0]$ ,  $[0, 2]$  的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周,设  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . 则下列结论正确的是:

- A.  $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$   
 B.  $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$   
 C.  $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$   
 D.  $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$



(4) 设函数  $f(x, y)$  连续,且二次积分  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$  等于

- A.  $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$       B.  $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$   
 C.  $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$       D.  $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

(5) 设某商品的需求函数为  $Q = 160 - 2P$ , 其中  $P, Q$  分别表示需要量和价格,如果该商品需求弹性的绝对值等于 1,则商品的价格是

A. 10

B. 20

C. 30

D. 40

(6) 曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ , 渐近线的条数为

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

(7) 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则下列向量组线性相关的是

A.  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ .B.  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ .C.  $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$ .D.  $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$ .

(8) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  与  $B$

A. 合同, 且相似.

B. 合同, 但不相似.

C. 不合同, 但相似.

D. 既不合同, 也不相似.

(9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为  $p (0 < p < 1)$ , 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

A.  $3p(1-p)^2$ .B.  $6p(1-p)^2$ .C.  $3p^2(1-p)^2$ D.  $6p^2(1-p)^2$ .

(10) 设随机变量  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 且  $X$  与  $Y$  不相关,  $f_X(x), f_Y(y)$  分别表示  $X, Y$  的概率密度, 则在  $Y = y$  的条件下,  $X$  的条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$  为

A.  $f_X(x)$ .B.  $f_Y(y)$ .C.  $f_X(x)f_Y(y)$ .D.  $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$ .

二、填空题: 11 - 16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(11)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(12) 设函数  $y = \frac{1}{2x+3}$ , 则  $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(13) 设  $f(u, v)$  为二元可微函数,  $z = f(\frac{y}{x}, \frac{x}{y})$ , 则  $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(14) 微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^3$  满足  $y|_{x=1} = 1$  的特解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(15) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A^3$  的秩为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(16) 在区间  $(0, 1)$  中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于  $\frac{1}{2}$  的概率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题:17 - 24 小题,共 86 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设函数  $y = y(x)$  由方程  $y \ln y - x + y = 0$  确定, 试判断曲线  $y = y(x)$  在点  $(1, 1)$  附近的凹凸性.

(18) (本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1. \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2. \end{cases}$$

计算二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$ .

(19) (本题满分 11 分)

设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内具有二阶导数且存在相等的最大值, 又  $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ . 证明:

(I) 存在  $\eta \in (a, b)$ , 使得  $f(\eta) = g(\eta)$ ;

(II) 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

(20) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  具有连续的一阶导数, 且满足  $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt + x^2$ , 求  $f(x)$  的表达式.

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0, \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad \textcircled{2}$$

有公共解,求  $a$  的值及所有公共解.

(22) (本题满分 11 分)

设 3 阶对称矩阵  $A$  的特征向量值  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$  是  $A$  的属于  $\lambda_1$  的一个特征向量,记  $B = A^5 - 4A^3 + E$  其中  $E$  为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证  $\alpha_1$  是矩阵  $B$  的特征向量,并求  $B$  的全部特征值与特征向量

(II) 求矩阵  $B$ .

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(x, y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求  $P\{X > 2Y\}$

(II) 求  $Z = X + Y$  的概率密度  $f_z(z)$ .

(24) (本题满分 11 分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  独立同分布,且  $X$  的概率分布为

|     |               |               |
|-----|---------------|---------------|
| $X$ | 1             | 2             |
| $P$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

记  $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$

(I) 求  $(U, V)$  的概率分布:

(II) 求  $(U, V)$  的协方差  $\text{Cov}(U, V)$ .

# 2006 年全国硕士研究生入学统一考试

## 数学(四)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (2) 设函数  $f(x)$  在  $x = 2$  的某邻域内可导,且  $f'(x) = e^{f(x)}$ .  $f(2) = 1$ , 则  $f''(2) = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (3) 设函数  $f(u)$  可微,且  $f'(u) = \frac{1}{2}$ , 则  $z = f(4x^2 - y^2)$  在点  $(1, 2)$  处的全微分  $dz \Big|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (4) 已知  $\alpha_1, \alpha_2$  为 2 维列向量,矩阵  $A = (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$ ,  $B = (\alpha_1, \alpha_2)$ . 若行列式  $|A| = 6$ , 则  $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (5) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $E$  为 2 阶单位矩阵,矩阵  $B$  满足  $BA = B + 2E$ , 则  $B = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (6) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,且均服从区间  $[0, 3]$  上的均匀分布,则  $P\{\max(x, y) \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (7) 设函数  $y = f(x)$  具有二阶导数,且  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ ,  $\Delta x$  为自变量  $x$  在点  $x_0$  处的增量  $\Delta y$  与  $dy$  分别为  $f(x)$  在点  $x_0$  处对应的增量与微分,若  $\Delta x > 0$ , 则  
 (A)  $0 < dy < \Delta y$  (B)  $0 < \Delta y < dy$   
 (C)  $\Delta y < dy < 0$  (D)  $dy < \Delta y < 0$  【    】
- (8) 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续,且  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$ , 则  
 (A)  $f(0) = 0$  且  $f'_-(0)$  存在 (B)  $f(0) = 1$  且  $f'_-(0)$  存在  
 (C)  $f(0) = 0$  且  $f'_+(0)$  存在 (D)  $f(0) = 1$  且  $f'_+(0)$  存在 【    】
- (9) 设函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,且  $f(x) \leq g(x)$ , 且对任何  $C \in (0, 1)$   
 (A)  $\int_{\frac{1}{2}}^C f(t) dt \geq \int_{\frac{1}{2}}^C g(t) dt$  (B)  $\int_{\frac{1}{2}}^C f(t) dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^C g(t) dt$   
 (C)  $\int_C^1 f(t) dt \geq \int_C^1 g(t) dt$  (D)  $\int_C^1 f(t) dt \leq \int_C^1 g(t) dt$  【    】
- (10) 设非齐次线性微分方程  $y' + P(x)y = Q(x)$  有两个不同的解  $y_1(x), y_2(x)$ ,  $C$  为任何常数,则该方程通解是  
 (A)  $C[y_1(x) - y_2(x)]$  (B)  $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$   
 (C)  $C[y_1(x) + y_2(x)]$  (D)  $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$  【    】
- (11) 设  $f(x, y)$  与  $\varphi(x, y)$  均为可微函数,且  $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ , 已知  $(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  在约束条件

$\varphi(x, y) = 0$  下的一个极值点, 下列选项正确的是

- (A) 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$   
 (B) 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$   
 (C) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$   
 (D) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$  【 】

(12) 设  $A$  为 3 阶矩阵, 将  $A$  的第 2 行加到第 1 行得  $B$ , 再将  $B$  的第一列的  $-1$  倍加到第 2 列得  $C$ ,

记  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 则

- (A)  $C = P^{-1}AP$  (B)  $C = PAP^{-1}$   
 (C)  $C = P^TAP$  (D)  $C = PAP^T$  【 】

(13) 设  $A, B$  为两个随机事件, 且  $P(B) > 0, P(A|B) = 1$  则有

- (A)  $P(A \cup B) > P(A)$  (B)  $P(A \cup B) > P(B)$   
 (C)  $P(A \cup B) = P(A)$  (D)  $P(A \cup B) = P(B)$  【 】

(14) 设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ , 随机变量  $Y$  服从正态分布  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 且  $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$ , 则必有

- (A)  $\sigma_1 < \sigma_2$  (B)  $\sigma_1 > \sigma_2$   
 (C)  $\mu_1 < \mu_2$  (D)  $\mu_1 > \mu_2$  【 】

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 7 分)

设  $f(x, y) = \frac{y}{1 + xy} - \frac{1 - y \sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x}, x > 0, y > 0$ , 求: (I)  $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$ ; (II)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ .

(16)(本题满分 7 分)

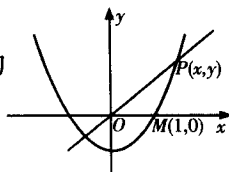
计算二重积分  $\iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = x, y = 1, x = 0$ , 所围成的平面区域.

(17)(本题满分 10 分)

证明: 当  $0 < a < b < \pi$  时,  $b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$

(18)(本题满分8分)

在 $xOy$ 坐标平面上,连续曲线 $L$ 过点 $M(1,0)$ ,其上任意点 $P(x,y)$  ( $x \neq 0$ ) 处的切线斜率与直线 $OP$ 的斜率之差等于 $ax$  (常数 $a > 0$ )



(I) 求 $L$ 的方程;

(II) 当 $L$ 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ ,确定 $a$ 的值.

(19)(本题满分10分)

试确定常数 $A, B, C$ 的值,使得 $e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$ ,其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 $x^3$ 高阶的无穷小.

(20)(本题满分13分)

设4维向量组 $\alpha_1 = (1 + \alpha, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2 + \alpha, 2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 3, 3 + \alpha, 3)^T, \alpha_4 = (4, 4, 4, 4 + \alpha)^T$ ,问 $\alpha$ 为何值时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关?当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时,求其一个极大线性无关组,并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

(21)(本题满分13分)

设3阶实对称矩阵 $A$ 的各行元素之和均为3,向量 $I_1 = (-1, 2, -1)^T, I_2 = (0, -1, 1)^T$ ,是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(I) 求 $A$ 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 $Q$ 和对角矩阵 $\Lambda$ ,使 $Q^T A Q = \Lambda$ ;

(III) 求 $A$ 及 $\left(A - \frac{3}{2}E\right)^6$ ,其中 $E$ 为3阶单位矩阵.

(22)(本题满分 13 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布为

| $X \backslash Y$ | -1  | 0   | 1   |
|------------------|-----|-----|-----|
| -1               | $a$ | 0   | 0.2 |
| 0                | 0.1 | $b$ | 0.2 |
| 1                | 0   | 0.1 | $c$ |

其中  $a, b, c$  为常数, 且  $X$  的数学期望  $EX = -0.2, P\{Y \leq 0 | X \leq 0\} = 0.5$ , 记  $Z = X + Y$

求: (I)  $a, b, c$  的值;

(II)  $Z$  的概率分布;

(III)  $P\{X = Z\}$ .

(23)(本题满分 13 分)

设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 令 } Y = X^2, F(X, Y) \text{ 为二维随机变量 } (X, Y) \text{ 的分布函数.}$$

求: (I)  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ ;

(II)  $\text{Cov}(X, Y)$ ;

(III)  $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ .



# 2005 年全国硕士研究生入学统一考试

## 数学(四)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(2) 微分方程  $xy' + y = 0$  满足初始条件  $y(1) = 2$  的特解为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 设二元函数  $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$ , 则  $dz \Big|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 设行向量组  $(2, 1, 1), (2, 1, a, a), (3, 2, 1, a), (4, 3, 2, 1)$  线性相关, 且  $a \neq 1$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(5) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  均为 3 维列向量, 记矩阵

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$ .

如果  $|A| = 1$ , 那么  $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(6) 从数 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为  $X$ , 再从  $1, \dots, X$  中任取一个数, 记为  $Y$ , 则  $P\{Y = 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

二、选择题(本题共 8 题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 当  $a$  取下列哪个值时, 函数  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$  恰有两个不同的零点.

(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8. 【    】

(8) 设  $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma, I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma, I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则

(A)  $I_3 > I_2 > I_1$ . (B)  $I_1 > I_2 > I_3$ .  
(C)  $I_2 > I_1 > I_3$ . (D)  $I_3 > I_1 > I_2$ . 【    】

(9) 下列结论中正确的是

(A)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$  与  $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$  都收敛.  
(B)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$  与  $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$  都发散.  
(C)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$  发散,  $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$  收敛.  
(D)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$  收敛,  $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$  发散. 【    】

(10) 设  $f(x) = x \sin x + \cos x$ , 下列命题中正确的是

(A)  $f(0)$  是极大值,  $f(\frac{\pi}{2})$  是极小值. (B)  $f(0)$  是极小值,  $f(\frac{\pi}{2})$  是极大值.