GaoDengShiFan

ZhuanKeXueXiaoJiaoCai

高等师范专科学校教材

高等代数

主编 廖家藩

主审 李师正 王品超

电子科技大学出版社

UEST

PUBLISHINGHOUSE

高等代数

主　编：廖家楷

主　审：李师正　王品超

副主编：李玉文　项观捷　李桂荣

姜同松　龚传志　王师文

电子科技大学出版社

1995年[illegible]月

[川]新登字 016 号

高 等 代 数

廖家騄 主编

*

电子科技大学出版社出版

(成都建设北路二段四号)邮编 610054

德州地区新联印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本 850×1168 1/32 印张:12.5 字数 314 千字

1995 年 6 月第 1 版 1995 年 6 月第 1 次印刷

印数:1—5000 册

ISBN 7—81043—297—4/O·30

定价:12.80 元

前　言

本书是依据国家教育委员会师范教育司 1989 年编印的二年制师范专科学校数学专业《高等代数》教学大纲编写的，可作为师范专科学校，教育学院，专科函授和电视大学数学专业的教学用书或教学参考书．

本书包括多项式理论；线性代数；群、环、域简介等内容，考虑到师专数学教育专业的培养目标和函授学员的实际情况，在编写过程中我们突出了以下特点：

1．体现师范性，注意指导与解释中学数学中一些教学疑难问题．

2．结构清楚，层次分明，论证严谨，语言简练，文字通俗，教师易于讲授，学生便于自学．

3．根据课程性质和学生的接受能力，适当地介绍了近年来出现的新成果，并有选择性地吸收国外的一些有益的提法．

4．按照由简到繁，由易到难的原则，每章节都配备了适当的复习题和习题以供教师在教学中选用．为满足一些学生“专升本”的需要，适当地增大了某些复习题的难度．

我们是受山东代数学会筹委会的委托编写本书的．除正副主编外，参加编写的还有(以姓氏笔划为序)：王继明、孔德芳、李军、李万昆、陈乐民、陈贞波、高丽、杨传理、贾冠军、魏立平．

在本书的编写过程中得到了山东省教委高教处，师范处的指导，帮助和大力支持，山东师范大学李师正教授，曲阜师范大学王品超教授审阅了全书并提出许多宝贵意见，临沂师专叶伯诚教授对本书的编写也提出许多指导性意见，在此一并表示感

谢．

限于编者水平，书中不当之处诚恳希望读者批评指正．

编　者

1995年6月8日

目　录

第一章 预备知识

高等代数是数学专业的重要基础课程．高等代数作为中学代数的继续和提高，与其有着很大的不同，这不仅表现在内容上，更重要的是表现在研究的观点和方法上．

在高等代数的研究过程中，将一再体现由具体事物抽象出一般概念，再以一般概念回到具体事物去的辩证观点和严格的逻辑推理方法．

在这一章里，我们把本课程要用到的一些基本知识介绍一下，为今后的学习做必要的准备．

1.1 集 合

1.1.1 集合的概念

若干个确定事物的集体，称为一个集合，其中每个事物称为这个集合的元素．

我们常用大写英语字母 A、B、C……来表示集合，常用小写英语字母 a、b、c……来表示集合的元素，如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$，如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$.

对于一些经常用到的集合，我们习惯上用一些特定的字母来表示，例如：

N 表示全体自然数的集合，

Z 表示全体整数的集合，

Q 表示全体有理数的集合，

R 表示全体实数的集合，

C 表示全体复数的集合．

在记述一个集合时，最常用的有下面两种方法．

1．列举法：把集合的元素一一列举出来．

在记述含有少量元素的集合时常用列举法．例如，集合$\{1,2,5\}$，$\{0\}$等，都是用列举法记述集合．这时，用大括号将元素列出，用逗号分割；有时集合元素很多，甚至无限多，但呈现有确定的规律性，也可以用列举法．

例如

$\{1,2,3,4\cdots\}$表示自然数集合 N，

$\{1,2,3,4,\cdots,100\}$表示$\leqslant 100$的自然数集合．

2．描述法：利用集合元素的根本特征给出集合．

我们在用描述法给出一个集合时，方法不是固定的，有时我们用语言叙述给出一个集合．例如："1 的平方根的全体"给出了一个集合．这个集合用列举法表示则为$\{1,-1\}$．还是这个集合，我们可以用下面的方法来记述，即$\{x|x^2-1=0\}$，在这种方法中，大括号中的内容分为两部分，用竖线隔开，竖线前写元素的一般形式，竖线后写元素的具体特征，当我们使用数学式子来描述元素的具体特征时，又称这种记述方法为**解析法**．

根据集合所含元素的多少，我们给出下面几个概念．

只含一个元素的集合称为**单元素集**，例如$\{a\}$，在这里，集合$\{a\}$与元素 a 在概念上是不同的．

不含任何元素的集合称为**空集合**，通常记作$\varnothing$，注意$\varnothing$与$\{0\}$不同，$\{0\}$是一个单元素集，它含有一个元素 0.

含有有限个元素的集合称为**有限集**．空集合被视为有限集．有限集 S 的元素个数是一个非负整数，用记号$|S|$来表示，例如

$|\{1,2,3\}|=3$，$|\{0\}|=1$，$|\varnothing|=0$

含有无限个元素的集合称为无限集．

为了以后叙述问题的方便，我们引入几个符号：

符号“$A\Rightarrow B$”表示“若 A 则 B”；

符号“$A\Leftrightarrow B$”表示“A 成立必要且只要 B 成立”；

符号“$\forall$”表示“对任意的”或“对每一个”，例如，“$\forall x$”表示“对每一个 x”；

符号“$\exists$”表示“至少存在一个”，例如，“$\exists x$”表示“至少存在一个 x”．

关于集合之间的关系，我们主要给出集合的包含与相等两个概念．

定义 1.1 设 A、B 是两个集合，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A **包含于** B，记作 $A\subseteq B$，或称 B **包含** A，记作 $B\supseteq A$．这时，又称 A 是 B 的**子集**，B 是 A 的**扩集**．否则称 A **不包含于** B，记作 $A\nsubseteq B$，或称 B **不包含** A，记作 $B\nsupseteq A$．

显然有

$$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(\forall\ x, x\in A\Rightarrow x\in B).$$

$$(A\nsubseteq B)\Leftrightarrow(\exists\ x, x\in A \text{ 但 } x\notin B).$$

进一步我们又有

定义 1.2 若集合 A 包含于集合 B，并且 B 至少有一个元素不属于 A，则称 A **真包含于** B，记作 $A\subset B$，或称 B **真包含** A，记作 $B\supset A$，这时，又称 A 是 B 的**真子集**．

显然有

$$(A\subset B)\Leftrightarrow(A\subseteq B \text{ 且 } \exists x\in B \text{ 但 } x\notin A).$$

定义 1.3 如果集合 A 和集合 B 含有完全相同的元素，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$．

显然有

$$(A=B)\Leftrightarrow(A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A).$$

$$(A=B)\Leftrightarrow(\forall x: x\in A\Leftrightarrow x\in B).$$

1.1.2 集合的运算

定义 1.4 由集合 A 与集合 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**(简称为交),记作 $A\cap B$.

例如 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,5,6\}$,则 $A\cap B=\{2\}$.

根据定义,我们有

$$(x\in A\cap B)\Leftrightarrow(x\in A \text{ 且 } x\in B).$$

$$(x\notin A\cap B)\Leftrightarrow(x\notin A \text{ 或 } x\notin B).$$

定义 1.5 由至少属于集合 A 和 B 之一的一切元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**(简称为并),记作 $A\cup B$.

例如 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{2,3,4\}$则 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$.

根据定义,我们有

$$(x\in A\cup B)\Leftrightarrow(x\in A \text{ 或 } x\in B).$$

集合的交与并满足以下运算律

1) $A\cap A=A, A\cup A=A$;

2) $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$;

3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$,
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

5) $A\cap(A\cup B)=A, A\cup(A\cap B)=A$.

我们只对 4)中的第一个式子加以证明,其余的,读者可自行练习.

证 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

证 $\forall x\in A\cap(B\cup C)$,那么 $x\in A$,且 $x\in B\cup C$,于是 $x\in A$ 且 x 至少属于 B 与 C 中之一,若 $x\in B$,那么因为 $x\in A$,所以 $x\in A\cap B$;同样若 $x\in C$,则 $x\in A\cap C$,不论哪种情形都有

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

所以 $$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

反之，若 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，那么 $x\in A\cap B$ 或者 $x\in A\cap C$. 但 $B\subseteq B\cup C, C\subseteq B\cup C$，所以不论哪种情形都有 $x\in A\cap(B\cup C)$. 故 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$，因此有

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C). \qquad \square$$

两个集的交与并的概念可以推广到任意 n 个集上去，设 $A_1,A_2,\cdots,An$ 是给定的集，由 $A_1,A_2,\cdots,An$ 的一切公共元素所或的集叫做 $A_1,A_2,\cdots,An$ 的交，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap An$；由 $A_1,A_2,\cdots,An$ 的一切元素所或的集叫做 $A_1,A_2,\cdots,An$ 的并，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup An$.

于是有

$(x\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup An)\Leftrightarrow(x$ 至少属于某一 $A_i)(i=1,2,\cdots,n)$

$(x\in A_1\cap A_2\cap\cdots\cap An)\Leftrightarrow(x$ 属于每一 $A_i,i=1,2\cdots,n)$

定义 1.6 设 A,B 是两个集，由一切属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集，称为 B 在 A 中的余集，或者称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$，即 $A-B=\{x|x\in A$ 但 $x\notin B\}$.

例如，$R-Q$ 就是一切无理数所组成的集，应注意的是，在 $A-B$ 的定义里，并没有要求 B 是 A 的子集．例如 $Q-C=\varnothing$.

定义 1.7 设 A,B 是两个集，令

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A,b\in B\},$$

$A\times B$ 称为 A 与 B 的积．

$A\times B$ 是由一切元素对 (a,b) 所成的集，其中第一个位置的元素 a 取自 A，第二个位置的元素 b 取自 B.

例如：$A=\{0,1\},B=\{a,b\}$，则

$$A\times B=\{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b)\}.$$

又如，在平面直角坐标系中，平面上所有的坐标的集就是 R 与 R 的积：

$$\mathrm{R}\times\mathrm{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathrm{R}\}.$$

两个集合的积的概念也可以推广．设 $A_1,A_2,\cdots,An$ 是 n 个集合．由一切从 $A_1,A_2,\cdots,An$ 里顺序取出的元素组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$、$(a_i\in A_i)$ 所组成的集合叫做集合 $A_1,A_2,\cdots,An$ 的积，记作 $A_1\times A_2\times\cdots\times An$.

习　题　1.1

1. 设 a 是集合 A 的一个元素，符号 $\{a\}$ 表示什么？ $\{a\}\in A$ 对不对？为什么？
2. 设 $A\subseteq B$，证明：$A\cap B=A$，$A\cup B=B$.
3. 证明：

   (1)　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

   (2)　$A\cap(A\cup B)=A$.

   (3)　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

4. 下列论断哪些是对的，哪些是错的？对于错的论断举出反例，并把错误的论断改正过来．

   (1)　$(x\in A\cup B$ 且 $x\notin A)\Rightarrow(x\in B)$.

   (2)　$(x\in A$ 或 $x\in B)\Rightarrow(x\in A\cap B)$.

   (3)　$(x\notin A\cap B)\Rightarrow(x\notin A$ 且 $x\notin B)$.

   (4)　$(x\notin A\cup B)\Rightarrow(x\notin A$ 且 $x\notin B)$.

5. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{b,d,e,f\}$，试求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\times B$.
6. 写出 $\mathrm{R}\times\mathrm{R}\times\mathrm{R}$ 的表示式，并说明其几何意义．

1.2　映　射

在中学数学里，已经学习过映射的概念，映射是数学中最基本的概念之一．在这一节里，我们将讨论这个概念和它的一些简单性质．

1.2.1映射的概念

定义 1.8　设 A,B 是两个非空集合．A 到 B 的一个映射指的是一个对应法则，通过这个法则，对于集合 A 中每一元素 x，有集合 B 中一个唯一确定的元素 y 与之对应．

我们常用字母 $f,g\cdots\cdots$ 表示映射．用记号 $f:A\to B$ 表示 f 是 A 到 B 的一个映射．

如果通过映射 f，A 中元素 x 对应的 B 中元素是 y，那么就写作

$$f:x\longmapsto y$$

这时 y 叫做元素 x 在 f 之下的象，记作 $f(x)$，而 x 称为 y 在映射 f 下的一个原象．

如果对每一 $x\in A$，$f(x)$ 都已确定，那么映射 f 就完全给出了．

例 1　令 Z 是一切整数的集合，对于每一整数 n，令 $f(n)=2n$ 与之对应，那么 f 是 Z 到 Z 的一个映射．

例 2　令 R 是一切实数的集合，R^+ 是一切正实数的集合，对于每一 $x\in R$，令 $f(x)=x^2+1$ 与之对应，那么 f 是 R 到 R^+ 的一个映射．

例 3　设 A 是任意一个非空集合，对于每一 $x\in A$，令 $f(x)=x$ 与之对应．

$$f:x\longmapsto x$$

这自然是 A 到 A 的一个映射，这个映射称为集合 A 的恒等映射或单位映射，记作 j_A.

例 4　设 $A=B=\{a,b,c,d\}$.

$$f:a\longmapsto b,b\longmapsto c,c\longmapsto d,d\longmapsto a.$$

这是 A 到 B 的一个映射．

例 5　设 A 是一切非负实数的集合，B 是一切实数的集合，对于每一 $x\in A$，令 $f(x)=\pm\sqrt{x}$ 与它对应，f 不是 A 到 B 的

映射，因为当 $x>0$ 时，$f(x)$不唯一．

例 6　N 是一切自然数的集合

$$f: n \longmapsto n-1$$

不是 N 到 N 的映射，因为 $f(1)=0 \notin N$.

从上面的例子可以看出，关于 A 到 B 的映射应该注意以下几点：

1°　A 与 B 可以是相同的集合，也可以是不相同的集合．若 A 与 B 相同，A 到 B 的映射即 A 到自身的映射叫做集合 A 的一个变换．

2°　对于 A 的每一个元素 x，需要 B 中一个唯一确定的元素与它对应．

3°　一般说来，B 的元素不一定都是 A 中元素的象（参看例 1）．

4°　A 中不相同的元素的象可能相同（参看例 2）．

设 $f: A \to B$，$g: A \to B$ 都是 A 到 B 的映射．若对于每一 $x \in A$，都有 $f(x)=g(x)$，则称映射 f 与 g 相等，记作 $f=g$.

例如　令　$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, x \longmapsto |x|$,

$$g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, x \longmapsto \sqrt{x^2},$$

那么，$f=g$.

映射这个概念对我们来说并不陌生，它就是我们所熟悉的函数概念的推广，因此也常常把 A 到 B 的映射叫做定义在 A 上，取值在 B 内的函数．

设 $f: A \to B$ 是一个映射，对于 $x \in A$，x 的象 $f(x) \in B$，一切这样的象作为 B 的一个子集，用 $f(A)$表示：

$$f(A)=\{f(x) \mid x \in A\}$$

叫做 A 在 f 之下的象，或者叫做映射 f 的象．

例如在上面例 1 里，$f(Z)$就是一切偶数的集合，在例 4 里，

$f(A)=B$.

1.2.2 满射、单射、双射

A 到 B 的映射 f 的象 $f(A)\subseteq B$，$f(A)$ 可能是 B 的一个真子集，也可能等于 B. 我们有

定义 1.9 设 f 是 A 到 B 的一个映射，如果对于 B 中的一个元素 y，都有 A 中元素 x，使 $y=f(x)$，这时称 f 是 A 到 B 的一个满映射（简称满射）.

根据这个定义：$f:A\to B$ 是满射必要且只要 $f(A)=B$.

例 3 和例 4 都是满射，而例 1 和例 2 不是满射.

关于映射，只要求对于 A 中每一个元素 x，有 B 中一个唯一确定的元素 y 与它对应，但是 A 中不同的元素可以有相同的象. 例如，在例 2 里，对于绝对值相同的两个非零实数 x 和 $-x$ 它们的象都是 x^2+1. 然而有的映射具有这样的性质：A 中任意两个不同元素的象也不相同. 例 1、例 3、例 4 中的映射都具有这一性质. 对此，我们有

定义 1.10 设 $f:A\to B$ 是一个映射. 如果对于 A 中任意两个元素 x_1 和 x_2，只要 $x_1\neq x_2$，就有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，那么就称 f 是 A 到 B 的一个单映射（简称单射）.

根据这个定义，$f:A\to B$ 是单射的充分必要条件是对任意的 $x_1,x_2\in A$，只要 $f(x_1)=f(x_2)$，就有 $x_1=x_2$.

上面的例 1、例 3、例 4 都是单射.

定义 1.11 如果 $f:A\to B$ 既是满射，又是单射，即如果 f 满足下列两个条件：

1) $f(A)=B$；

2) $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$，对一切 $x_1,x_2\in A$，

那么就称 f 是 A 到 B 的一个双射.

例 4 的映射是一个双射，任意非空集合 A 的恒等映射（例