中等專業學校教學用書

高等数学教程

И. Ф. 苏沃洛夫著

高等教育出版社

中等專業学校教学用書

高等数学教程

И. Ф. 苏沃洛夫著
鄒善卿譯

本書系根据苏联國营“苏維埃科學”出版社（Государственное издательство “Советская наука”）出版的苏沃洛夫（И. Ф. Суворов）著“中等技術學校高等數學教程”（Курс высшей математики для техникумов）1955年第二版譯出。原書經苏联高等教育部審定为中等技術學校教科書。

高 等 数 学 教 程

И. Ф. 苏沃洛夫著

鄒 善 卿 譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

上海蔚文印刷廠印刷　新華書店總經售

書號625（課524）　開本850×1168 1/32　印張10 3/16　字數284,000

一九五六年五月上海第一版

一九五六年五月上海第一次印刷

印數1—25,000　定價(8) ¥ 1.20

目　　錄

原序……9

第一篇　平面解析几何學初步

第一章　坐标法……11

§1. 點的坐标……11
§2. 二有向線段的和……13
§3. 兩點間的距离……14
§4. 分線段为已知比……17
§5. 直線与軸的夾角……18
§6. 平行与垂直的条件……20

第二章　直線……22

§7. 直線看作點的軌跡……22
§8. 帶角系數的直線方程……23
§9. 直線的一般方程及其特殊情況……25
§10. 直線的截距式方程……27
§11. 解題举例……28
§12. 依已知方程作直線……29
§13. 二直線的交點……30
§14. 通过已知點 (x_1, y_1) 且有已知方向的直線方程……34
§15. 过二定點 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 的直線方程……35
§16. 二直線的夾角……36

第三章　二次曲線……39

§17. 圓的方程……39
§18. 解題举例……40
§19. 圓是二次曲線……42
§20. 橢圓……44
§21. 橢圓的方程……45

§ 22. 依橢圓的方程來研究它的形狀……46
§ 23. 橢圓的画法……48
§ 24. 橢圓与圓的相互關系……49
§ 25. 橢圓的离心率……50
§ 26. 双曲線……51
§ 27. 双曲線的方程……51
§ 28. 依双曲線的方程來研究它的形狀……52
§ 29. 双曲線的画法……54
§ 30. 双曲線的漸近線……55
§ 31. 双曲線的离心率……57
§ 32. 等边双曲線……58
§ 33. 關於橢圓及双曲線問題的解法举例……59
§ 34. 拋物線……60
§ 35. 拋物線的方程……60
§ 36. 依拋物線的方程來研究它的形狀……61
§ 37. 拋物線的画法……63
§ 38. 坐标變換的公式……64
§ 39. 坐标軸平移時拋物線的方程……66
§ 40. 等边双曲線在以其漸近線为坐标軸時的方程……67
§ 41. 解題举例……68
§ 42. 二次曲線是圓錐截線……70

第二篇 微分學初步

第四章 極限論……73
§ 43. 絕对值及其性質……73
§ 44. 變量的極限……74
§ 45. 數、變量与極限的几何表示……77
§ 46. 有界變量与無界變量……79
§ 47. 無限小量……80
§ 48. 無限小的基本性質……81
§ 49. 變量、變量的極限及無限小之間的關系……83
§ 50. 變量的極限只能有一个……84
§ 51. 代數和的極限……84
§ 52. 乘積的極限……85

§53. 商的極限……86
§54. 有理代數式的極限……88
§55. 變量及其極限的正負号……89
§56. 判定變量極限存在的准則……89
§57. 無限大量……90
§58. 無限大与無限小的關系……91
§59. 無限小的商的極限……92
§60. 求極限的例……93

第五章　函數及其連續性……95

§61. 自變量与函數……95
§62. 函數的一般記法……97
§63. 函數的圖象給定法与解析給定法……98
§64. 函數的圖象……100
§65. 自變量和函數的增量……103
§66. 在有窮點處函數的極限……105
§67. 当 $x\to\infty$ 時函數的極限……106
§68. 附註……107
§69. 函數的連續性……109
§70. 函數連續条件的另一表示法……113
§71. 函數連續性的檢驗法……113
§72. 在一點連續的函數的性質……114

第六章　導數……116

§73. 線性函數及其變化速度……116
§74. 求速度的例……117
§75. 導數……121
§76. 曲線的切線……124
§77. 導數的几何意义……126
§78. 函數的可微性与連續性之間的關系……128

第七章　初等函數的導數……130

§79. 前言……130
§80. 常量的導數……130
§81. 冪的導數……130
§82. 常量与函數之積的導數……132

§ 83. 函數的代數和的導數 ……133
§ 84. 函數之積的導數 ……134
§ 85. 商的導數 ……136
§ 86. 附註 ……138
§ 87. 函數的函數 ……138
§ 88. 函數的函數的導數 ……139
§ 89. 正弦与弧之比的極限 ……141
§ 90. 三角函數的導數 ……143
§ 91. 兩种对數系．數 e．由一个对數系變到另一个对數系 ……146
§ 92. 对數的導數 ……148
§ 93. 單調函數 ……151
§ 94. 反函數的導數 ……152
§ 95. 指數函數的導數 ……153
§ 96. 任意冪的導數 ……154
§ 97. 反三角函數的導數 ……155
§ 98. 二階導數及高階導數 ……157

第八章 用導數研究函數 ……159

§ 99. 函數为常量、具遞增及遞減性的判別准則 ……159
§ 100. 求量的最大值与最小值的問題 ……162
§ 101. 函數的極大值与極小值 ……164
§ 102. 極值存在的准則 ……165
§ 103. 求極值的法則 ……168
§ 104. 求極值的例 ……168
§ 105. 用二階導數求極值 ……170
§ 106. 求量的最大值与最小值的問題举例 ……173
§ 107. 在導數值不存在的點处函數的極大与極小 ……175
§ 108. 曲線的凹凸 ……176
§ 109. 拐點 ……178
§ 110. 函數圖象的作法 ……179
§ 111. 二階導數的力學意义 ……180

第九章 微分 ……183

§ 112. 無限小的比較 ……183
§ 113. 函數的微分 ……184

§114. 自變量的微分. 導數看作微分之比 ……187
§115. 微分概念对近似計算的应用 ……188

第三篇　積分學初步

第十章　不定積分 ……193
§116. 積分法是微分法的逆运算 ……193
§117. 不定積分是已知函數的全部原函數的表達式 ……195
§118. 不定積分的性質 ……197
§119. 用公式的積分法 ……198
§120. 代換積分法 ……200
§121. 積分的基本公式及其应用的例 ……204
§122. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ 之冪的積分法 ……209
§123. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ……211
§124. 附註 ……212
第十一章　定積分及其应用 ……214
§125. 定積分作为原函數改變量的值 ……214
§126. 定積分作为函數 ……217
§127. 定積分的几何意义 ……218
§128. 補充 ……221
§129. 定積分作为和的極限 ……223
§130. 定積分的性質 ……227
§131. 面積計算的例 ……228
§132. 角錐的体積 ……231
§133. 旋轉体的体積 ……232
§134. 計算旋轉体体積的例 ……234
§135. 液体的压力 ……236
§136. 力所作的功 ……238

第四篇　補充

第十二章　多變量函數的微分法 ……241
§137. 偏導數和偏微分. 全微分及其应用 ……241
§138. 隱函數的微分法 ……245
第十三章　函數之展開为冪級數 ……248

§139．定义 ……248
§140．收斂的必要条件 ……249
§141．条件收斂与絕对收斂 ……250
§142．比較原則与達期倍尔判定法 ……252
§143．冪級數及其收斂性的判定法 ……253
§144．冪級數的微分法 ……255
§145．馬克勞林級數 ……255
§146．泰勒級數 ……257
§147．余項．泰勒級數与馬克勞林級數的收斂性 ……259
§148．將函數展開成 x 的冪級數的例．二項級數 ……260
§149．利用級數進行的計算 ……264
§150．按照差 $x-a$ 的冪而展開的例 ……267

第五篇　問題与練習

§1．坐标法 ……269
§2．直線 ……271
§3．圓 ……277
§4．橢圓 ……278
§5．双曲線 ……281
§6．拋物線 ……283
§7．雜題 ……286
§8．極限理論 ……287
§9．函數，函數的連續性 ……288
§10．導數 ……290
§11．求導數 ……292
§12．用導數研究函數．極大值与極小值．速度与加速度 ……299
§13．微分 ……302
§14．不定積分 ……303
§15．定積分 ……309
§16．多變量函數的微分法 ……313
§17．函數之展開为冪級數 ……315
§18．答案与提示 ……315

第六篇　歷史簡述

原　序

本書系根据苏联高等教育部批准的中等技術學校現行數學教學大綱編成。除大綱中的材料以外，書中还包含多變量函數的微分法及函數之展開为冪級數等章，它們是在某些技術學校中，例如在大地測量學校和地形測量學校中所要學習的。

中等技術學校的學生，应該通曉一些他們以前完全沒有接觸过的高等數學概念，像曲線方程，函數的連續性，導數，微分，不定積分与定積分等概念，也应該掌握实际运用这些概念的方法，而且这一切又必須在很短的時間內完成。考慮到这一點，我認为本書中的敍述要具体，內容要足夠完备，形式要簡潔平易，而同時又要有科學的嚴謹性。凡不能証明的定理，就用几何圖形來闡明它們的內容。某些命題的証明，由於採用了鄰域概念，得以臻於簡明淺近。

大綱中的材料，在本書內是按照大綱所規定的順序來敍述的。只有“坐标法”与“直線”兩項，由於教學法的緣故，与大綱所定的順序相違。

解析學的概念，是照着大綱的要求，“从變化的观點”研究量出發來加以講解的。但为了使學生以后在工作中水平提高后，便於進一步接受各种解析問題的近代观點起見，我們也作了不少(較深的)講解。

目的在於發展和加深概念的少數補充材料，以及所有不要求熟習的材料，均用小号字排印。

本書最后一部分“問題与練習”，含八百个以上的習題，是按照教程中理論材料的敍述順序排列的。这已足供課堂練習与家庭作業的需要，無需再求助於大學的習題集。並且，从高等數學的第一課起，就可

以随着理論的講解同時讓學生解決一些問題和例題。編选这些問題和例題時，都力求使解題法中要重複用到前面各練習中的方法，以保証學生能獲得牢固的运算技巧。

在第二版中，删掉了那些已包括在新出版的中等技術學校初等數學教科書中的材料，精簡了用小号字排印的補充材料。

在“問題与練習”这一部分里，用新題代替了§2中的第54、58題，§7中的第3題，§11中的第198題，§12中的第64題，以及§15中的第55題。有些例題的解答也予以簡化了。

著者謹向審閱原稿的楚達科夫教授和按手稿的某些章節实地講授的科斯丘克教師表示感謝。С. И. 諾沃雪洛夫同志的意見和提示，对本書在科學上和教學方法上的改善，給了很大的帮助，謹向他致以深深的謝意。同時，我也高兴地指出对本書極为關注的校閱者 И.С. 索洛金同志的辛勤勞動。

著者

第一篇　平面解析几何學初步

第一章　坐标法

§1. 點的坐标

1° 平面解析几何學中研究：直線、圓、橢圓、双曲線和抛物線；而且用坐标法來研究。

所謂坐标法，就是用數來決定點对於坐标軸的位置的方法。

坐标軸是一条直線(圖 1 中的 Ox)，其上定出：

(1)點 O—原點，

(2)正向(圖 1 中由左向右)，

(3)測量線段的單位 l，也叫做單位尺标。

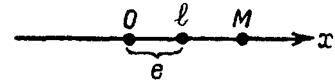

圖 1

軸上任意一點 M 到原點 O 的距离(線段 OM)，可以用所取的單位 l 來測量，也就是可以用數來表示。如果由原點 O 到點 M 的方向与軸的正向一致，則在此數前寫一正号，如果与軸的正向相反，則寫一負号。这样，坐标軸上每一點 M，都有一个确定的數与它对应；这个數称为點 M 的坐标。我們看出，原點 O 的坐标等於零。

反过來說也是对的：对於任一实數，坐标軸上有一點与它对应，这點的坐标，在測量單位已定時，就用这个數來表示。

2° 兩条互相垂直且交於點 O 的坐标軸 Ox 与 Oy (圖 2)，構成直角坐标系或叫笛卡兒坐标系①。

---

① 直角坐标系之称为笛卡兒坐标系，是为了紀念法國的數學家笛卡兒，他曾於 1637 年第一个發表關於解析几何的著作，並在其中論述了他的基本概念：x 与 y 間的方程決定一線。

每一坐标軸的正向，在圖上用箭头指出。

Ox 軸与 Oy 軸將平面分为四部分，称为四象限，且用号碼排为：第一象限（在 $+Ox$ 与 $+Oy$ 間的平面部分），第二象限（在 $+Oy$ 与 $-Ox$ 間），第三象限（$-Ox$ 与 $-Oy$ 間）及第四象限（$-Oy$ 与 $+Ox$ 間）。

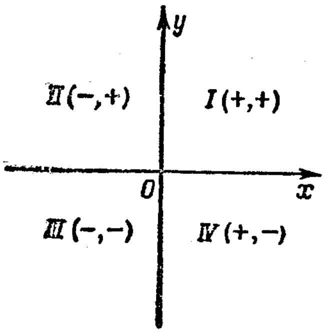

圖 2

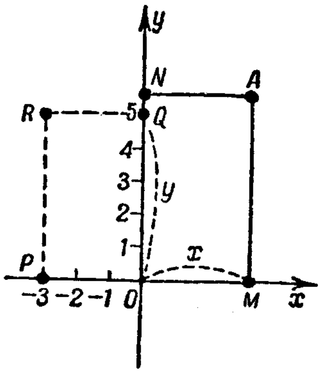

圖 3

为了用數來确定平面上點 A 關於已知坐标系的位置（圖 3），我們由點 A 作 Ox 軸的垂線 AM 和 Oy 軸的垂線 AN。點 M 及 N（由點 A 分別向 Ox 及 Oy 軸所作垂線的垂足）称为點 A 在坐标軸上的投影。設數 x 是 Ox 軸上的點 M 的坐标，數 y 是 Oy 軸上的點 N 的坐标。

定义 點 A 在 Ox 軸上的投影的坐标 x，称为點 A 的横坐标。點 A 在 Oy 軸上投影的坐标 y，称为點 A 的縱坐标①。

按照这个定义，我們称 Ox 軸为横軸，称 Oy 軸为縱軸。

为簡便起見，把"點 A 有坐标 x 及 y"这句話寫为：點 $A(x, y)$；这样寫的時候，横坐标寫在第一位，縱坐标在第二位。

點 A 的横坐标与縱坐标的正負号，是依它所在的象限來确定的。圖 2 指出每个象限中横坐标与縱坐标的正負号，其中第一个正負号是横坐标的，第二个是縱坐标的。

① "横坐标"的拉丁文是 abscissus，原意是"截取的"；"縱坐标"的拉丁文是 ordinatus，原意是"有序的"。

如果點 A 在 $Ox(Oy)$ 軸上，則它的縱坐标(横坐标)等於零。

3° 平面上的每一點，都可用上述方法确定它的坐标。反过來說，依給定的坐标可确定平面上一點。例如，$(-3, 5)$ 是點 R 的坐标。由原點 O 沿 Ox 軸向左取 3 个單位，沿 Oy 軸向上取 5 个單位，便在 Ox 軸上得到一點 P，在 Oy 軸上得到一點 Q(圖 3)，再引直線 PR 及 QR 各与 Oy 及 Ox 軸平行，在它們相交处就得到所求的點 $R(-3, 5)$。

4° 平面上點 A 的坐标 x 及 y 兩个數，各等於線段 OM 及 ON 对單位長之比。对兩軸都取線段 l 的長度作为測量單位，便有：

$$x=\frac{OM}{l}, \quad y=\frac{ON}{l}。 \tag{1}$$

这兩个比通常簡寫为：

$$x=OM, \quad y=ON,$$

这里，OM 或 ON 不是理解为有向線段 OM 或 ON，而是理解为当 $l=1$ 時度量它的數。这样寫不僅簡單，而且也便於給坐标 x 及 y 以明顯的形象。

§2. 二有向線段的和

在解析几何學中，線段不僅有長度，而且还有方向，如果二線段：(1)由它們所确定的二直線平行或重合，(2)線段由始點到終點的方向相同(或相反)，則二線段称为同向的(或反向的)。

用兩个字母來标記有向線段時，第一个字母表示線段的始點，第二个字母表示終點。線段 AB 与 BA 有相同的長度，但方向相反：

$$AB=-BA。$$

線段的方向有時用置於終點处的箭头指明(圖 4，a 及б)。

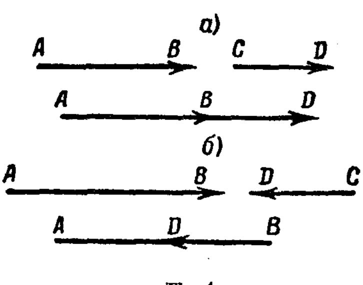

圖 4

欲求二同向或反向線段 AB 及 CD(圖 4, a 及 б)之和,必須將它們移到一直線上,且使第二線段的始點(點 C) 重合在第一線段的終點(點 B) 上,这時,第一線段的始點(點 A) 与第二線段的終點(點 D) 各表示 AB 与 CD 之和的線段的始點与終點:

$$AB+CD=AD。$$

§3. 兩點間的距離

1° 定理 無論原點及已給點 M_1 与 M_2 間在軸上的相互位置如何,線段 M_1M_2 的值總等於其終點坐标減始點坐标之差,卽:如果線段 M_1M_2 的始點和終點的坐标为 x_1 及 x_2(或 y_1 及 y_2),則:

$$\boxed{M_1M_2=x_2-x_1 \quad 或 \quad M_1M_2=y_2-y_1}。\qquad (\mathrm{I})$$

證明 點 M_1 与 M_2 間及对於原點 O 的相互位置,可能有六种不同的情况(圖 5)。

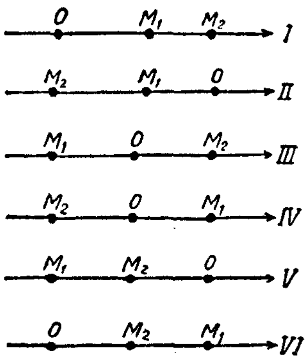

圖 5

如果由左向右來看各點分佈如軸 I 及軸 II 上所示的順序,卽:

$$O, M_1, M_2 \quad 或 \quad M_2, M_1, O,$$

則在这兩种情况下:

$$OM_1+M_1M_2=OM_2,$$

由此

$$M_1M_2=OM_2-OM_1。$$

但 $OM_1=x_1$ 及 $OM_2=x_2$, 所以在这兩种情况下:

$$M_1M_2=x_2-x_1。$$

如果从左向右來看各點排列在軸 III 及 IV 上的順序,卽:

$$M_1, O, M_2 \quad 或 \quad M_2, O, M_1,$$

那末,这時

$$M_1M_2=M_1O+OM_2。$$

但 $M_1O=-OM_1=-x_1$, $OM_2=x_2$, 所以

$$M_1M_2=x_2-x_1。$$

当各點分佈成軸 V 及 VI 所示的順序時,卽 M_1, M_2, O 或 O, M_2, M_1, 便有:

$$M_1M_2+M_2O=M_1O。$$

由此

$$M_1M_2=M_1O-M_2O$$

或 $$M_1M_2=OM_2-OM_1,$$
因为 $M_1O=-OM_1$ 及 $M_2O=-OM_2$。但 $OM_2=x_2$ 及 $OM_1=x_1$，所以
$$M_1M_2=x_2-x_1。$$

2° 举例 1. 以點 $M_1(3, 0)$ 及 $M_2(5, 0)$ 为始點与終點的線段之值，
$$M_1M_2=5-3=2。$$

2. 如果點 $M_1(-3, 0)$ 及 $M_2(-5, 0)$，則
$$M_1M_2=-5-(-3)=-5+3=-2。$$

3. 如果點 $M_1(0, -2)$ 及 $M_2(0, 3)$，則
$$M_1M_2=3-(-2)=3+2=5。$$

3° 推論 与横軸(或縱軸)平行的線段 AB(圖 6)之值，等於它的終點与始點的横坐标(或縱坐标)之差，卽：
$$\boxed{AB=x_2-x_1 \quad \text{或} \quad AB=y_2-y_1}。\qquad (\mathrm{I})$$

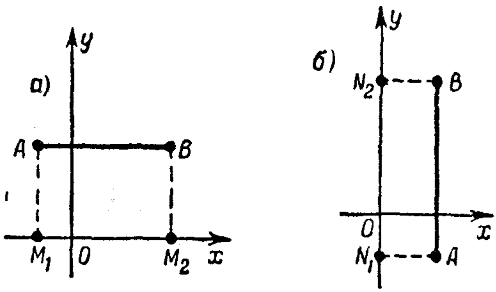

圖 6

事实上，由已知點向横軸(圖 6, a)或向縱軸(圖 6, б)作垂線 AM_1 及 BM_2。我們看出，線段 AB 按其長度來說等於線段 M_1M_2(都是矩形的对边)，且方向相同，卽：
$$AB=M_1M_2=x_2-x_1\ (\text{或}\ y_2-y_1)。$$

4° 如果我們只論線段的長度 $\overline{AB}$，而不論它的方向，則依公式(I)所得的數，应取絕对值。卽：

$$\boxed{\overline{AB}=|x_2-x_1| \text{ 或 } \overline{AB}=|y_2-y_1|}。\qquad\text{(Ia)}$$

5° 如果線段 AB 不与任何一坐标軸平行，則將線段 AB 的長度当作它的値。

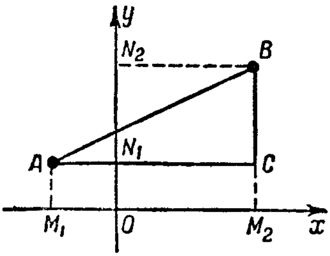

圖 7

問題 求兩點 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 間的距离。

解 由點 A 及 B (圖 7) 向 Ox 軸作垂線 AM_1 及 BM_2，向 Oy 軸作垂線 AN_1 及 BN_2，延長 AN_1 使与 BM_2 相交，在三角形 ACB 中，依勾股定理，求出：

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CB}^2}。$$

但

$$\overline{AC}=\overline{M_1M_2}=|x_2-x_1|,$$

$$\overline{CB}=\overline{N_1N_2}=|y_2-y_1|。$$

將这些値代入根号內，便得：

$$\boxed{\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}},\qquad\text{(II)}$$

卽二已知點間的距离，等於此二點同名坐标之差的平方和，再開平方而得的根。

6° 依公式(II)點 $A(x, y)$ 与原點 $O(0, 0)$ 的距离

$$\overline{OA}=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$

或

$$\boxed{\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}},\qquad\text{(III)}$$

卽點与原點的距离，等於該點坐标的平方和的平方根。

7° 例 1. 求二點 $A(-4, 3)$ 及 $B(0, 6)$ 間的距离。

解 依公式(III)，

$$\overline{AB}=\sqrt{(0+4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{16+9}=5。$$

2. 求与點$(0, 0)$，$(7, -7)$，$(8, 0)$等远的點。

解 設所求點的坐标等於 x 及 y，點 (x, y) 与第一點的距离等於