应用泛函分析基础

（含实分析初步）

（工科硕士研究生用）

周肇锡　徐学雷　张学林　编著

西北工业大学出版社

应用泛函分析基础

（含实分析初步）

（工科硕士研究生用）

周肇锡　徐学雷　张学林　编

西北工业大学出版社

1996年4月　西安

（陕）新登字009号

【内容简介】 应用泛函分析基础，作为现代数学理论基础课，是工科研究生的一门很重要的课程。本书是这门课程的教材。主要内容是：度量空间、赋范空间、内积空间的基本概念、基本理论及重要应用。本书前身是使用很多年的同名讲义。

本书特点是：起点低，叙述较细致，例题较多；对诸如映射、L 测度、L 积分等衔接内容，都作了补充。因此凡具有高等数学基础的读者，都可学习本书。

本书适用于各专业的读者。

应用泛函分析基础

（含实分析初步）

（工科硕士研究生用）

周肇锡 主编

责任编辑 蒋相宗

责任校对 钱伟峰

*

（710072 西安市友谊西路127号 电话4253407）

陕西省新华书店经销

西北工业大学出版社印刷厂印装

ISBN 7-5612-0828-6/O·115

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：10.75 字数：261千字

1996年4月第1版 1996年4月第1次印刷

印数：1—1 000册 定价：12.00元

编 者 说 明

本门课程是为工科有关专业研究生开设的一门数学理论基础课。总共 60～70 学时。

我校从 1981 年秋开始开设这门课，至今已 14 届。本书前身是自编的油印讲义（1984 年 12 月）与其修订稿——1988 年 3 月出版的胶印讲义。现又经少量删节、补充、修改，基本内容未变。习题及习题解答，因已另印成册，没有再附入本书。

选修本课程的工科硕士研究生，大多数仅有工科大学的高等数学基础，与数、理专业硕士研究生学习泛函分析课程的起点很不同，因此很有必要补充诸如线性空间、数学分析理论、实函数论中的某些基础内容。

本书以三大空间的基本概念、基本理论及某些重要的应用作为主要内容。

对选入本书的内容，编者都力图写得详尽仔细，以期更适合复习及自学。

本书的第一章中 § 1.2 及第二章，编者曾作为工科本科生（二、三、四年级）的选修课程实分析初步的教材，用过 5 遍。编者曾希望通过这门选修课，使学生们在大学阶段（而不是推迟到研究生学习阶段）便能提高一些除了演算之外的能力，如：抽象思维能力、推理论证能力以及分析水准。

在本书付印之际，我们要感谢曾经给编者以指导帮助的赵根榕教授、王成堂教授、郑维行教授，曾提供过部分初稿的俞达先

生以及所有曾使用过原讲义并提出意见的老师及学生们。

我们诚挚地欢迎各位读者的意见与批评，以便再版时更正。

编　者

1995 年元月于西北工业大学

目 录

引　论

引论粗浅地介绍泛函分析理论中几个基本概念，并通过实例介绍本课程中某些基本思想。我们提前(而不是照惯例按部就班地)介绍这些概念与问题的目的是：

(1) 使读者尽早了解本课程的梗概(即使是很皮毛的)，从而提高学习兴趣。

(2) 使读者初步了解本课程中的抽象概念都有其丰富的实际背景．但抽象概念本身却不能由直观(尤其是几何直观)去理解。

(3) 使读者初步了解，正是由于本课程的高度抽象性，才有可能实现其在各方面的应用。

学习引论只需高等数学基础以及少许工程数学与数学分析知识。作为引论，叙述上作不到周全准确；但这些并不会妨碍我们的预期目的。

引论内容相对于以后各章来说是独立的，并不成为以后各章的基础，所以读者对引论的领会程度，并不会妨碍我们今后的学习．读者也可以从第一章学起。

§0.1　一个高等数学命题的扩充

本节我们先扩充距离概念，然后将一个微积分命题扩充为一般情况，再讨论应用。

0.1.1　集合与距离

1. 集合概念

集合是数学中的一个基本概念。这个概念像数学中其他原始概念(诸如:数、点、直线等等)一样,无法精确定义;这并不妨碍我们去理解它。

集合中的成员,可以称之为"元"或"元素"或"点"。我们也常把集合称作为"点集"。

集合论创始人康脱(G. Cantor)说:一个集合是"在我们直觉上或思想上,确定的和不同的对象的一个总体"。这表明,一个点集,有两个主要属性。一个是:该点集必须是"确定的";必须能够明确判定,世界万物中,哪一个在该点集内,哪一个不在该点集内。另一个是:一个点集中的各个点(即元素,下同)必须是"不同的",彼此互异的。

例如实数 $a_n = (-1)^n, (n = 1,2,\cdots)$,它作为点列,是按规定顺序:$-1, 1, -1, 1, \cdots$ 排列着的无穷多个点,但它不是一个集合。任何点列,都不是点集;点集中的两点,无需有前后之分。上述点列所对应的点集,是一个由两点构成的点集$\{1, -1\}$。

2. 本课程中常见的点集

实数空间 $\mathbf{R}$

$\mathbf{R}^n$ 空间

$$\mathbf{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, \cdots, x_n); x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n\}$$

其中 n 为确定的正整数,$n > 1$。

数列空间 l^2

$$l^2 = \left\{x : x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots); \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty\right.$$
$$\left. x_i \in \mathbf{R} \text{ or } \mathbf{C}, \quad i = 1,2,\cdots\right\}$$

其中 $\mathbf{C}$ 表示复数集合,下同。

连续函数空间 $C[a,b]$

$$C[a,b] = \{x : x = x(t) \text{ 为定义在区间}[a,b]\text{上的连续函数}\}$$

勒贝格平方可积函数空间 $L^2[a,b]$

$L^2[a,b]=\{x : x=x(t)$ 为定义在$[a,b]$上勒贝格平方可积函数$\}$

其中勒贝格平方可积函数的定义，我们将在第二章中给出。

以后我们若说“点 $x\in\mathbf{R}^4$”，是指，“x 是 $\mathbf{R}^4$ 中的一个点”，即“$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$；其中 $x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,3,4$”。同样，若说“点 $x\in C[a,b]$”，是指“$x=x(t)$ 是点集 $C[a,b]$ 中的一个点”，意思是指“$x=x(t)$ 是一个定义在$[a,b]$上的连续函数”。

由此可知，集合中的**点**，并不一定是“几何上的点”；所谓**点集**，也不一定是“几何上的点的集合”。“点集”是个高度抽象的概念，它包含着比“点(几何上的)集”远为丰富的内容。康脱所说的集合的“确定”性，可以是“直觉上”的，也可以不是直觉上的而是“思想上”的就是这个意思。

3. 两点间的距离

实轴上两点 $x,y\in\mathbf{R}$ 之间的距离(我们用 $d(x,y)$ 表示)，是用其差的绝对值来计算

$$d(x,y)=|x-y| \tag{1}$$

欧氏平面上两点 $x=(x_1,x_2)$、$y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$ 之间的距离(我们也用 $d(x,y)$ 来表示距离，下同)，计算方法为

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \tag{2}$$

相类似，$\mathbf{R}^n$ 中两点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 之间的距离可定义为

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \tag{3}$$

同样，l^2 中两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n\cdots)$ 之间的距离，可定义为

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2} \tag{4}$$

$C[a,b]$中两点 $x=x(t)$ 与 $y=y(t)$ 之间的距离，是不是可以像 **R** 中那样，也定义作它们之间的差的绝对值 $|x(t)-y(t)|$ 呢？显然是不行的。因为它不是一个定数，而是 t 的函数。但距离可定义作

$$d(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)| \tag{5}$$

它的几何意义如图 0-1 所示，表示两条曲线间纵坐标差的绝对值之最大值。

由上述诸例可知，本课程中所谓两点 x,y 之间的**距离** $d(x,y)$，虽然也起着几何里“长度”的概念所起的类似作用，可以刻划两点的差别是多少，但我们已不能再用几何直观去理解这个新概念了。距离，这个抽象概念，包含了比“距离(几何上的)”更为丰富的内容。

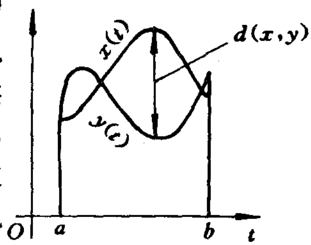

图　0-1

以上距离(1)、(2)、(3)、(4)、(5)，所存在的点集不同，具体含意也各不相同，但它们都满足以下四条公理(我们称之为**距离公理**)：

(a) 非负性　$d(x,y)\geqslant 0$

(b) 对称性　$d(x,y)=d(y,x)$

(c) 三角不等式　$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$

(d) $d(x,y)=0$ 的充要条件是：$x=y$

其中 x、y、z 为确定的空间中的任意点。

一般地，在确定集合 U，若有一个二元函数 $d(x,y)$(其中 x、$y\in U$)，具有上述四条性质的，都可以定义作**距离**。这表明，在确定集合中，距离的定义方法并不是唯一的。例如在 $\mathbf{R}^2$ 中，距离也可以定义为

$$d(x,y)=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|) \tag{6}$$

其中 $x=(x_1,x_2)$、$y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$。请读者自己验证，它满足距离四公理。

4. ε 邻域与单位球

设集合 U 中任意两点 x、$y\in U$ 的距离定义为 $d(x,y)$。我们仿照高等数学中定义数列极限的办法，来定义集合 U 中点列 $a_n\in U(n=1,2,\cdots)$ 的极限。若存在一定点 $a_0\in U$，使得对任意正数 $\varepsilon>0$，都存在对应的正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$\rho(a_n,a_0)<\varepsilon$$

则我们称点列 a_n 收敛于 a_0，称 a_0 是点列 a_n 的极限，记作 $a_n\to a_0$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_0$，

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_0$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}d(a_n,a_0)=0$

极限的定义，若用集合论的术语来叙述，便是：对任意的 $\varepsilon>0$，都存在对应的正整数 N，使当 $n>N$ 时

$$a_n\in \text{点集}\{x:\rho(x,a_0)<\varepsilon\}\subset U$$

则称点 a_0 是点列 a_n 的极限。

上述在 U 中的点集

$$\{x:\rho(x,a_0)<\varepsilon\}$$

我们称它为：以点 a_0 为心，ε 为半径的开球，又叫作点 a_0 的 ε 邻域，简记作 $O(a_0,\varepsilon)$。称 $O(0,1)$ 为单位球，其中 0 是 U 中零元。

为讨论“球”的几何意义，我们以单位球作例。

$\mathbf{R}$ 中的单位球 $O(0,1)$，显然是对称开区间 $(-1,1)$。$\mathbf{R}^2$ 中的单位球 $O(0,1)$，为平面上的单位圆 $x_1^2+x_2^2<1$（其中 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$）。$\mathbf{R}^3$ 中的单位球 $O(0,1)$，才是真的单位球 $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$（其中 $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$）。$\mathbf{R}^4$ 中的单位球 $O(0,1)$ 是 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2<1$（其中 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4$），它不再有几何直观。

在 $\mathbf{R}^2$ 中，距离若按(6)式来定义，此时的单位球则为

$$O(0,1) = \{x : d(x,0) < \varepsilon, x \in \mathbf{R}^2\}$$
$$= \{x : x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \max(|x_1|, |x_2|) < 1\}$$
$$= \{x : x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$$

它表示图 0－2 中的正方形内部(不包含边界)。

在集合 $C[0,1]$ 中,距离按(5)式定义时,其中单位球为

$$O(0,1) = \{x : x = x(t) \in C[0,1], \max_{t \in [0,1]} |x(t)| < 1\}$$

这个单位球的球心 0,是集合 $C[0,1]$ 当中的零元,即函数 $x(t) \equiv 0, t \in [0,1]$。单位球是包含在图 0－3 中矩形中连续曲线①的全体。

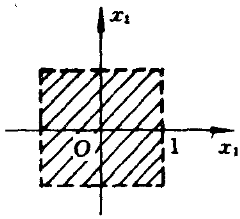

图 0－2

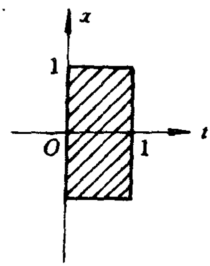

图 0－3

以上诸例表明,为描述一定点的邻域所用的"球",再也不能从几何直观上去理解它的含意了,它不是真的球。球这个抽象概念,含有比它在高等数学中更为丰富的内容。

0.1.2 映射

除点集之外,映射也是本课程的一个基本概念与研究对象。

在高等数学里,一元函数的定义域与值域都是实数域 $\mathbf{R}$ 或是

① 仔细地说,这里所指的连续曲线,是指与单值的连续函数(而不是多值函数)相对应的曲线。这种曲线的两端点,分别在直线 $t = 0$ 及直线 $t = 1$ 上,曲线与坐标线 $t = C(0 \leqslant C \leqslant 1)$ 只相交一个(而不是多个)点。