

应用泛函分析基础

(含实分析初步)

(工科硕士研究生用)

周肇锡 徐学雷 张学林 编著

西北工业大学出版社

应用泛函分析基础

(含实分析初步)

(工科硕士研究生用)

周肇锡 徐学雷 张学林 编

西北工业大学出版社

1996年4月 西安

(陕) 新登字 009 号

【内容简介】 应用泛函分析基础, 作为现代数学理论基础课, 是工科研究生的一门很重要的课程。本书是这门课程的教材。主要内容是: 度量空间、赋范空间、内积空间的基本概念、基本理论及重要应用。本书前身是使用很多年的同名讲义。

本书特点是: 起点低, 叙述较细致, 例题较多; 对诸如映射、 L 测度、 L 积分等衔接内容, 都作了补充。因此凡具有高等数学基础的读者, 都可学习本书。

本书适用于各专业的读者。

应用泛函分析基础

(含实分析初步)

(工科硕士研究生用)

周肇锡 主编

责任编辑 蒋相宗

责任校对 钱伟峰

*

©1996 西北工业大学出版社出版发行

(710072 西安市友谊西路 127 号 电话 4253407)

陕西省新华书店经销

西北工业大学出版社印刷厂印装

ISBN 7-5612-0828-6/O·115

*

开本: 850×1168 毫米 1/32 印张: 10.75 字数: 261 千字

1996 年 4 月第 1 版

1996 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1—1 000 册

定价: 12.00 元

购买本社出版的图书, 如有缺页、错页的, 本社发行部负责调换。

编 者 说 明

本课程是为工科有关专业研究生开设的一门数学理论基础课。总共 60~70 学时。

我校从 1981 年秋开始开设这门课，至今已 14 届。本书前身是自编的油印讲义（1984 年 12 月）与其修订稿——1988 年 3 月出版的胶印讲义。现又经少量删节、补充、修改，基本内容未变。习题及习题解答，因已另印成册，没有再附入本书。

选修本课程的工科硕士研究生，大多数仅有工科大学的高等数学基础，与数、理专业硕士研究生学习泛函分析课程的起点很不同，因此很有必要补充诸如线性空间、数学分析理论、实函数论中的某些基础内容。

本书以三大空间的基本概念、基本理论及某些重要的应用作为主要内容。

对选入本书的内容，编者都力图写得详尽仔细，以期更适合复习及自学。

本书的第一章中 § 1.2 及第二章，编者曾作为工科本科生（二、三、四年级）的选修课程实分析初步的教材，用过 5 遍。编者曾希望通过这门选修课，使学生们在大学阶段（而不是推迟到研究生学习阶段）便能提高一些除了演算之外的能力，如：抽象思维能力、推理论证能力以及分析水准。

在本书付印之际，我们要感谢曾经给编者以指导帮助的赵根榕教授、王成堂教授、郑维行教授，曾提供过部分初稿的俞达先

生以及所有曾使用过原讲义并提出意见的老师及学生们。

我们诚挚地欢迎各位读者的意见与批评，以便再版时更正。

编 者

1995 年元月于西北工业大学

目 录

引论	1
§ 0.1 一个高等数学命题的扩充	1
0.1.1 集合与距离	1
0.1.2 映射	6
0.1.3 泛函分析与高等数学某些方面的粗略比较	9
0.1.4 一个高等数学命题的抽象	11
0.1.5 抽象命题应用的一例	17
§ 0.2 一个几何命题的扩充	19
0.2.1 内积与距离	19
0.2.2 函数的最佳逼近问题	21
0.2.3 最佳逼近三角多项式	23
第一章 集合、映射与线性空间	25
§ 1.1 集合运算	25
1.1.1 集合概念	25
1.1.2 备用记号	26
1.1.3 集合运算的定义	27
1.1.4 运算法则	29
1.1.5 笛卡尔积概念	31
§ 1.2 无限集的势	32
1.2.1 集的对等概念	32
1.2.2 可列集	33
1.2.3 势 c 集	36

§ 1.3 映射	38
1.3.1 映射概念	38
1.3.2 映射基本性质	41
1.3.3 复合映射与逆映射	42
1.3.4 逆映射与算子方程的解	48
§ 1.4 矢量空间	48
1.4.1 矢量空间的概念	48
1.4.2 线性组合与线性相关	51
1.4.3 矢量空间的生成与基	53
§ 1.5 线性变换	56
1.5.1 线性变换概念	56
1.5.2 非奇线性变换	59
1.5.3 有限维空间上的线性变换与矩阵	60
第二章 实分析基础	63
§ 2.1 实数连续性与完备性	63
2.1.1 实数连续性概念	63
2.1.2 实数连续性等价命题	68
2.1.3 实数完备性及其应用	71
§ 2.2 闭区间上连续函数的性质	79
2.2.1 有界性定理、最值与介值定理	79
2.2.2 一致连续性	82
2.2.3 一致收敛概念	87
§ 2.3 点集及测度	90
2.3.1 开集及其测度	90
2.3.2 聚点性质、闭包及稠密	94
2.3.3 闭集及其测度	97
2.3.4 可测集	101

§ 2.4 可测函数	108
2.4.1 可测函数概念	108
2.4.2 可测函数性质	110
2.4.3 可测函数与连续函数的关系	113
2.4.4 测度收敛概念	115
§ 2.5 勒贝格积分	116
2.5.1 黎曼积分概念	116
2.5.2 测度有限的集上的函数的勒贝格积分	121
2.5.3 无穷测度集上的函数的勒贝格积分	127
2.5.4 勒贝格积分的性质	128
第三章 度量空间	134
§ 3.1 度量空间概念	135
3.1.1 几个不等式	135
3.1.2 度量空间定义	141
3.1.3 常见的度量空间	142
§ 3.2 度量空间的拓扑性质	148
3.2.1 开集与闭集	149
3.2.2 连续与一致连续	153
3.2.3 度量空间中的收敛	156
§ 3.3 完备性概念	162
3.3.1 本来列概念	162
3.3.2 常见的完备空间	165
3.3.3 度量空间的完备化	170
3.3.4 完备性的等价命题	172
§ 3.4 压缩映射原理及其应用	174
3.4.1 压缩映射原理	174
3.4.2 线性方程组的迭代解法	179

3.4.3	一阶常微分方程解的存在唯一性定理	183
3.4.4	压缩映射原理在积分方程求解时的应用	185
§ 3.5	可分性概念	189
3.5.1	稠密概念	189
3.5.2	可分性	193
3.5.3	不可分的完备空间	194
§ 3.6	列紧性与紧性	195
3.6.1	全有界	195
3.6.2	列紧性	197
3.6.3	列紧的表现	202
3.6.4	紧集	203
3.6.5	紧集上连续泛函的性质	206
第四章	赋范空间与 Banach 空间	209
§ 4.1	线性赋范空间基本概念	209
4.1.1	线性赋范空间定义	210
4.1.2	赋范空间与距离空间关系	211
4.1.3	赋范空间的例	214
4.1.4	赋范空间基本性质	215
§ 4.2	有限维赋范空间与子空间	218
4.2.1	完备性定理	218
4.2.2	范数等价定理	219
4.2.3	紧性	220
§ 4.3	线性有界算子	221
4.3.1	线性算子与有界算子定义	222
4.3.2	线性有界算子的条件	224
4.3.3	算子范数的定义	224
4.3.4	求线性有界算子范数的例	226

4.3.5 有限维空间上的线性算子	231
§ 4.4 线性连续算子空间	232
4.4.1 线性算子的连续性与有界性	233
4.4.2 连续算子空间	235
4.4.3 算子列的收敛	238
4.4.4 赋范空间中级数的收敛与绝对收敛	239
4.4.5 连续算子空间中算子级数的收敛与绝对收敛	241
4.4.6 下有界算子与逆算子	247
§ 4.5 线性有界泛函与共轭空间	249
4.5.1 线性有界泛函的表现形式	250
4.5.2 共轭空间的概念	251
§ 4.6 有界线性算子的谱	252
4.6.1 特征值与特征向量	253
4.6.2 有界线性算子的正则点与谱点	261
4.6.3 谱的性质	265
§ 4.7 赋范空间中的最佳逼近	268
4.7.1 最佳逼近问题	268
4.7.2 $C[a, b]$ 中最佳逼近的存在唯一性	271
4.7.3 Chebyshev 多项式	274
第五章 内积空间与 Hilbert 空间	277
§ 5.1 内积空间基本概念	277
5.1.1 内积定义	277
5.1.2 内积基本性质	283
§ 5.2 正交分解与投影定理	287
5.2.1 正交与正交补	288
5.2.2 向量投影与正交分解	290
5.2.3 投影定理与极值问题	292

§ 5.3 投影定理应用实例	296
5.3.1 三角多项式的最佳逼近	296
5.3.2 最小二乘法	298
§ 5.4 内积空间中的正交系	299
5.4.1 单位正交系与广义 Fourier 级数	299
5.4.2 正交系的完全性与完备性	304
5.4.3 三角函数系的完全性及其应用	308
5.4.4 Gram-Schmidt 正交化方法	314
5.4.5 Legendre 多项式	316
5.4.6 Hermite 多项式	320
5.4.7 Laguerre 多项式	323
§ 5.5 共轭空间与共轭算子	324
5.5.1 连续线性泛函的表示	324
5.5.2 共轭空间	326
5.5.3 共轭算子	327
参考书目	333

引 论

引论粗浅地介绍泛函分析理论中几个基本概念,并通过实例介绍本课程中某些基本思想。我们提前(而不是照惯例按部就班地)介绍这些概念与问题的目的是:

(1) 使读者尽早了解本课程的梗概(即使是很皮毛的),从而提高学习兴趣。

(2) 使读者初步了解本课程中的抽象概念都有其丰富的实际背景,但抽象概念本身却不能由直观(尤其是几何直观)去理解。

(3) 使读者初步了解,正是由于本课程的高度抽象性,才有可能实现其在各方面的应用。

学习引论只需高等数学基础以及少许工程数学与数学分析知识。作为引论,叙述上作不到周全准确;但这些并不会妨碍我们的预期目的。

引论内容相对于以后各章来说是独立的,并不成为以后各章的基础,所以读者对引论的领会程度,并不会妨碍我们今后的学习。读者也可以从第一章学起。

§ 0.1 一个高等数学命题的扩充

本节我们先扩充距离概念,然后将一个微积分命题扩充为一般情况,再讨论应用。

0.1.1 集合与距离

1. 集合概念

集合是数学中的一个基本概念。这个概念像数学中其他原始概念(诸如:数、点、直线等等)一样,无法精确定义;这并不妨碍我们去理解它。

集合中的成员,可以称之为“元”或“元素”或“点”。我们也常把集合称作为“点集”。

集合论创始人康脱(G. Cantor)说:一个集合是“在我们直觉上或思想上,确定的和不同的对象的一个总体”。这表明,一个点集,有两个主要属性。一个是:该点集必须是“确定的”;必须能够明确判定,世界万物中,哪一个在该点集内,哪一个不在该点集内。另一个是:一个点集中的各个点(即元素,下同)必须是“不同的”,彼此互异的。

例如实数 $a_n = (-1)^n$, ($n = 1, 2, \dots$), 它作为点列,是按规定顺序: $-1, 1, -1, 1, \dots$ 排列着的无穷多个点,但它不是一个集合。任何点列,都不是点集;点集中的两点,无需有前后之分。上述点列所对应的点集,是一个由两点构成的点集 $\{1, -1\}$ 。

2. 本课程中常见的点集

实数空间 $\mathbf{R}$

$\mathbf{R}^n$ 空间

$$\mathbf{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

其中 n 为确定的正整数, $n > 1$ 。

数列空间 l^2

$$l^2 = \left\{ x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots); \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty \right\}$$

$$x_i \in \mathbf{R} \text{ or } \mathbf{C}, \quad i = 1, 2, \dots$$

其中 $\mathbf{C}$ 表示复数集合,下同。

连续函数空间 $C[a, b]$

$C[a, b] = \{x : x = x(t) \text{ 为定义在区间 } [a, b] \text{ 上的连续函数}\}$
 勒贝格平方可积函数空间 $L^2[a, b]$

$L^2[a, b] = \{x : x = x(t) \text{ 为定义在 } [a, b] \text{ 上勒贝格平方可积函数}\}$

其中勒贝格平方可积函数的定义,我们将在第二章中给出。

以后我们若说“点 $x \in \mathbf{R}^4$ ”,是指,“ x 是 $\mathbf{R}^4$ 中的一个点”,即“ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$; 其中 $x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3, 4$ ”。同样,若说“点 $x \in C[a, b]$ ”,是指“ $x = x(t)$ 是点集 $C[a, b]$ 中的一个点”,意思是指“ $x = x(t)$ 是一个定义在 $[a, b]$ 上的连续函数”。

由此可知,集合中的点,并不一定是“几何上的点”;所谓点集,也不一定是“几何上的点的集合”。“点集”是个高度抽象的概念,它包含着比“点(几何上的)集”远为丰富的内容。康脱所说的集合的“确定”性,可以是“直觉上”的,也可以不是直觉上的而是“思想上”的就是这个意思。

3. 两点间的距离

实轴上两点 $x, y \in \mathbf{R}$ 之间的距离(我们用 $d(x, y)$ 表示),是用其差的绝对值来计算

$$d(x, y) = |x - y| \quad (1)$$

欧氏平面上两点 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ 之间的距离(我们也用 $d(x, y)$ 来表示距离,下同),计算方法为

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (2)$$

相类似, $\mathbf{R}^n$ 中两点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 与 $y = (y_1, \dots, y_n)$ 之间的距离可定义为

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (3)$$

同样, l^2 中两点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ 之间的距离,可定义为

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2} \quad (4)$$

$C[a, b]$ 中两点 $x = x(t)$ 与 $y = y(t)$ 之间的距离, 是不是可以像 $\mathbf{R}$ 中那样, 也定义作它们之间的差的绝对值 $|x(t) - y(t)|$ 呢? 显然是不行的。因为它不是一个定数, 而是 t 的函数。但距离可定义作

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| \quad (5)$$

它的几何意义如图 0-1 所示, 表示两条曲线间纵坐标差的绝对值之最大值。

由上述诸例可知, 本课程中所谓两点 x, y 之间的距离 $d(x, y)$, 虽然也起着几何里“长度”的概念所起的类似作用, 可以刻划两点的差别是多少, 但我们已不能再用几何直观去理解这个新概念了。距离, 这个抽象概念, 包含了比“距离(几何上的)”更为丰富的内容。

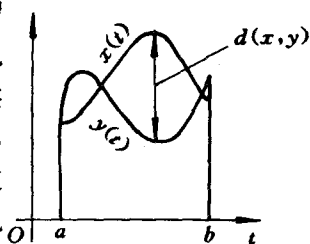


图 0-1

以上距离(1)、(2)、(3)、(4)、(5), 所存在的点集不同, 具体含义也各不相同, 但它们都满足以下四条公理(我们称之为距离公理):

- (a) 非负性 $d(x, y) \geq 0$
- (b) 对称性 $d(x, y) = d(y, x)$
- (c) 三角不等式 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
- (d) $d(x, y) = 0$ 的充要条件是: $x = y$

其中 x, y, z 为确定的空间中的任意点。

一般地, 在确定集合 U , 若有一个二元函数 $d(x, y)$ (其中 $x, y \in U$), 具有上述四条性质的, 都可以定义作距离。这表明, 在确定集合中, 距离的定义方法并不是唯一的。例如在 $\mathbf{R}^2$ 中, 距离也可以定义为

$$d(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|) \quad (6)$$

其中 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$. 请读者自己验证, 它满足距离四公理。

4. ϵ 邻域与单位球

设集合 U 中任意两点 $x, y \in U$ 的距离定义为 $d(x, y)$. 我们仿照高等数学中定义数列极限的办法, 来定义集合 U 中点列 $a_n \in U (n = 1, 2, \dots)$ 的极限. 若存在一定点 $a_0 \in U$, 使得对任意正数 $\epsilon > 0$, 都存在对应的正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$\rho(a_n, a_0) < \epsilon$$

则我们称点列 a_n 收敛于 a_0 , 称 a_0 是点列 a_n 的极限, 记作 $a_n \rightarrow a_0$, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$,

显然, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ 的充要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a_0) = 0$

极限的定义, 若用集合论的术语来叙述, 便是: 对任意的 $\epsilon > 0$, 都存在对应的正整数 N , 使当 $n > N$ 时

$$a_n \in \text{点集} \{x : \rho(x, a_0) < \epsilon\} \subset U$$

则称点 a_0 是点列 a_n 的极限。

上述在 U 中的点集

$$\{x : \rho(x, a_0) < \epsilon\}$$

我们称它为: 以点 a_0 为心, ϵ 为半径的开球, 又叫作点 a_0 的 ϵ 邻域, 简记作 $O(a_0, \epsilon)$. 称 $O(0, 1)$ 为单位球, 其中 0 是 U 中零元。

为讨论“球”的几何意义, 我们以单位球作例。

$\mathbf{R}$ 中的单位球 $O(0, 1)$, 显然是对称开区间 $(-1, 1)$. $\mathbf{R}^2$ 中的单位球 $O(0, 1)$, 为平面上的单位圆 $x_1^2 + x_2^2 < 1$ (其中 $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$). $\mathbf{R}^3$ 中的单位球 $O(0, 1)$, 才是真的单位球 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ (其中 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$). $\mathbf{R}^4$ 中的单位球 $O(0, 1)$ 是 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 1$ (其中 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$), 它不再有几何直观。

在 $\mathbf{R}^2$ 中, 距离若按 (6) 式来定义, 此时的单位球则为

$$\begin{aligned}
 O(0,1) &= \{x: d(x,0) < \varepsilon, x \in \mathbf{R}^2\} \\
 &= \{x: x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \max(|x_1|, |x_2|) < 1\} \\
 &= \{x: x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, |x_1| < 1, |x_2| < 1\}
 \end{aligned}$$

它表示图 0-2 中的正方形内部(不包含边界)。

在集合 $C[0,1]$ 中,距离按(5)式定义时,其中单位球为

$$O(0,1) = \{x: x = x(t) \in C[0,1], \max_{t \in [0,1]} |x(t)| < 1\}$$

这个单位球的球心 0, 是集合 $C[0,1]$ 当中的零元, 即函数 $x(t) \equiv 0, t \in [0,1]$ 。单位球是包含在图 0-3 中矩形中连续曲线^①的全体。

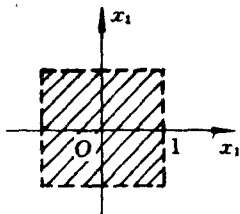


图 0-2

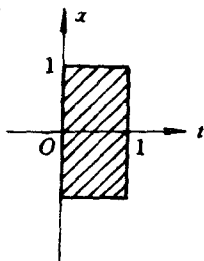


图 0-3

以上诸例表明,为描述一定点的邻域所用的“球”,再也不能从几何直观上去理解它的含意了,它不是真的球。球这个抽象概念,含有比它在高等数学中更为丰富的内容。

0.1.2 映射

除点集之外,映射也是本课程的一个基本概念与研究对象。

在高等数学里,一元函数的定义域与值域都是实数域 $\mathbf{R}$ 或是

^① 仔细地说,这里所指的连续曲线,是指与单值的连续函数(而不是多值函数)相对应的曲线。这种曲线的两端点,分别在直线 $t=0$ 及直线 $t=1$ 上,曲线与坐标线 $t=C(0 \leq C \leq 1)$ 只相交一个(而不是多个)点。