国家教委中等专业学校规划教材

财经类专业通用

数 学

（第三版） 第三册

财经类中专数学教材编写组 编

高等教育出版社

数 学

国家教委中等专业学校规划教材
财经类专业通用

数学

（第三版）

第三册

财经类中专数学教材编写组 编

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数所据

数学　第三册/财经类中专数学教材编写组编. —3版. —北京:高等教育出版社,1997

ISBH 7-04-005916-9

Ⅰ.数…　Ⅱ.财…　Ⅲ.高等数学-专业学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第02231号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街55号

邮政编码：100009　传真：64014048　电话：64054588

新华书店上海发行所发行

兰州八一印刷厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张8.375　字数214 000

1988年4月第1版

1997年7月第3版　1997年7月第1次印刷

印数0001—184994

定价8.40元

内 容 提 要

本书是根据国家教育委员会 1987 年审定的财经类专业通用《中等专业学校数学教学大纲》编写的. 全书共分四册出版. 第三册内容为微积分. 书末附学习指导，它按教材章次，分章对应编写，每章包括内容提要、学习辅导、自我检查题等三部分.

本书由全国中专数学课程组组织审阅，并定为招收初中毕业生的中等专业学校财经类各专业的教材.

序　言

本教材是根据1987年国家教育委员会审定的财经类专业通用的《中等专业学校数学教学大纲》编写的.

本教材共分四册:

第一册　集合,函数,三角函数,反三角函数简介;

第二册　*立体几何,解析几何,排列组合与二项式定理,数列;

第三册　微积分;

第四册　行列式与矩阵,*投入产出简介,*线性规划,概率初步,*数理统计.

本教材可供招收初中毕业生财经类各专业使用,第三、四册也可供招收高中毕业生的财经类各专业选用,带*的内容可供选学.

本教材是由国家教育委员会组织的财经类中专数学教材编写组编写的.编写组由南京铁路运输学校沈清任主编,参加编写的有上海银行学校姚叠叁、北京供销学校贝虹,其中第一、二册由贝虹编写,第三册由姚叠叁编写,第四册由沈清编写.

第二版教材附有学习指导,其中包括内容提要、学习辅导及自我检查题,供学生学习时参考.

第三版教材修订时,执行了《量和单位》及出版方面的国家标准.在第四册中增加了"一般线性方程组"一节.

本教材修订后仍难免有错误和不当之处,恳切希望广大读者批评指正.

财经类中专数学教材编写组

1996年8月

责任编辑 徐　可
封面设计 王　雎、刘晓翔、季思九
责任绘图 尹文君
版式设计 王艳红
责任校对 朱　莹
责任印制 潘高峰

目　　录

第十二章　极限与连续

极限是数学中一个重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上描述极限的定义，讨论它的性质和运算法则.

对于函数的连续性，只作比较直观的介绍.

§12－1　函　　数

一　函数的概念

在许多实际问题中，量往往不是孤立地存在着的，一些变量之间相互联系、相互制约，存在着确定的对应关系. 我们已经学习过描述两个变量间关系的函数知识，下面用集合的观念再次给出函数的定义：

定义　设 D 是一个实数集，如果对属于 D 的每一个数 x，按照某个对应规则 f，都有唯一确定的数值 y 和它对应，那么 f 就叫做定义在数集 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 叫做自变量，y 叫做函数 f 在 x 处的值. 数集 D 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域；当 x 遍取 D 中的一切实数值时. 与它对应的函数值的集合 M 叫做函数 $y=f(x)$ 的值域.

例如某地区薄板钢材第一年到第八年的消费方程为

$$y = 150 + 40x,$$

其中 y 表示消费量（单位：kt），x 表示时序数（即第几年）. 显然 y 就是 x 的函数，这个函数的定义域 $D=\{1, 2, \cdots, 8\}$，对应规则是 $y=150+40x$.

又如某运输公司规定每吨货物的运费，当运输里程不超过 100km 时，每 km 运费 5 元，若超过 100km，其超过部分每 km 运费 4 元. 若用 y 表示每吨货物的运费（单位：元），x 表示运输里程

(单位：km)，则每吨货物的运价方程为：

$$y=\begin{cases}5x, & 0\leqslant x\leqslant 100;\\ 500+4(x-100), & x>100.\end{cases}$$

这里的 y 也是 x 的函数，这个函数的定义域 $D=\{x\mid x\geqslant 0\}$，对应规则如上面的式子.

有时自变量 x 在定义域 D 中取不同数值时，所对应的 y 值保持不变，根据函数的定义，y 仍是 x 的函数，一般地写成

$$y=C\quad (C\text{ 是常数}).$$

前面学过，函数的对应关系通常可用列表法、图象法或解析法表示，这些方法在财经工作中广泛应用.

例如，价目表、利息表和许多会计报表，都是利用表格反映函数的对应关系. 下面是某基层商店向中心店汇报上旬营业情况的旬报表：

日　　期	销售金额(单位：元)
1	4 156.28
2	4 726.19
⋮	⋮
10	6 112.06

这个表格就是用**列表法**表示函数关系的例子.

用**解析法**表示两个经济量之间的函数关系，便于利用相应的数学方法进行研究，可以比较全面地反映出两个经济量之间的内在联系. 这种函数解析式，在经济学中也叫做**经济方程**. 例如，某地箱版纸在最近 14 年的销售规律

$$y=9e^{0.1x}$$

就是一种经济方程，其中 y 是销售量(单位：kt)，x 是时序数. 通过这个方程就可以对箱版纸的销售情况有比较全面的了解，也便于对它作出定量分析.

图象法具有比较直观的特点. 财经工作中常常通过经济函数

的解析式或直接根据观测所得的数据绘成图象.如图12-1所表示的是某化工产品的产量(y)与原料投放量(x)之间的函数关系.

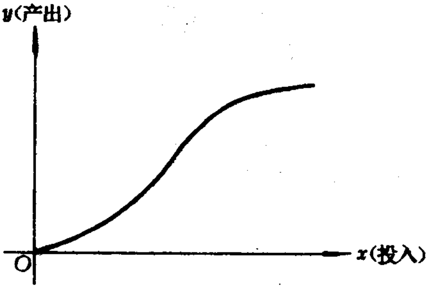

图 12-1

二　函数的定义域

当我们研究函数时,必须注意函数的定义域.

在实际问题中,应根据问题的实际意义来确定定义域;对于用数学式子表示的函数,求定义域的一般方法是求出使解析式有意义的x的集合.例如

(1) 在分式中,应使分母不为零;

(2) 在偶次根式中,被开方数不为负数;

(3) 在对数式中,真数不能为零和负数;

(4) 在反三角函数式中,要符合反三解函数的定义域;

(5) 若函数表达式中含有分式、根式、对数式、反三角函数式等等,则应取各部分定义域的交集.

例1 求下列函数的定义域(用区间表示):

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+3}$;

(2) $y=\ln(2-\ln x)$.

解 (1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+3}$.

$\because\ \begin{cases}4-x^2\neq 0;\\ x+3\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\neq\pm 2;\\ x\geqslant -3.\end{cases}$

$\therefore$ 函数的定义域为$[-3,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) $y=\ln(2-\ln x)$.

$\because\ \begin{cases}2-\ln x>0;\\ x>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\ln x<2;\\ x>0.\end{cases}$ 得:$0<x<e^2$.

∴ 函数的定义域为$(0, e^2)$.

例 2 某地箱板纸在 14 年中的销售量 y(单位:kt)是时序数 x(单位:年)的函数

$$y = 9e^{0.1x}$$

试求它的定义域.

解 指数函数 $y=9e^{0.1x}$的定义域是$(-\infty, +\infty)$,但根据这个问题的具体意义,它的定义域应该缩小为

$$\{1, 2, 3, \cdots, 14\}.$$

函数的定义域是确定函数的一个重要因素,只有两个函数的对应关系相同并且定义域相同时,两个函数才等同.

三 建立函数关系的例题

例 3 某工厂生产人造钻石,年产量为 $x$kg,其固定成本为 312 万元,每生产 1kg 人造钻石,可变成本均匀地增加 50 元,试将总成本 $C_{总}$(单位:元)和平均单位 kg 成本 $C_{均}$(单位:元/kg)表示成产量 x(单位:kg)的函数.

解 由于总成本=固定成本+可变成本,

平均成本=总成本÷产量,所以

$$C_{总} = 3\ 120\ 000 + 50x;$$

$$C_{均} = \frac{3\ 120\ 000 + 50x}{x} = \frac{3\ 120\ 000}{x} + 50.$$

例 4 某药厂生产某种药品,年产量 x 万瓶,每瓶售价 2 元.根据历史资料,该厂每年自销量稳定在 50 万瓶,如果委托代销,销售量可上升 20%,但销售量达 60 万瓶时即呈饱和状态.如果代销费为代销部分药价的 40%,试将总收入 R(单位:万元)表示成年产量 x(单位:万瓶)的函数.

解 如果该厂产量不超过 50 万瓶时,生产的产品可以全部自销售出,这时

$$R = R(x) = 2x.$$

如果该厂产量超过 50 万瓶而不超过 60 万瓶时，通过委托代销，也能全部售出，但此时需支付代销费 $2\times40\%\times(x-50)$万元，这时

$$\begin{aligned}R &= R(x) = 2x - 2\times40\%\times(x-50)\\&= 1.2x + 40.\end{aligned}$$

如果该厂产量超过 60 万瓶时，即使委托代销，也只能售出 60 万瓶，这时

$$R = R(x) = 1.2\times60 + 40 = 112.$$

综上所述，得到总收入 R 与年产量 x 的函数解析式为

$$R=R(x)=\begin{cases}2x & (0\leqslant x\leqslant50);\\1.2x+40 & (50<x\leqslant60);\\112 & (x>60).\end{cases}$$

*__建立经验公式方法简介__(平均值法)：

在财经工作中，有许多变量间的关系不能精确地用函数解析式表示，而是根据观测所得的数据(简称观测数据)，用归纳或其他方法，得到近似描述它们间依从关系的公式. 一般把这种公式叫做**经验公式**(有的地方叫做**数学模式**). 建立经验公式的方法很多，下面的例子所介绍的是一种比较简单的方法.

***例 5**　全国有十二家工厂生产某种无机颜料，近十年的总产量 y 如下表所列：

x/年	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y/kt	41	45	48	51	56	58	60	63	69	70

试建立产量和时序数之间的经验公式.

解　假设时序数为 x，产量为 y(单位：kt)，根据上表所给出的数据在直角坐标系中作出图形(图 12－2). 这图形是一群散点，它们的位置近似地在一条直线上，也就是说，产量 y 可以大致看成是时序数 x 的一次函数，设这个函数的解析式是

$$y = kx + b.$$

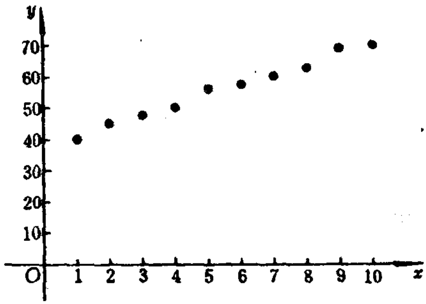

图 12-2

为了能比较准确地找出系数 k 和 b 的值，我们按照时序数的奇偶分成两组，分别代入 $y=kx+b$ 得：

$$41=k+b,\quad 45=2k+b,$$
$$48=3k+b,\quad 51=4k+b,$$
$$56=5k+b,\quad 58=6k+b,$$
$$60=7k+b,\quad 63=8k+b,$$
$$69=9k+b,\quad 70=10k+b,$$

把左、右两列分别相加，得到两个关于 k 和 b 的二元一次方程，将它们联立得

$$\begin{cases}274=25k+5b,\\287=30k+5b,\end{cases}$$

解此方程组，得

$$k=2.6,\quad b=41.8.$$

这样，就近似地得到总产量和时序数之间的关系式是

$$y=2.6x+41.8.$$

这就是一个经验公式. 这种建立经验公式的方法叫做**平均值法**.

四　函数的四个主要性质：

1. 函数的奇偶性

定义　如果函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对其中的任意 x，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则 $y=f(x)$ 叫做**偶函数**；

如果 $$f(-x)=-f(x),$$

则 $y=f(x)$ 叫做**奇函数**.

不难验证在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 是偶函数；函数 $\varphi(x)=x^3$ 是奇函数.

对于偶函数，因为在 x 和 $-x$ 处对应的函数值是相等的，所以图形关于 y 轴对称. 见图 12－3.

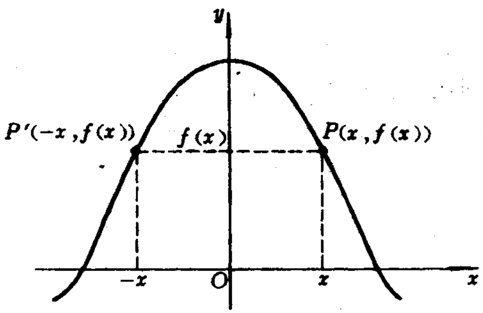

图　12－3

对于奇函数，因为在 x 和 $-x$ 处对应的函数值绝对值相等，符号相反，所以图形关于原点对称. 见图 12－4.

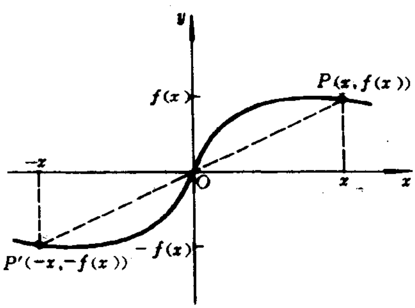

图　12－4

不满足偶函数和奇函数定义的函数叫做非奇非偶函数. 例如函数

$$y = x^2 + x + 1,\ y = e^x$$

等都是非奇非偶函数,它们的图象关于 y 轴和原点都不对称.

2. 函数的增减性

定义 给定函数 $y=f(x)$,(a, b)是函数定义域内的某一区间,对于区间(a, b)内的任意两点 x_1, x_2,当 $x_1<x_2$ 时,

如果 $f(x_1)<f(x_2)$,则说 $f(x)$在区间(a,b)内是**单调递增**的;

如果 $f(x_1)>f(x_2)$,则说 $f(x)$在区间(a,b)内是**单调递减**的;

上述定义也适用于其他有限区间或无限区间的情形. 单调递增的函数,它的图象自左至右渐渐上升(见图 12-5);单调递减的函数,它的图象自左至右渐渐下降(见图 12-6).

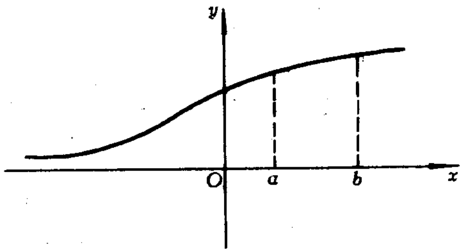

图 12-5

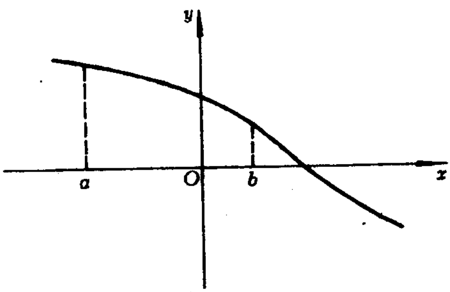

图 12-6