文都教育考研精品系列

文都教育

2006 考研数学秘诀

考研名师的扛鼎之作
揭开数学的神秘面纱

37诀

数学二

主编：叶盛标

□ 清华大学
□ 同济大学
□ 上海交通大学
……
□ 吉米多维奇：《数学分析习题集》

新华出版社

文都教育

2006

考研数学秘诀

数学二37诀

主　编：叶盛标

策　划：文都考研信息中心

新华出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学秘诀/叶盛标主编．—北京：新华出版社，2005.4

ISBN 7—5011—7012—6

Ⅰ．考...　Ⅱ．叶...　Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 021299 号

编　　者：叶盛标

责任编辑：王子予

出版发行：新华出版社

地　　址：北京石景山区京原路 8 号

邮政编码：100043

印　　刷：中煤涿州制图印刷厂

开　　本：787×1092 毫米 1/16

印　　张：69.625

版　　本：2005 年 4 月第 1 版　2005 年 4 月第 1 次印刷

印　　数：1—6000 册

书　　号：ISBN 7—5011—7021—6

全套定价：82.00 元

一份辛劳一份才

华罗庚

妙算还从拙中来，
愚公智叟两分开.
日久方显愚公智，
发白才知智叟呆.
埋头苦干是第一，
熟能生出百巧来.
勤能补拙是良训，
一份辛劳一份才.

名　题

——研读考研数学的国题、校题有感

名题留芳千万年，
考了一遍又一遍.
熟读名题三百道，
不是神仙也神仙！

前　言

长期深入研究全国历届考研数学试题（即国题），和 1987 年全国统考之前和之后的全国各高等院校历届考研数学试题（即校题）之后，编者认为，考生在备考过程中必须进行三个方面的研究：一、研究考纲，二、研究国题，三、研究校题．国题集中体现了全国命题小组各位专家的智慧，校题集中体现了全国各高等院校命题小组各位专家的智慧．国题和校题剔除了题海中的偏题、怪题、难题，是题海中的精品．国题与校题互为题源，相映生辉，必须精心研究，避免在茫茫题海中盲目地探索！

本资料收集的主要是按考纲精选的校题，衷心希望对考生的复习起到抛玉引玉的作用！

本资料用秘诀（歌诀）这种独特的为学生所喜闻乐见的形式表达考纲、考点，表达基本概念、基本理论、基本方法，衷心希望对考生的复习起到事半功倍的作用！

编者

2005 年 2 月 8 日

于武昌巡司河畔

E-mail：yeshengbiao233@sina. com

目　　录

第一章　极限与连续

秘诀 1

（极限与连续内容秘诀）

极限连续最重要，

“强行代入”就是好.

零点定理有零点，

保号定理要保号.

秘诀 2

（求极限秘诀）

强行代入，

先定型，

后定法.

● **内容提要**

1. 保函数号定理　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么就存在着点 x_0 的某一去心邻域，当 x 在该邻域内时，就有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

2. 保极限号定理　如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

3. 零点定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

4. 介值定理　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值.

5. 极限存在的两个准则　ⅰ）两边夹准则；　ⅱ）单调有界数列有极限.

6. 两个重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

7. 求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，以 x_0 强行代入 $f(x)$ 之中，若能代，谓之连续，即有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$；若不能代，先定型，后定法．对于数列的极限，同样用这个秘诀．

● **经典例题**

例 1　（中国科学技术大学 1983，北京邮电学院 1985，全国 1996 数一）

设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，　$(n=1,2,\cdots\cdots)$

试证数列$\{x_n\}$有极限，并求此极限.

分析 传统的讲法——先证后求，即先证$\{x_n\}$单调有界，后求极限.

这种讲法由来已久，还将继续延续下去. 因为老师这么样，学生也这么讲，学生的学生也这么讲……

这种讲法无疑是正确的，但也存在困惑：是单调上升？还是单调下降？界在哪儿？

应该是：强行代入，先定型，后定法.

由 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$,

得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}$,

$l=\sqrt{6+l}$,

$l_1=3, l_2=-2$

因 $x_n>0\quad(n=1,2,\cdots)$ 由保极限号定理，$l\geqslant 0$，$l_2=-2$ 应舍去，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

而 $x_1=10$，可见$\{x_n\}\downarrow$，且以 3 为下界.

证 $x_1=10,\quad x_2=\sqrt{6+10}=4<10=x_1$,

假设 $x_k<x_{k-1}$,

则 $\sqrt{x_k+6}<\sqrt{x_{k-1}+6}$,

即 $x_{k+1}<x_k$,

$\therefore \{x_n\}\downarrow$;

再证$\{x_n\}$有界，$x_1=10>3,\quad x_2=4>3$,

假设 $x_k>3$,

则 $x_{k+1}=\sqrt{x_k+6}>\sqrt{3+6}=3$

$\therefore 3$ 为$\{x_n\}$的下界. $\therefore\{x_n\}$为单调有界数列，因而有极限.

令 $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

$\therefore$ 由 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，$\quad\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}$,

得 $l=\sqrt{6+l}$

$l_1=3,\quad l_2=-2$（舍去），$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

是而有秘诀：

秘诀 3

（求由递推公式表达的数列的极限的秘诀 Ⅰ）

数列极限看两头，　　(x_1, x_∞)

看了两头不用愁：

单调有界有极限，

先求后证两步走！

说明 “数列极限看两头”，即看 x_1 和 x_∞. 建议读者研究数列开头的几项和 x_∞，问题便一目了然！

对于例 1,建议读者用电子计算器,按递推公式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$,由 $x_1=10$,计算 $x_2,x_3,\cdots,x_{14},\cdots$,极限过程呈现在计算器的屏幕上,真实,具体,生动,有趣,一定会领悟到数列极限的真谛!

例 2 (吉米多维奇 148[①],复旦大学 1980,湖南大学 1982)

设数列 $x_n \quad (n=1,2,\cdots)$ 是由下列各式 $x_1=a,x_2=b,x_n=\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2} \quad (n=3,4,\cdots)$ 所确定,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析 强行代入,先定型,后定法.

由 $x_n=\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$,

得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$,

$l=\dfrac{l+l}{2},l=l$,求不出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

真是:数列极限看两头,

看不到两头发了愁!

解法 I 当 $a=b$ 时,$\forall n\in N,x_n=a$,显然 $\{x_n\}$ 收敛于 a,当 $a<b$ 时,由于 $x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$ 表示数列 $\{x_n\}$ 中任一项是它的前两项的平均数,所以

$$x_1=a<x_3<x_5<\cdots<x_{2n-1}<x_{2n+1}<b,$$
$$x_2=b>x_4>x_6>\cdots>x_{2n}>x_{2n+2}>a,$$

这说明数列 $\{x_{2n+1}\}$ 与 $\{x_{2n}\}$ 皆单调有界,因而它们都收敛,记

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A,\quad \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=B,$

在等式

$$x_{2n}=\frac{1}{2}(x_{2n-2}+x_{2n-1}),\quad x_{2n+1}=\frac{1}{2}(x_{2n-1}+x_{2n})$$

中分别令 $n\to\infty$ 得

$$B=\frac{1}{2}(B+A),\quad A=\frac{1}{2}(A+B),$$
$$\therefore A=B,\quad \lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

由于

$$x_1+x_2=2x_3,x_2+x_3=2x_4,\cdots,x_{n-2}+x_{n-1}=2x_n,$$

两端分别相加得

$$x_{n-1}+2x_n=x_1+2x_2=a+2b,$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n-1}+2x_n)=3A=a+2b,$$

① 指前苏联数学家吉米多维奇编著的《数学分析习题集》中的第 148 题,下同.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}(a+2b).$$

当 $a > b$ 时，证明是类似的，上面的结论仍真.

解法 Ⅱ $x_2 - x_1 = b - a$,

$$x_3 - x_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_1) - x_2 = -\frac{1}{2}(x_2 - x_1) = -\frac{1}{2}(b-a),$$

$$x_4 - x_3 = \frac{1}{2}(x_3 + x_2) - x_3 = -\frac{1}{2}(x_3 - x_2) = (-\frac{1}{2})^2(b-a),$$

……

$$x_n - x_{n-1} = (-\frac{1}{2})^{n-2}(b-a).$$

$$\therefore x_n - x_1 = [1 + (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})^2 + \cdots + (-\frac{1}{2})^{n-2}](b-a)$$

$$= \frac{1 \cdot \left[1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}\right]}{1 - (-\frac{1}{2})}(b-a) = \frac{2}{3}\left[1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}\right](b-a)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}[x_n - x_1] = \frac{2}{3}(b-a),$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}(b-a) + a = \frac{1}{3}(a+2b).$$

解法 Ⅲ 用相似对角矩阵.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, = A^{n-2}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

而 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0,$

$\therefore \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$

当 $\lambda_1 = 1$ 时

由 $(A - \lambda_1 E)x = 0$,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \therefore x_1 - x_2 = 0, \therefore \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = x_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ 时

由 $(A - \lambda_2 E)x = 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \therefore x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0, \therefore \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2, \\ x_2 = x_2 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \therefore A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\therefore A^{n-2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{n-2} P^{-1}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $n \to \infty, \lim\limits_{n\to\infty} A^{n-2} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a \\ \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a.$$

因而有：

秘诀 4

（求由递推公式表达的数列的极限的秘诀 Ⅱ）

数列极限看两头，　　　　(x_1, x_∞)
看不到两头也不愁：
答案就在题目里，
特例特法乐悠悠！

例 3　（北京工业大学 1983）

试求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right]^n$

解　原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right]^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{-1} = e^{-1}.$$

例 4 （吉米多维奇 142，中国地质大学 2002，华中师范大学）

求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ (0^0)

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\ln\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\cdots\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}=e^{\int_0^1\ln x dx}=e^{-1}$,

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$

例 5 （吉米多维奇 55，华中师范大学 2002）

设$x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$,$(n=1,2,3\cdots)$ 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 $x_n-\dfrac{1}{2}x_n=\dfrac{1}{2}+2\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}+\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]-\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}=0$, $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3.$

例 6 （北京大学 1998，1999）

计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}$ $(a>0)$.

解 ⅰ）当$a\geqslant1$时，$a<\sqrt[n]{1+a^n}\leqslant\sqrt[n]{2a^n}=\sqrt[n]{2}a$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，$\therefore$ 由两边夹法则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}=a$;

ⅱ）当$0<a<1$时，作变换$b=\dfrac{1}{a}$，于是$b>1$.

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\left(\dfrac{1}{b}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b}\cdot\sqrt[n]{1+b^n}=\dfrac{1}{b}\cdot b=1.$

例 7 （吉米多维奇 605，浙江大学 2001）

求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

解 $\because\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\sin^2[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]$

$$=\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1},$$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\sin^2\dfrac{\pi}{2}=1$

例 8　(中国科学院 2000)

求$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}(a\geqslant 0,b\geqslant 0,c\geqslant 0)$.

解　令 $m=\max\{a,b,c\}$,则

$(m^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant(3m^n)^{\frac{1}{n}}$,由两边夹法则,

$\lim\limits_{n\to\infty}(m^n)^{\frac{1}{n}}=m,\lim\limits_{n\to\infty}(3m^n)^{\frac{1}{n}}=m$,

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=m=\max\{a,b,c\}$

例 9　(吉米多维奇 629,国防科技大学 1979)

求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$, $|x|<1$

解　$\because(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$.

上例的特例:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)=2$.

例 10　(北京工业大学 1981,全国 2004 数三,数四)

求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

分析　应用秘诀:强行代入,先定型,后定法.

$\dfrac{1}{0^2}-\dfrac{1}{0^2}$

$=\dfrac{0^2-0^2}{0^4}$

$=\dfrac{(0-0)(0+0)}{0^4}$

$=\dfrac{0-0}{0^3}\cdot\dfrac{0+0}{0}$

$(0-0)$ 可能是比$(0+0)$ 高阶的无穷小,倘若不这样,

或$\dfrac{(0-0)(0+0)}{0^4}=\dfrac{0-0}{0^2}\cdot\dfrac{0+0}{0^2}$,

或$\dfrac{(0-0)(0+0)}{0^4}=\dfrac{0-0}{0}\cdot\dfrac{0+0}{0^3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x\cos x)(x+\sin x\cos x)}{x^4}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x\cos x}{x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}} 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{3x^2}$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{4}{3}.$$

这个题目亦可这样做：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin x\cos^2 x}{x^4} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

接着用洛必达法则，这就浪费了信息资源，计算时要麻烦得多.

请牢记下面的一句名言：

高等数学＋初等数学＝攻无不克，战无不胜！

例 11 （清华大学 1983，全国 1999 数二）

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \qquad (n=1,2,\cdots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

证 由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，故有

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k),(k=1,2,\cdots),$$

因此

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx\right] + f(n) \geqslant 0$$

即数列 $\{a_n\}$ 有下界. 又

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant 0,$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调下降，故由单调有界数列有极限的准则知 $\{a_n\}$ 的极限存在.

例 12 （复旦大学 1984，无锡轻工业学院 1984）

等分区间 $[a,b]$ $(a>0)$，分点为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \Delta x = \frac{b-a}{n},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$.

解 $x_k = a + k\Delta x = a + k\dfrac{b-a}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln[a+\frac{i}{n}(b-a)]}$$

$$= e^{\int_0^1\ln[a+(b-a)x]dx} = e^{\frac{1}{b-a}\int_0^1\ln[a+(b-a)x]d[a+(b-a)x]}$$

$$= e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln u du} = e^{\frac{1}{b-a}[u\ln u-u]\big|_a^b} = e^{\frac{1}{b-a}[b\ln b-a\ln a-(b-a)]}$$

$$= \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}.$$

例 13 (华中工学院 1981)

设 $\alpha > -1$ 为任意实数,求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha+1}/n\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}\right)$$

解 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\alpha+1}\cdot\dfrac{1}{n}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\alpha}\cdot\dfrac{1}{n}} = \dfrac{\int_0^1 x^{\alpha+1}dx}{\int_0^1 x^{\alpha}dx} = \dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}.$

例 14 (北京工业大学 1984)

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{n})(1+\dfrac{2}{n})\cdots(1+\dfrac{n}{n})\right]^{\frac{1}{n}}.$

解 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\right]^{\frac{1}{n}}}$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})} = e^{\int_0^1\ln(1+x)dx}$$

$$= e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}.$$

例 15 (上海交通大学,天津大学,华中工学院,华南工学院,西安交通大学,浙江大学,南京工学院,哈尔滨工业大学 1985)

求 c,以使

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \int_{-\infty}^{c} te^{2t}dt.$$

解 由

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+\frac{c}{x})^x}{(1-\frac{c}{x})^x} = \frac{e^c}{e^{-c}} = e^{2c}.$$