

· 高等学校辅导教材 ·

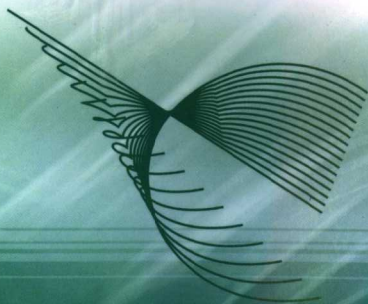
与西安交大编《复变函数》配套

新编复变函数题解

(修订版)

► 孙清华 赵德修

- 知识提要 疑难解析
- 例题解析 习题解析



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

高等学校辅导教材

新编复变函数题解
(修订版)

孙清华 赵德修

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编复变函数题解(修订版)/孙清华 赵德修. -2 版
武汉:华中科技大学出版社,2006 年 2 月
ISBN 7-5609-2385-2

I. 新…

II. ①孙… ②赵…

III. 复变函数-高等学校-教学参考资料

IV. O174.5

新编复变函数题解(修订版)

孙清华 赵德修

责任编辑:徐正达

封面设计:刘 卉

责任校对:朱 霞

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557437

录 排:佳年华科技有限公司

印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32

印张:11

字数:264 000

版次:2006 年 2 月第 2 版

印次:2006 年 2 月第 4 次印刷

定价:15.00 元

ISBN 7-5609-2385-2/O · 222

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是学习复变函数课程的辅导教材,是21世纪高等学校数学系列辅导教材之一.本书按照教育部《关于复变函数课程的基本要求》编写,具有题型多、方法全、覆盖面广、针对性强的特点,非常适合在校大学生与有志学习本门课程人员的需要.

本书与西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》配套,内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射等6章.本书应用解析方法对复变函数的方法、概念与习题进行了讨论、求索、分析、归纳,使读者通过学习本书后能较好地掌握复变函数的思想、方法与技巧.本书以大量的例题解析为读者提供有效的服务,还提供了西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》全书的习题解析.

本书是大学生学习复变函数必备的参考书,也是教学人员的一本很好的教学参考书.

修订版前言

复变函数是高等工科院校的一门重要的数学基础课。复变函数是在实函数的基础上产生和发展起来的,因此它与微积分学的概念、方法有许多相似和联系,但又有许多发展与区别。在今天,复变函数论一方面成为一种重要的解析工具,一方面又给其他学科(如流体力学、空气动力学、弹性理论、电磁学等)提供了一种广泛的几何定性研究的方法。正因为如此,复变函数课程日益引起大家的重视。但是这门课程中概念难懂,习题难做,方法难掌握。本书就是为了帮助大家解决学习中的困难而编写的。

本书按照国家教育部《关于复变函数课程的基本要求》编写,因此特别适合在校大学生和有志学习本门课程的人员的需要。

在本书中,我们用解析方法对复变函数论中的概念与习题作了分析解答,演绎归纳,讨论求索。相信读者在学习本书后一定会受到启发,获得自己需要的知识、方法和解答。

为了满足广大读者的要求,我们在本书中还对西安交通大学编的《复变函数》中的全部习题作了解答,以供读者参阅。

本书修订时改正了第一版中的一些错漏之处。

编 者

2006年1月于武汉

目 录

第1章 复数与复变函数	(1)
1.1 知识提要	(1)
1.1.1 复数的概念	(1)
1.1.2 复数的各种表示法	(1)
1.1.3 复数的代数运算(z_1, z_2 不为零)	(2)
1.1.4 曲线与区域	(2)
1.1.5 复变函数	(3)
1.1.6 复变函数的极限	(3)
1.1.7 复变函数的连续性	(3)
1.2 疑难解析	(4)
1.3 例题解析	(8)
1.3.1 复数的基本概念	(8)
1.3.2 复数的代数运算	(10)
1.3.3 复数的等式与不等式	(12)
1.3.4 关于区域的概念	(17)
1.3.5 复变函数的概念	(19)
1.3.6 其他杂题分析	(25)
1.4 习题解析	(27)
第2章 解析函数	(37)
2.1 知识提要	(37)
2.1.1 复变函数的导数与微分	(37)
2.1.2 解析函数的概念	(37)
2.1.3 判别函数解析的方法	(38)
2.1.4 初等函数及其解析性	(38)
2.2 疑难解析	(40)
2.3 例题解析	(43)

2.3.1	函数可导的概念	(43)
2.3.2	函数解析性的判定	(49)
2.3.3	关于可微与解析的证明	(55)
2.3.4	初等解析函数的运算	(58)
2.3.5	关于初等解析函数的证明	(65)
2.3.6	其他杂题的分析	(67)
2.4	习题解析	(70)
第3章	复变函数的积分	(83)
3.1	知识提要	(83)
3.1.1	光滑有向曲线	(83)
3.1.2	复变函数的积分	(83)
3.1.3	复变函数积分的性质	(84)
3.1.4	复变函数积分的计算	(84)
3.1.5	柯西-古萨(Cauchy-Goursat)定理	(84)
3.1.6	复变函数积分的牛顿-莱布尼兹公式	(85)
3.1.7	复合闭路定理	(85)
3.1.8	柯西积分公式	(86)
3.1.9	高阶导数公式	(86)
3.1.10	调和函数与共轭调和函数	(87)
3.1.11	复势与平面向量场	(87)
3.2	疑难解析	(88)
3.3	例题解析	(93)
3.3.1	沿光滑曲线的复变函数积分	(93)
3.3.2	柯西-古萨基本定理与牛顿-莱布尼兹公式的 应用	(97)
3.3.3	复合闭路定理的应用	(101)
3.3.4	柯西积分公式的应用	(103)
3.3.5	高阶导数公式的应用	(108)
3.3.6	复变函数积分证明题的分析	(115)

3.3.7	复变函数积分的杂题分析	(122)
3.3.8	已知一个调和函数,求共轭调和函数和 解析函数	(126)
3.3.9	关于复势的例题分析	(133)
3.4	习题解析	(137)
第4章	级数	(157)
4.1	知识提要	(157)
4.1.1	复数列的极限	(157)
4.1.2	复数项级数	(157)
4.1.3	幂级数	(158)
4.1.4	解析函数的泰勒级数	(159)
4.1.5	解析函数的洛朗级数	(160)
4.2	疑难解析	(161)
4.3	例题解析	(166)
4.3.1	复数项级数敛散性分析	(166)
4.3.2	幂级数敛散性问题分析	(169)
4.3.3	幂级数证明题分析	(176)
4.3.4	解析函数展开成幂级数的方法分析	(180)
4.3.5	解析函数在圆环域中的洛朗级数	(196)
4.4	习题解析	(205)
第5章	留数	(219)
5.1	知识提要	(219)
5.1.1	孤立奇点的概念	(219)
5.1.2	留数与留数定理	(220)
5.1.3	留数计算、极点处留数的计算规则	(221)
5.1.4	留数在定积分计算上的应用	(222)
*5.1.5	对数留数与对数留数定理	(223)
*5.1.6	辐角原理	(224)
5.2	疑难解析	(225)

5.3	例题解析	(229)
5.3.1	函数奇点类型的确定	(229)
5.3.2	计算函数在孤立奇点处的留数	(234)
5.3.3	关于奇点与留数的证明题	(241)
5.3.4	用留数计算复变函数的积分	(244)
5.3.5	用留数计算定积分	(252)
5.3.6	对数留数与辐角原理应用分析	(262)
5.4	习题解析	(267)
第6章	共形映射	(281)
6.1	知识提要	(281)
6.1.1	共形映射的概念	(281)
6.1.2	共形映射要解决的两类问题	(282)
6.1.3	分式线性映射及其性质	(282)
6.1.4	分式线性映射的确定与应用	(282)
6.1.5	三个重要的分式线性映射	(283)
6.1.6	几个初等函数构成的映射	(284)
*6.1.7	施瓦兹-克利斯托夫(Schwarz-Christoffel) 公式(多角形映射公式)	(284)
6.2	疑难解析	(285)
6.3	例题解析	(289)
6.3.1	共形映射概念分析	(289)
6.3.2	分式线性映射的概念分析	(292)
6.3.3	分式线性映射的确定与映射的图形	(296)
6.3.4	一些初等函数的映射分析	(308)
6.3.5	关于映射的证明题及其他杂题	(320)
*6.3.6	关于多角形映射的分析	(324)
6.4	习题解析	(327)

第1章 复数与复变函数

1.1 知识提要

1.1.1 复数的概念

形如 $z = x + iy$ 的数称为复数, 其中 x, y 为任意实数, i ($i^2 = -1$) 称为虚单位. x, y 又分别称为 z 的实部与虚部, 记作

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

$z = x + iy$ 与直角坐标系平面上的点 (x, y) 成一一对应, 该平面称为复平面. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 表示复数 z 的向量的长度, 称为复数的模. $\operatorname{Arg} z = \theta = \operatorname{Arctan}(y/x)$ 称为 z 的辐角, 表示 z 的向量与 x 轴正向间的交角的弧度数. 其中满足 $-\pi < \theta \leq \pi$ 的 θ_0 称为辐角 z 的主值, 记作 $\theta_0 = \arg z$.

1.1.2 复数的各种表示法

- 1) 复数 $z = x + iy$ 可用复平面上点 (x, y) 表示.
- 2) 复数 $z = x + iy$ 可用从原点指向点 (x, y) 的平面向量表示.
- 3) 复数的三角表达式为 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 其中 $r = |z|$, θ 为 $z \neq 0$ 时任一辐角值.

- 4) 复数的指数表达式为 $z = re^{i\theta}$.

5) 复数的复球面表示. 任取一与复平面切于原点的球面, 原点称为球面的南极, 过原点且垂直平面的直线与球面的交点称为球面的北极, 连接平面上任一点与球面北极的直线段与球面有一个交点, 又在平面上引入一个假想点 ∞ 与球面北极对应, 构成扩充复平面与球面点的一一对应, 即复数与球面上点的一一对应. 球面称为复球面.

1.1.3 复数的代数运算(z_1, z_2 不为零)

1) $z_1 = z_2$, 当且仅当两复数实部与虚部分别相等.

2) $z = 0$, 当且仅当 z 的实部与虚部同时为零.

3) $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 则

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

4) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$, 即

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg } z_1 z_2 = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

5) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, 即

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

6) $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$.

7) $\sqrt[n]{z} = r^{1/n} [\cos(\theta + 2k\pi)/n + i \sin(\theta + 2k\pi)/n],$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

在几何上, $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值恰为以原点为中心、 $r^{1/n}$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

1.1.4 曲线与区域

1) 设 $z(t) = x(t) + iy(t)$, 其中 $x(t), y(t) (a \leq t \leq b)$ 为实变量 t 的单值连续函数, 则 $z = z(t) (a \leq t \leq b)$ 表示复平面上的一条连续曲线.

一条没有重点的连续曲线称为简单曲线或约当曲线. 如果简单曲线的起点与终点重合, 则称为简单闭曲线.

如果在 $a \leq t \leq b$ 上 $x'(t), y'(t)$ 连续, 且对每一 t 值, 有 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$, 则称曲线 $z(t)$ 是光滑的.

任意一条简单闭曲线分复平面为三个部分: 曲线 C 为边界, 有界区域为 C 的内部, 无界区域为 C 的外部.

2) 复平面上的非空连通开集称为区域. 区域连同其边界称为

闭区域.

若在复平面上区域 D 内任作一条简单闭曲线, 其内部总属于 D , 则称 D 为单连通域. 若 D 不是单连通域, 则称 D 为多连通域.

1.1.5 复变函数

设 G 为一个复数集, 若有一个确定法则存在, 使对于任一 $z \in G$, 有一个或几个复数 $w = u + iv$ 与之对应, 则称复变数 w 是复变数 z 的函数, 记作

$$w = f(z).$$

复变函数在几何上表示 z 平面上一个点集 G (定义集合) 到 w 平面上一个集合 G^* (函数值集合) 的映射 (或变换). w 称为 z 的像 (映像), z 称为 w 的原像.

1.1.6 复变函数的极限

设 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内有定义, A 为一确定常数. 若对任给的 $\epsilon > 0$, 存在相应的 $\delta > 0$, 使对满足 $0 < |z - z_0| < \delta$ 的 z , 恒有 $|f(z) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限, 记作

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

由于 $z \rightarrow z_0$ 的方式的任意性更强, 因此复变函数的极限定义比一元实变函数极限定义要求苛刻得多.

复变函数极限的运算法则与实变函数极限运算法则相同.

1.1.7 复变函数的连续性

如果 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续. 若 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

$f(z) = u + iv$ 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充要条件为 u 和 v 在点 (x_0, y_0) 处连续.

复变函数连续性的运算法则与实变函数连续性运算法则相同.

学习与考试要求

(1) 熟练掌握复数的各种表示方法以及四则运算、乘幂运算和共轭运算.

(2) 了解区域的概念,单连通域、多连通域的区分.

(3) 了解曲线、光滑曲线、简单闭曲线的定义,能用复数的方程或不等式表示一些常见的区域和曲线.

(4) 掌握复变函数的概念,理解映射的意义,理解复变函数与两个二元实变函数之间的关系.

(5) 了解复变函数的极限与连续性概念,知道它们与一元实变函数极限与连续性的异同.

重点与难点

重点是复数表示法之间的转换、区域的确定、复变函数的概念.

难点是复球面概念,复变函数理解为复平面上两个集合间的映射,以及复变函数的极限与连续性.

1.2 疑难解析

1. 辐角的主值 $\arg z$ 怎样确定?

答 $\arg z$ 可以由 $\operatorname{Argtan}(y/x)$ 的主值 $\arctan(y/x)$ 按下列关系来确定:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x), & \text{当 } x > 0, \\ \pm \pi/2, & \text{当 } x = 0, y \neq 0, \\ \arctan(y/x) \pm \pi, & \text{当 } x < 0, y \neq 0, \\ \pi, & \text{当 } x < 0, y = 0. \end{cases}$$

其中 $-\pi/2 < \arctan(y/x) < \pi/2$.

2. 复数为什么不能比较大小?

答 我们知道,实数是有序的,所以实数可以比较大小. 而复

数是无序的,因此不能比较大小.

假若复数能比较大小,则由复数是实数的推广可知,它的大小顺序关系应遵循实数中的大小顺序关系. 如在实数中有:

若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$; 若 $a > b, c < 0$, 则 $ac < bc$.

现在来看复数 i 和零.

因为 $i \neq 0$, 若 $i > 0$, 则两边同乘“大于”零的 i , 得 $i \cdot i > 0 \cdot i$, 即 $-1 > 0$, 而这是错误的; 若 $i < 0$, 同样推出 $-1 > 0$. 显然, i 与零无法比较大小.

所以说,复数不能比较大小. 但是复数的模、实部、虚部都是实数,可以比较大小.

3. 复数是否一定有辐角?

答 除零以外的复数都有辐角. 当 $z=0$ 时,它的辐角可取任意值而不确定,这与零向量有任意方向是一致的.

4. 复数的运算与向量运算有何异同?

答 复数 $z=x+iy$ 可以用从原点指向点 (x,y) 的向量表示. 在运算上它们有相同之处也有相异之处.

相同之处是有同样的加、减运算和数乘运算.

相异之处是复数有乘、除、乘幂和方根等运算,而向量没有这些运算;向量有数量积、向量积、混合积等运算,而复数没有这些运算.

5. 如何理解两个复数 z_1 与 z_2 的乘积和商的辐角公式?

答 对于公式

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}(z_1/z_2) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2,$$

应该理解为:任意给定一个等式右端两个多值函数一对可能取的值,左端多值函数也必有一个值使这个等式成立. 反过来说也对.

这是因为公式两端的 Arg 都表示无穷多个值,等式是在全体意义上的相等,而不是个别意义上的相等. 例如:

设 θ_1, θ_2 分别是 $\operatorname{Arg} z_1$ 和 $\operatorname{Arg} z_2$ 的任意选定的值,则 $\operatorname{Arg} z_1 z_2$ 应有一 θ 满足 $\cos \theta = \cos(\theta_1 + \theta_2), \sin \theta = \sin(\theta_1 + \theta_2)$, 虽然 θ 不一定

就是 $\theta_1 + \theta_2$,但一定有 $\theta + 2k\pi = \theta_1 + \theta_2$,而 $\theta + 2k\pi$ 是 $\text{Arg } z_1 z_2$ 无穷多值中的一个. 反过来也是一样.

6. 为什么在复平面中规定无穷远点只是一点?

答 在高等数学中, ∞ 可以分为 $+\infty$ 和 $-\infty$,而在复变函数中只有唯一的无穷远点 ∞ . 这是由复球面上的点与扩充复平面上点的一一对应性而得出的. 复球面上只有一个点 N ,对应的点 ∞ 也就只有一个. 引入唯一的无穷远点 ∞ 在理论上具有重要的意义, ∞ 可以作为复平面的唯一的边界点.

7. 怎样理解复变函数 $w=f(z)$ 的意义?

答 设 $z=x+iy, w=u+iv$, 则

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

所以复变函数 w 与复变数 z 之间的关系 $w=f(z)$ 相当于两个实变函数关系:

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y).$$

定义一个复变函数 $w=f(z)$ 相当于定义两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$.

复变函数 $w=f(z)$ 在几何上反映 z 平面上一个点集 G (定义集合)到 w 平面上一个点集 G^* (函数值集合)的一个映射.

8. 一个点是不是区域? 一个矩形的内部加上边界上一点是不是区域? 为什么?

答 一个点不是区域,因为这时点不是内点,不存在点的一个属于它的邻域.

一个矩形的内部加上边界上一点也不是区域,这时点集不是开集.

9. 复变函数 $w=f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 的极限与实变函数 $y=f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 的极限有何异同?

答 这两个极限的定义在形式上与叙述方法上几乎十分相似,但意义却大不相同.

对极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 而言, $x \rightarrow x_0$ 是任意的,但只能在 x_0 的邻域内

从左、从右或时左时右地趋于 x_0 , 而对极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 来说, $z \rightarrow z_0$ 的任意性更强一些, z 可以从任何方向、以任何方式趋于 z_0 , 因而条件更严格和苛刻.

其相同点是, 只要 z (或 x) 进入 z_0 (或 x_0) 的 δ 邻域, 它的像点 $f(z)$ (或 $f(x)$) 就进入 A 的 ε 邻域. 而且, 它们有相同的极限运算法则.

10. 函数 $\arg z$ 在何处连续?

答 由题1已知辐角 $\arg z$ 的确定方式, 故可知当 $z_0 = x_0 + iy_0$ 不是原点也不是负实轴或虚轴上的点时, 与 z_0 足够接近的点 z 也不是原点与负实轴上的点. 这时有

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x), \\ \arctan(y/x) \pm \pi. \end{cases}$$

因为 $x_0 \neq 0$, 所以 $\arctan(y_0/x_0)$ 有意义, 故

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \begin{cases} \arctan(y/x), \\ \arctan(y/x) \pm \pi, \end{cases} = \begin{cases} \arctan(y_0/x_0), \\ \arctan(y_0/x_0) \pm \pi. \end{cases}$$

即

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z = \arg z_0.$$

当 z_0 为正虚轴上的点 $z_0 = iy_0$ ($y_0 > 0$) 时, 有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z = \pi/2 = \arg z_0.$$

当 z_0 为负虚轴上的点 $z_0 = iy_0$ ($y_0 < 0$) 时, 有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z = -\pi/2 = \arg z_0.$$

当 z_0 为负实轴上的点 $z_0 = x_0$ ($x_0 < 0$) 时, 由于

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z = \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0^+}} [\arctan(y/x) + \pi], \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow 0^-}} [\arctan(y/x) - \pi], \end{cases} = \begin{cases} \pi, \\ -\pi, \end{cases}$$

所以 $\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z$ 不存在.

又, 在原点处辐角不确定.

综上所述,除原点及负实轴上的点之外, $\arg z$ 在复平面内处处连续.

1.3 例题解析

1.3.1 复数的基本概念

复数是复变函数论的预备知识,因此读者必须熟悉复数的基本概念. 初学者最容易弄错的是复数的辐角,应根据 $z=x+iy$ 中点 (x,y) 的坐标确定 θ 在哪一象限来取它的值. 对复数的各种表示式要能熟练转换,以适应不同运算的不同要求.

例1 计算:

$$1) \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^4; \quad 2) \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}; \quad 3) (1+i\sqrt{3})^3;$$

$$4) \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \right)^{10}; \quad 5) \frac{i}{(i-1)(i-2)}.$$

解 1) $\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^4 = \left[\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} \right]^4 = (-i)^4 = 1.$

$$2) \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

$$3) (1+i\sqrt{3})^3 = (2e^{i\pi/3})^3 = 8e^{i\pi} = -8.$$

$$\begin{aligned} 4) \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \right)^{10} &= \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/3}} \right)^{10} = (e^{i2\pi/3})^{10} = e^{i20\pi/3} \\ &= \cos(20\pi/3) + i \sin(20\pi/3) \\ &= -1/2 + i\sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \frac{i}{(i-1)(i-2)} &= \frac{i(-i-1)(-i-2)}{(i-1)(-i-1)(i-2)(-i-2)} \\ &= \frac{(1-i)(-2-i)}{10} = -\frac{3}{10} + \frac{i}{10}. \end{aligned}$$

例2 求下列复数的虚部、实部、共轭复数、辐角和模: