·高等学校辅导教材·

与西安交大编《复变函数》配套

新编复变函数题解

（修订版）

孙清华　赵德修

- 知识提要　疑难解析
- 例题解析　习题解析

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

高等学校辅导教材

新编复变函数题解

（修订版）

孙清华　赵德修

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编复变函数题解(修订版)/孙清华　赵德修. -2 版
武汉:华中科技大学出版社,2006 年 2 月
ISBN 7-5609-2385-2

Ⅰ. 新…
Ⅱ. ①孙…　②赵…
Ⅲ. 复变函数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O174.5

新编复变函数题解(修订版)　　孙清华　赵德修

责任编辑:徐正达　　封面设计:刘　卉
责任校对:朱　霞　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437

录　　排:佳年华科技有限公司
印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:11　　字数:264 000
版次:2006 年 2 月第 2 版　　印次:2006 年 2 月第 4 次印刷　　定价:15.00 元
ISBN 7-5609-2385-2/O・222

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是学习复变函数课程的辅导教材，是21世纪高等学校数学系列辅导教材之一. 本书按照教育部《关于复变函数课程的基本要求》编写，具有题型多、方法全、覆盖面广、针对性强的特点，非常适合在校大学生与有志学习本门课程人员的需要.

本书与西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》配套，内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射等6章. 本书应用解析方法对复变函数的方法、概念与习题进行了讨论、求索、分析、归纳，使读者通过学习本书后能较好地掌握复变函数的思想、方法与技巧. 本书以大量的例题解析为读者提供有效的服务，还提供了西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》全书的习题解析.

本书是大学生学习复变函数必备的参考书，也是教学人员的一本很好的教学参考书.

修订版前言

复变函数是高等工科院校的一门重要的数学基础课．复变函数是在实函数的基础上产生和发展起来的，因此它与微积分学的概念、方法有许多相似和联系，但又有许多发展与区别．在今天，复变函数论一方面成为一种重要的解析工具，一方面又给其他学科（如流体力学、空气动力学、弹性理论、电磁学等）提供了一种广泛的几何定性研究的方法．正因为如此，复变函数课程日益引起大家的重视．但是这门课程中概念难懂，习题难做，方法难掌握．本书就是为了帮助大家解决学习中的困难而编写的．

本书按照国家教育部《关于复变函数课程的基本要求》编写，因此特别适合在校大学生和有志学习本门课程的人员的需要．

在本书中，我们用解析方法对复变函数论中的概念与习题作了分析解答，演绎归纳，讨论求索．相信读者在学习本书后一定会受到启发，获得自己需要的知识、方法和解答．

为了满足广大读者的要求，我们在本书中还对西安交通大学编的《复变函数》中的全部习题作了解答，以供读者参阅．

本书修订时改正了第一版中的一些错漏之处．

编　者

2006 年 1 月于武汉

目　　录

第1章　复数与复变函数

1.1　知识提要

1.1.1　复数的概念

形如$z=x+\mathrm{i}y$的数称为**复数**,其中x,y为任意实数,i ($\mathrm{i}^2=-1$)称为**虚单位**. x,y又分别称为z的**实部与虚部**,记作

$$x=\mathrm{Re}\ z,\quad y=\mathrm{Im}\ z.$$

$z=x+\mathrm{i}y$与直角坐标系平面上的点(x,y)成一一对应,该平面称为**复平面**. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$表示复数z的向量的长度,称为复数的**模**. $\mathrm{Arg}\ z=\theta=\mathrm{Arctan}(y/x)$称为$z$的**辐角**,表示$z$的向量与$x$轴正向间的交角的弧度数.其中满足$-\pi<\theta\leqslant\pi$的$\theta_0$称为辐角$z$的**主值**,记作$\theta_0=\arg z$.

1.1.2　复数的各种表示法

1) 复数$z=x+\mathrm{i}y$可用复平面上点(x,y)表示.

2) 复数$z=x+\mathrm{i}y$可用从原点指向点(x,y)的平面向量表示.

3) 复数的三角表达式为$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,其中$r=|z|$,$\theta$为$z\neq0$时任一辐角值.

4) 复数的指数表达式为$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

5) 复数的复球面表示. 任取一与复平面切于原点的球面,原点称为球面的**南极**,过原点且垂直平面的直线与球面的交点称为球面的**北极**,连接平面上任一点与球面北极的直线段与球面有一个交点,又在平面上引入一个假想点∞与球面北极对应,构成扩充复平面与球面点的一一对应,即复数与球面上点的一一对应.球面称为**复球面**.

1.1.3 复数的代数运算(z_1,z_2 不为零)

1) $z_1=z_2$,当且仅当两复数实部与虚部分别相等.

2) $z=0$,当且仅当 z 的实部与虚部同时为零.

3) $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2).$$

4) $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$,即

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \mathrm{Arg}\ z_1z_2=\mathrm{Arg}\ z_1+\mathrm{Arg}\ z_2.$$

5) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\ \dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$,即

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \mathrm{Arg}\ \frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}\ z_1-\mathrm{Arg}\ z_2.$$

6) $z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$.

7) $\sqrt[n]{z}=r^{1/n}[\cos(\theta+2k\pi)/n+\mathrm{i}\sin(\theta+2k\pi)/n]$,

$$k=0,1,\cdots,n-1.$$

在几何上,$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值恰为以原点为中心、$r^{1/n}$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

1.1.4 曲线与区域

1) 设 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$,其中 $x(t),y(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 为实变量 t 的单值连续函数,则 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 表示复平面上的一条连续曲线.

一条没有重点的连续曲线称为**简单曲线或约当曲线**. 如果简单曲线的起点与终点重合,则称为**简单闭曲线**.

如果在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上 $x'(t),y'(t)$ 连续,且对每一 t 值,有 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq0$,则称曲线 $z(t)$ 是光滑的.

任意一条简单闭曲线分复平面为三个部分:曲线 C 为边界,有界区域为 C 的内部,无界区域为 C 的外部.

2) 复平面上的非空连通开集称为**区域**. 区域连同其边界称为

闭区域.

若在复平面上区域 D 内任作一条简单闭曲线，其内部总属于 D，则称 D 为**单连通域**. 若 D 不是单连通域，则称 D 为**多连通域**.

1.1.5 复变函数

设 G 为一个复数集，若有一个确定法则存在，使对于任一 $z\in G$，有一个或几个复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 与之对应，则称复变数 w 是复变数 z 的函数，记作

$$w=f(z).$$

复变函数在几何上表示 z 平面上一个点集 G(定义集合)到 w 平面上一个集合 G^*(函数值集合)的**映射**(或变换). w 称为 z 的**像**(映像)，z 称为 w 的**原像**.

1.1.6 复变函数的极限

设 $w=f(z)$ 在点 z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，A 为一确定常数. 若对任给的 $\varepsilon>0$，存在相应的 $\delta>0$，使对满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 的 z，恒有 $|f(z)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的**极限**，记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A.$$

由于 $z\to z_0$ 的方式的任意性更强，因此复变函数的极限定义比一元实变函数极限定义要求苛刻得多.

复变函数极限的运算法则与实变函数极限运算法则相同.

1.1.7 复变函数的连续性

如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处**连续**. 若 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

$f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件为 u 和 v 在点 (x_0,y_0) 处连续.

复变函数连续性的运算法则与实变函数连续性运算法则相同.

学习与考试要求

(1) 熟练掌握复数的各种表示方法以及四则运算、乘幂运算和共轭运算.

(2) 了解区域的概念,单连通域、多连通域的区分.

(3) 了解曲线、光滑曲线、简单闭曲线的定义,能用复数的方程或不等式表示一些常见的区域和曲线.

(4) 掌握复变函数的概念,理解映射的意义,理解复变函数与两个二元实变函数之间的关系.

(5) 了解复变函数的极限与连续性概念,知道它们与一元实变函数极限与连续性的异同.

重点与难点

重点是复数表示法之间的转换、区域的确定、复变函数的概念.

难点是复球面概念,复变函数理解为复平面上两个集合间的映射,以及复变函数的极限与连续性.

1.2 疑难解析

1. 辐角的主值 $\arg z$ **怎样确定?**

答 $\arg z$ 可以由 $\mathrm{Argtan}(y/x)$ 的主值 $\arctan(y/x)$ 按下列关系来确定:

$$\arg z=\begin{cases}\arctan(y/x), & \text{当 } x>0,\\ \pm\pi/2, & \text{当 } x=0, y\neq 0,\\ \arctan(y/x)\pm\pi, & \text{当 } x<0, y\neq 0,\\ \pi, & \text{当 } x<0, y=0.\end{cases}$$

其中 $-\pi/2<\arctan(y/x)<\pi/2$.

2. 复数为什么不能比较大小?

答 我们知道,实数是有序的,所以实数可以比较大小. 而复

数是无序的，因此不能比较大小.

假若复数能比较大小，则由复数是实数的推广可知，它的大小顺序关系应遵循实数中的大小顺序关系. 如在实数中有：

若 $a>b,c>0$，则 $ac>bc$；若 $a>b,c<0$，则 $ac<bc$.

现在来看复数 i 和零.

因为 $i\neq 0$，若 $i>0$，则两边同乘“大于”零的 i，得 $i\cdot i>0\cdot i$，即 $-1>0$，而这是错误的；若 $i<0$，同样推出 $-1>0$. 显然，i 与零无法比较大小.

所以说，复数不能比较大小. 但是复数的模、实部、虚部都是实数，可以比较大小.

3. 复数是否一定有辐角？

答 除零以外的复数都有辐角. 当 $z=0$ 时，它的辐角可取任意值而不确定，这与零向量有任意方向是一致的.

4. 复数的运算与向量运算有何异同？

答 复数 $z=x+iy$ 可以用从原点指向点 (x,y) 的向量表示. 在运算上它们有相同之处也有相异之处.

相同之处是有同样的加、减运算和数乘运算.

相异之处是复数有乘、除、乘幂和方根等运算，而向量没有这些运算；向量有数量积、向量积、混合积等运算，而复数没有这些运算.

5. 如何理解两个复数 z_1 与 z_2 的乘积和商的辐角公式？

答 对于公式

$$\mathrm{Arg}\, z_1z_2=\mathrm{Arg}\, z_1+\mathrm{Arg}\, z_2,\quad \mathrm{Arg}(z_1/z_2)=\mathrm{Arg}\, z_1-\mathrm{Arg}\, z_2,$$

应该理解为：任意给定一个等式右端两个多值函数一对可能取的值，左端多值函数也必有一个值使这个等式成立. 反过来说也对.

这是因为公式两端的Arg 都表示无穷多个值，等式是在全体意义上的相等，而不是个别意义上的相等. 例如：

设 θ_1,θ_2 分别是 $\mathrm{Arg}\, z_1$ 和 $\mathrm{Arg}\, z_2$ 的任意选定的值，则 $\mathrm{Arg}\, z_1z_2$ 应有一 θ 满足 $\cos\theta=\cos(\theta_1+\theta_2)$，$\sin\theta=\sin(\theta_1+\theta_2)$，虽然 θ 不一定

就是$\theta_1+\theta_2$，但一定有$\theta+2k\pi=\theta_1+\theta_2$，而$\theta+2k\pi$是$\mathrm{Arg}\, z_1z_2$无穷多值中的一个．反过来也是一样．

6. 为什么在复平面中规定无穷远点只是一点？

答 在高等数学中，∞可以分为$+\infty$和$-\infty$，而在复变函数中只有唯一的无穷远点∞．这是由复球面上的点与扩充复平面上点的一一对应性而得出的．复球面上只有一个点N，对应的点∞也就只有一个．引入唯一的无穷远点∞在理论上有重要的意义，∞可以作为复平面的唯一的边界点．

7. 怎样理解复变函数$w=f(z)$的意义？

答 设$z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y).$$

所以复变函数w与复变数z之间的关系$w=f(z)$相当于两个实变函数关系：

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y).$$

定义一个复变函数$w=f(z)$相当于定义两个二元实变函数$u(x,y)$和$v(x,y)$．

复变函数$w=f(z)$在几何上反映z平面上一个点集G（定义集合）到w平面上一个点集G^*（函数值集合）的一个映射．

8. 一个点是不是区域？一个矩形的内部加上边界上一点是不是区域？为什么？

答 一个点不是区域，因为这时点不是内点，不存在点的一个属于它的邻域．

一个矩形的内部加上边界上一点也不是区域，这时点集不是开集．

9. 复变函数$w=f(z)$当$z\to z_0$的极限与实变函数$y=f(x)$当$x\to x_0$的极限有何异同？

答 这两个极限的定义在形式上与叙述方法上几乎十分相似，但意义却大不相同．

对极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$而言，$x\to x_0$是任意的，但只能在$x_0$的邻域内

从左、从右或时左时右地趋于 x_0，而对极限$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$来说，$z\to z_0$ 的任意性更强一些，z 可以从任何方向、以任何方式趋于 z_0，因而条件更严格和苛刻.

其相同点是，只要 z(或 x)进入 z_0(或 x_0)的 δ 邻域，它的像点 $f(z)$(或$f(x)$)就进入A 的ε 邻域. 而且，它们有相同的极限运算法则.

10. 函数 $\arg z$ 在何处连续?

答 由题1 已知辐角 $\arg z$ 的确定方式，故可知当 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 不是原点也不是负实轴或虚轴上的点时，与 z_0 足够接近的点 z 也不是原点与负实轴上的点. 这时有

$$\arg z=\begin{cases}\arctan(y/x),\\ \arctan(y/x)\pm\pi.\end{cases}$$

因为 $x_0\neq 0$，所以 $\arctan(y_0/x_0)$有意义，故

$$\lim_{z\to z_0}\arg z=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\begin{cases}\arctan(y/x),\\ \arctan(y/x)\pm\pi,\end{cases}=\begin{cases}\arctan(y_0/x_0),\\ \arctan(y_0/x_0)\pm\pi.\end{cases}$$

即
$$\lim_{z\to z_0}\arg z=\arg z_0.$$

当 z_0 为正虚轴上的点 $z_0=\mathrm{i}y_0$ $(y_0>0)$时，有

$$\lim_{z\to z_0}\arg z=\pi/2=\arg z_0.$$

当 z_0 为负虚轴上的点 $z_0=\mathrm{i}y_0$ $(y_0<0)$时，有

$$\lim_{z\to z_0}\arg z=-\pi/2=\arg z_0.$$

当 z_0 为负实轴上的点 $z_0=x_0$ $(x_0<0)$时，由于

$$\lim_{z\to z_0}\arg z=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0^+}}[\arctan(y/x)+\pi],\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0^-}}[\arctan(y/x)-\pi],\end{cases}=\begin{cases}\pi,\\ -\pi,\end{cases}$$

所以$\lim\limits_{z\to z_0}\arg z$ 不存在.

又，在原点处辐角不确定.

综上所述，除原点及负实轴上的点之外，$\arg z$ 在复平面内处处连续.

1.3 例题解析

1.3.1 复数的基本概念

复数是复变函数论的预备知识，因此读者必须熟悉复数的基本概念. 初学者最容易弄错的是复数的辐角，应根据 $z=x+iy$ 中点 (x,y) 的坐标确定 θ 在哪一象限来取它的值. 对复数的各种表示式要能熟练转换，以适应不同运算的不同要求.

例 1 计算：

1) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^4$； 2) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$； 3) $(1+i\sqrt{3})^3$；

4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$； 5) $\dfrac{i}{(i-1)(i-2)}$.

解 1) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^4=\left[\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right]^4=(-i)^4=1.$

2) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}+i\,\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}.$

3) $(1+i\sqrt{3})^3=(2e^{i\pi/3})^3=8e^{i\pi}=-8.$

4) $$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}=\left(\frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/3}}\right)^{10}=(e^{i2\pi/3})^{10}=e^{i20\pi/3}$$
$$=\cos(20\pi/3)+i\sin(20\pi/3)$$
$$=-1/2+i\sqrt{3}/2.$$

5) $$\frac{i}{(i-1)(i-2)}=\frac{i(-i-1)(-i-2)}{(i-1)(-i-1)(i-2)(-i-2)}$$
$$=\frac{(1-i)(-2-i)}{10}=-\frac{3}{10}+\frac{i}{10}.$$

例 2 求下列复数的虚部、实部、共轭复数、辐角和模：