高等学校数学系列教材

微积分教程（下册）

哈尔滨工程大学应用数学系 编

哈尔滨工程大学出版社

微 积 分 教 程

（下　册）

哈尔滨工程大学应用数学系　编

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程(下册)/哈尔滨工程大学应用数学系编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2003

ISBN 7-81073-528-4

Ⅰ.微…　Ⅱ.哈…　Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 084163 号

内 容 简 介

本书以全国高校工科数学课程教学委员会修订的"高等数学课程基本要求"为依据,在我校多年来高等数学课程的教学经验和教学改革的基础上,经过应用数学系多数教师的仔细推敲而写成的。

本书分上、下两册。上册内容为函数与极限,导数与微分,中值定理与导数应用,不定积分,定积分,定积分的应用,空间解析几何;下册内容包括多元函数微分法,重积分,曲线与曲面积分,无穷级数以及常微分方程。书后还附有几种常见的曲线,积分表,习题参考答案与提示。

本书具有结构合理,逻辑清晰,通俗简捷,例题适当,习题面广的特点。同时,还增加了有关数学建模的典型实例,以便于进一步加强对学生实际应用能力的提高和培养。

本书可供高等工科院校学生学习使用。

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行
哈尔滨市南通大街145号　哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328　邮编:150001
新　华　书　店　经　销
肇 东 粮 食 印 刷 厂 印 刷

*

开本 850mm×1 168mm　1/32　印张 10.75　字数 280 千字
2004 年 1 月第 1 版　2004 年 1 月第 1 次印刷
印数:1—5 000 册
定价:17.00 元

前　言

为了适应高等教育改革发展的需要，依据全国工科高等数学指导委员会制定的“高等数学课程教学基本要求”，结合我校多年来的教学实践和教学经验，在对许多教师、学生进行了大量的调查，特别是吸收了国内外同类教材的优点基础上，经充分讨论和研究，我们编写出版了《微积分教程》一书。全书共分上、下两册，另附有习题课指导教材两册。

本书以培养学生能力和提高学生素质为主线，注意对基本理论知识、基本技能及基本方法的分析和训练，又增加了数学建模方面的实例。

本书编写时考虑了与中学数学课程内容的衔接。在文字和内容的叙述上，力求通俗易懂、由浅入深、表达清晰、结构严谨，在直观引入的基础上，再给出严格的定义；在例题的选配上注意了代表性和典型性，以促进学生对概念及定理的理解和深化；在习题配置上，以基本训练为重点，同时也有少量技巧性较强、难度较大的题目，需在教师指导下练习。

本书上、下两册分别由林锰（第一章），范崇金（第二章、第六章），董衍习（第三章），沈艳（第四章、第五章），卜长江（第七章，第九章），马孝珣（第八章），祖国城、贾念念（第十章），于涛（第十一章）和王锋（第十二章）等同志编写而成。参加本书编写工作的还有张晓威同志。沈继红同志提供了数学建模的素材实例。

全书由陈林珠（上册），高玲（下册）主审和统稿。

在本书的编写过程中，得到了哈尔滨工程大学应用数学系广大教师的帮助和支持，也得到了全校各级有关领导的鼓励和指导，在此一并表示衷心感谢。

由于水平有限，书中难免有不妥之处，恳切希望广大读者指评指正。

编　者

2003.12

目　　录

第八章　多元函数微分法

在前面各章中,所讨论的函数都是只有一个自变量的一元函数 $y = f(x)$.但是在许多实际问题中,经常要考虑多种事物与多种因素的联系,因此有必要把函数概念从一个自变量推广到多个自变量的情形,即多元函数.

本章将在一元函数微分学的基础上讨论多元函数的概念、微分法及其应用.在讨论中以二元函数为主.讨论的结果容易推广到多元函数.

第一节　多元函数的基本概念

一、区域

一元函数的定义域是数轴上的点集,二元函数的定义域是坐标平面上点的集合.为此,先简要地介绍一些概念.

1. 邻域

对于正数 $\delta > 0$ 及点 $P_0(x_0, y_0)$,称点集

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}$$

或

$$U(P_0, \delta) = \left\{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

为点 P_0 的 δ 邻域,δ 为该邻域的半径,称

$$\mathring{U}(P_0, \delta) = \left\{(x, y) \mid 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

为点 P_0 的空心邻域.若不需要知道邻域的半径,则分别用 $U(P_0)$

与 $\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的邻域和空心邻域.

2. 区域

设 E 是一个平面点集, P 是平面上的一个点.

(1) 内点

设点 $P \in E$,若存在点 P 的某邻域 $U(P,\delta)$,使得

$$U(P,\delta) \subset E$$

则称 P 是 E 的内点(图 8 - 1).

(2) 边界点

设点 $P \in E$ 或 $P \notin E$,如果点 P 的任意邻域 $U(P,\delta)$ 既含有属于 E 的点,又含有不属于 E 的点,则称 P 为 E 的边界点(图 8 - 2). E 的全体边界点的集合称为 E 的边界.

例 1 设 $E = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}$, 则凡满足 $1 < x^2 + y^2 < 4$ 的点 (x,y) 是 E 的内点, 满足 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 的点 (x,y) 是 E 的边界点. 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 是 E 的边界.

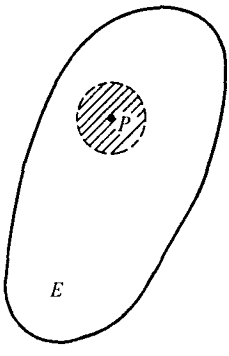

图 8 - 1

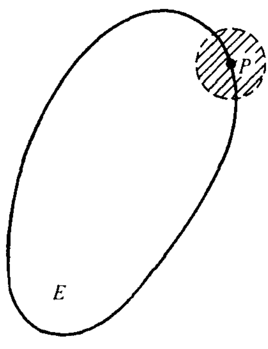

图 8 - 2

例 2 设 $E = \{(m,n) \mid m,n$ 是自然数$\}$(图 8 - 3). 因为 E 的每一点都不是它的内点,所以 E 没有内点, E 的所有的点都是它的

边界点.

(3) 开集

如果 E 的点都是它的内点,则称 E 为开集.因此开集中的任何一点,都存在一个邻域,使得该邻域被包含在此开集中.

(4) 区域

设 D 是一个开集.若 D 内任意两点 P、Q 都可以用完全包含在 D 内的折线连结起来,则称 D 是连通开集,又称 D 为区域或开区域(图 8 - 4).开区域连同它的边界称为闭区域.

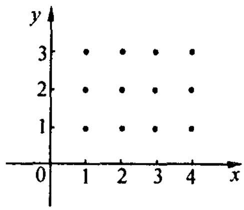

图 8 - 3

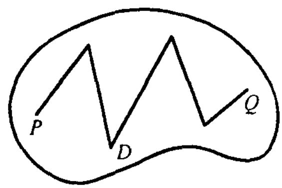

图 8 - 4

在实际问题中所遇到的二元函数的定义域,大多数是开区域与闭区域,也可能是开区域连同它的一部分边界,我们统称为区域.

例 3 $D_1 = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$是闭区域;

$D_2 = \{(x,y) \mid x + y > 0\}$是开区域;

$D_3 = \{(x,y) \mid xy > 0\}$是开集,而不是区域.

有界区域:设点集 E.如果存在以某个点 A 为中心,某个正数 R 为半径的圆域$U(A,R)$, 使得 $E \subset U(A,R)$,则称 E 是有界集.否则称为无界集.如例 3 中,D_1 是有界闭区域,D_2 是无界开区域,D_3 是无界开集.

闭区域的直径:设 D 是一个闭区域,则 D 内任意两点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 的距离

$$\rho(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

的最大值

$$d(D)=\max\{\rho(P,Q)\}$$

称为闭区域 D 的直径.

二、多元函数概念

一元函数从数量关系上反映了某一事物在一个因素的作用下的变化规律,但是在许多实际问题中,事物的变化不只由一个因素决定,而是由多个因素决定.例如,平行四边形的面积 A,由它的相邻两边的长 x 和 y 及其夹角 θ 所决定,即 $A=xy\sin\theta$;又如圆柱体的体积 V,是由它的底半径 r 和高 h 所决定的,即 $V=\pi r^2h$.这两例正是多元函数的例子.

1.二元函数的定义

设 D 是平面点集,**R** 是实数集,f 是一个对应规则.如果对 D 中的每一个点 $P(x,y)$,按照规则 f,在 **R** 中存在唯一的一个实数 z 和它对应,则称 z 是点 $P(x,y)$ 的函数,记为

$$z=f(x,y)\qquad 或\qquad z=f(P)$$

这里 x、y 称为自变量,z 称为因变量,点集 D 称为函数 z 的定义域.数集

$$\{z|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为函数 z 的值域.

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的函数值记为 $f(x_0,y_0)$ 或 $f(P_0)$.

类似地可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数,只要把平面点集 D 改为三维空间或 n 维空间中的点集就可以了.我们简记 n 元函数为 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

例 4 理想气体的状态方程

$$pV=RT\qquad(R\ 为常数)$$

描述了气体压强 p,体积 V 和温度 T(绝对温度)之间的变化规律.根据具体问题的不同要求,可以把压强 p 看成是 T 和 V 的函数:$p=\frac{RT}{V}$;或者把 T 看成是 p 和 V 的函数:$T=\frac{pV}{R}$;也可以把 V 看成是 p 和 T 的函数:$V=\frac{RT}{p}$.它们都是二元函数.

例 5 函数 $z=2x+5y$ 的定义域是

$$D=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$$

这是一个无界区域;

函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域是

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0\}$$

这是一个无界开区域(图 8-5);

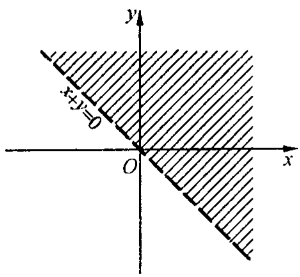

图 8-5

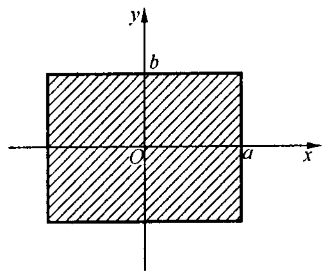

图 8-6

函数 $z=\arcsin\frac{x}{a}+\arcsin\frac{y}{b}$ $(a>0,b>0)$ 的定义域是

$$D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant a,|y|\leqslant b\}$$

(图 8-6),这是一个有界闭区域;

函数 $z=\arcsin\frac{y}{x}$ 的定义域是

$$D=\{(x,y)\mid |y|\leqslant|x|,x\neq0\}$$

这里 D 不是连通的,因此它不是一个区域(图 8-7).

2. 二元函数的几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$ 能够用三维空间的几何图像表示.

在三维空间中取一个直角坐标系 $o-xyz$，并设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D 是该坐标系中 xy 平面上的一个点集. 在 D 上取定一点 (x,y)，由于有唯一的一个值 $z=f(x,y)$ 与之对应，于是得空间一点 $P(x,y,z)$. 对于定义域 D 中的每一点，在空间 $o-xyz$ 中都有这样得到的一点 $P(x,y,z)$ 与之对应，称所有这样的点 (x,y,z) 的集合

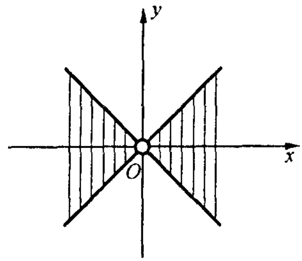

图 8－7

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像，它一般是空间的一块或几块曲面(图 8－8). 因此也称 $z=f(x,y)$ 为曲面方程.

例6 函数 $z=ax+by+c$ 的几何意义是以 $\{a,b,-1\}$ 为法向量，且过点 $(0,0,c)$ 的平面；

函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的几何意义是以原点为中心，以 1 为半径的上半球面；

函数 $z=xy$ 的几何意义是一个双曲抛物面(马鞍面).

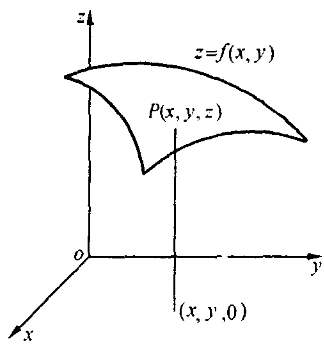

图 8－8

三、二元函数的极限

二元函数的极限概念与一元函数的极限概念是相似的，只是自变量的变化过程复杂多了.

考虑函数　$z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0,y\to y_0$　即　$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限.

设 D 是函数 $z=f(x,y)$ 的定义域，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或非孤立的边界点.如果令 D 内的动点 $P(x,y)$ 以任意方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$，且不与 $P_0(x_0,y_0)$ 重合时，$f(x,y)$ 无限逼近唯一的一个常数 A，则称动点 $P(x,y)$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时函数 $f(x,y)$ 的极限为 A.

与一元函数极限的精确定义相类似，也可以写出二元函数极限的精确定义.

定义　设 $P_0(x_0,y_0)$ 是二元函数 $f(x,y)$ 的定义区域的内点或边界点，A 是一个确定的数.如果对任给的正数 ε，总存在正数 δ，使得当

$$P(x,y)\in \mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$$

时，恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称函数 $f(x,y)$ 在动点 $P(x,y)$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

也可记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$

对于二元函数 $f(x,y)$，当其中至少有一个自变量趋向无限，例如 $x\to a,y\to+\infty$，函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限，也就是 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} f(x,y)=A$ 的精确定义可以叙述为：对任给的正数 ε，总存在正数 δ 和 B，使得当 $0<|x-a|<\delta,y>B$ 时恒有

$|f(x,y)-A|<\varepsilon$.至于其他情形可类似写出.

为了区别于一元函数的极限,把二元函数的极限称为二重极限①.

例 7 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证 因为 $x^2\leqslant x^2+y^2$ 或 $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\leqslant 1$,则

$$|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$$

所以
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2}{x^2+y^2}|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$$

于是,对于任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\varepsilon>0$,使得当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时恒有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$$

即
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 的定义中,一定要求 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 的方式是任意的.因此,当 (x,y) 以某一种特殊的方式,如沿一定直线或定曲线趋向于 (x_0,y_0) 时,$f(x,y)$ 无限逼近常数 A,我们不能由此断定极限存在.

例 8 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

证 因为在 x 轴上 $f(x,y)=f(x,0)=0$,在 y 轴上

---

① 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$.在此极限过程中自变量 x,y 必定同时趋向于 x_0,y_0.它与另一种自变量 x,y 以某种顺序趋向于 x_0,y_0 的极限过程是不同的,我们称后一种极限为累次极限.

$f(x,y)=f(0,y)=0$，所以当动点沿 x 轴和 y 轴趋向于点(0,0)时有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,0)=0,\qquad \lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(0,y)=0$$

但当动点 (x,y) 沿其他直线 $y=kx(k\neq 0)$ 趋向于点(0,0)时有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

由于这个极限值随直线 $y=kx$ 的斜率 k 的值的不同而改变，因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

例 9　设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$，证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

证　当动点 (x,y) 沿直线 $y=kx$（k 为任意常数）趋向于点(0,0)时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0$$

但当动点 (x,y) 沿抛物线 $y=ax^2$（a 为非零常数）趋向于点(0,0)时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=ax^2\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{ax^4}{x^4+a^2x^4}=\frac{a}{1+a^2}$$

这个极限值随表示抛物线 $y=ax^2$ 的张口方向及大小的 a 值而变化.因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

此例说明，即使点 (x,y) 沿任何直线趋向于点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 有相同的极限，也不能保证 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在.

由以上讨论可以看出，二元函数的极限比一元函数的极限的情况要复杂得多.因此，在求二元函数极限时要注意两点：

(1) 一定要保证极限是在动点 (x,y) 在 xy 平面上以任意方式趋向于点 (x_0,y_0) 的前提下求出的，就是说不能限制点 (x,y) 趋向于点 (x_0,y_0) 的方式.

(2) 只有在已证明极限存在的前提下，才可取特殊的方式使点(x,y)趋向于点(x_0,y_0)来计算极限.

二元函数极限的四则运算法则与一元函数极限的四则运算法则类似.

例 10 当把 x 或 y 看作自变量 x,y 的二元函数时，对任何实数 x_0,y_0 显然有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0, \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$$

于是运用极限运算法则可得

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kx^m y^n = kx_0^m y_0^n \quad (k\text{ 为常数}, m, n\text{ 为非负整数})$$

例 11 计算$\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(x^2+xy+y^2)$.

解 由例 10 及极限运算法则得

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,1)}(x^2+xy+y^2) &= \lim_{(x,y)\to(2,1)} x^2 + \lim_{(x,y)\to(2,1)} xy + \lim_{(x,y)\to(2,1)} y^2 \\ &= 4+2+1 = 7\end{aligned}$$

例 12 计算$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$.

解 因为$\left|\sin\dfrac{1}{xy}\right| \leqslant 1$，而当 $x\to 0, y\to 0$ 时，$x^2+y^2\to 0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy} = 0$$

四、二元函数的连续性

定义 设点 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的定义区域 D 的一个内点或边界点($P_0\in D$)，若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0), \tag{1}$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

若对于定义区域 D 的内点或边界点 $P_0(x_0,y_0)$，等式(1)左端