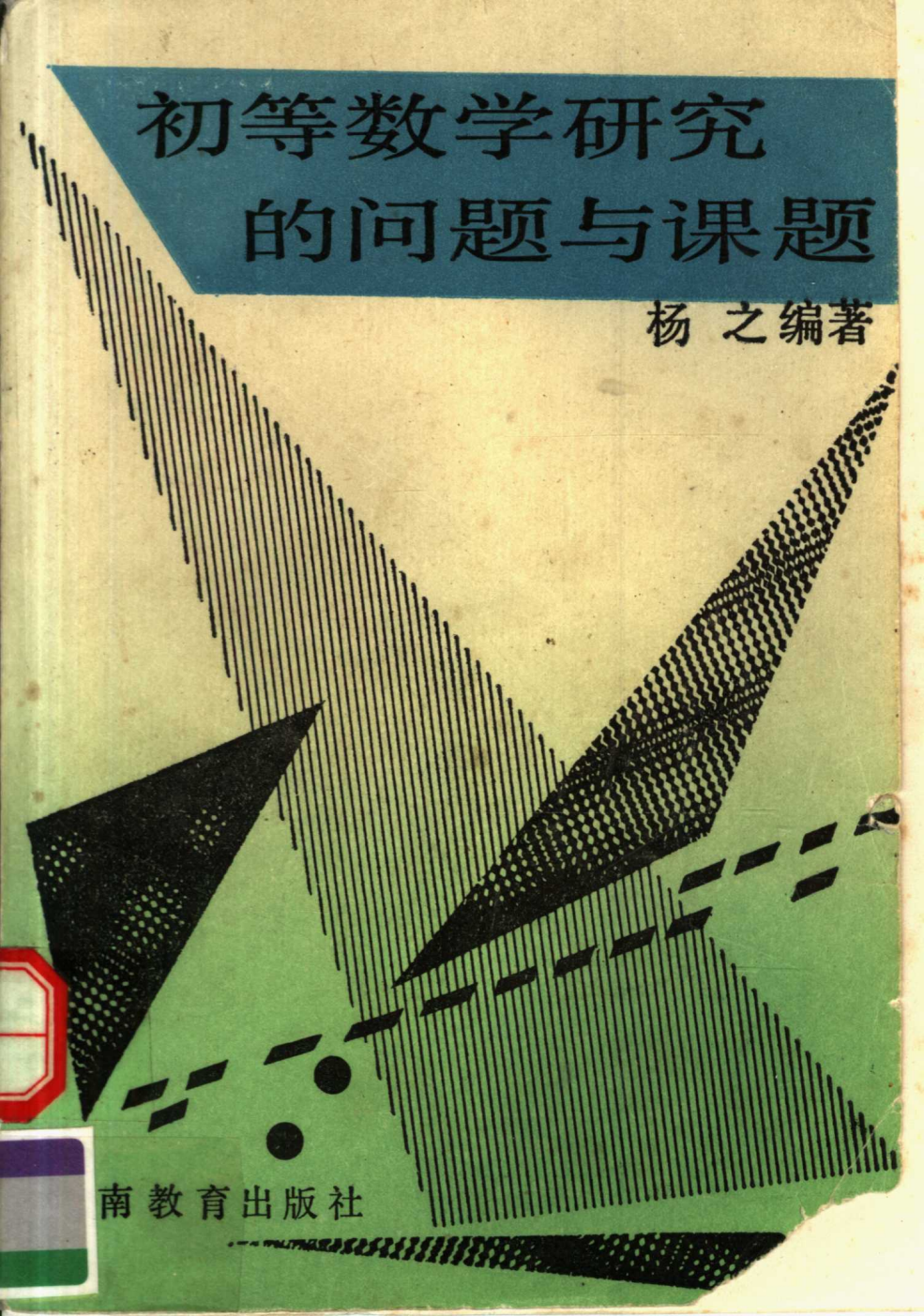


初等数学研究 的问题与课题

杨 之 编著



南教育出版社

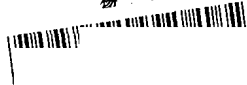
初等数学研究 的问题与课题

杨
之
编著

湖南教育出版社

初等数学研究的问题与课题

杨



湖南

二厂印刷

78 15

0,000

15

第2次印刷

ISBN 7—5355—1644—0/G·1639

定价：9.80元

本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换

重印前言

本书自93年出版以来，初数界以极大热情对其中的whc进行研究探索，仅两年多的时间，就使若干问题得以解决，若干问题被推进，若干问题受到反面解决的问题启发，又在追索其正面的结果，这由“附录”中列出的40余项已初见端倪。

两年来，我国初数研究队伍，日益壮大，水平更高，已有10余个省建立了初数研究组织，“中国不等式研究小组”、“中国绝对值研究小组”相继建立，高水平的研究成果，源源不断，对本书的需求量日增，这反映出我国初等数学研究事业，正大踏步走向一个新的阶段。

为了大家引用的方便，也出于历史的原因，本书这次只是“重印”，对其中的内容，不做任何修改，即使已被解决了的问题，也仍保留其编号不变，这样，一直保持下去，如果对这期间出现的变量新的问题还要做筛选的话，也只是把编号往后续，不再改变原编号。

长江后浪推前浪，世上新人催旧人。我国初数研究事业，青年才子辈出，如果本书在他们成长的道路上起到一颗铺路石子的作用，我就心满意足了。

杨之 1995.12.24于宝坻陋室

序

数学是一个有机体，要靠长久不断的进展，才能生存，进步一停止便会死亡。

——陈省身：《对中国数学的展望》

1

中国是数学的故乡。

但是，为什么在宋元以后没有得到进一步发展？这叫做李约瑟难题。怎样解开这一难题？科学史方面专家众说纷纭。

1981年，陈省身说：“我们的希望是在廿一世纪看见中国成为数学大国。”

这是什么？这是期望！这是预见！这是猜想！这是嘱托！要运用我们的智慧和双手，要依靠我们的齐心协力，振兴中国数学，恢复中国数学大国的地位！

这，又意味着什么？陈省身告诉我们：

这意味着：“要有一支年青的队伍，成员要有抱负，有信心，肯牺牲，不求个人名誉和利益，要超过前人，青出于蓝而胜于蓝。”

这意味着：“二十年后必然有大批的中国数学家成为数学各方面国际上学术带头人。”

这意味着：“到了二十一世纪，中国的科学能够平等和独立。”

总而言之，这也就是说：一要人才，二要成果，水平要高，

数量要多；三要基地，我们要建设自己的巴黎，哥丁根，普林斯顿。

但归根结底是人才！

2

人才从哪里来？

一是发现、培养；二是创造条件，开展研究，从“实战”中练就。除此之外，别无佳途。

我们正在改革教育，以提高人的素质，培养“创造型”人才。

我们正在开展数学竞赛活动，活跃气氛，激发兴趣，早期开发人才。

我们正在大力宣传倡导，在艰苦的条件下奋斗，为“初等数学研究”的普遍开展而奔走呼号，建立学术团体，开展学术交流，拓宽成果发表的渠道。

但归根结底，是什么推动初等数学研究的开展？

希尔伯特说：只要一门科学分支能够提出大量问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。

这就是说，大量的“问题”是开展初等数学研究的必要条件和激励因素；数学的发展迫切需要问题。

问题从哪里来？

开始（80年代初），我们靠“进口”，从国外移植；现在，我们逐渐走向平等和独立，我们要自己动手筛选；我们已有足够能力自己提出问题！

在“全国首届初等数学研究学术交流会”（1991.8.）期间，我曾作了《初等数学问题》的报告，24个问题引起与会者浓厚的兴趣，但问题面窄量少，述评简略。大家期待着更全面、更丰富的初等数学问题。

这愿望能实现吗？

要从近年出现的数十本译著、数百篇文献中筛选问题和猜想，工程浩大，谈何容易！是我们的水平和能力可以达到的吗？有这样的机会吗？

3

机会来了：湖南教育出版社的编辑高瞻，提供了这样一个良机。在众多朋友的支持下，我终于决心做这样一次尝试，而敬呈于大家面前的182个初等数学问题，就是这一尝试的结果。

老实说，这确是一次艰难的尝试，累积了四十余年，分散在数十种书籍、几十家杂志上的数百篇初数研究文献，不说浩如烟海，也如舳舻巨舰摆在我的面前，搜寻、阅读、摘记，已费尽了推移之力，从中识别、筛选有份量、耐推敲、值得研究的问题、猜想、课题，更是历尽周折。为此，希尔伯特“好问题”的标准，经常回旋脑际；为了追索某一问题的来龙去脉，更要反复查阅文献，核查对比，并尽量把引用文献的时限推后，直到誉清稿放笔的日子（1992年8月底）。

为了作这样一次尝试，我几乎用去了全部“业余时间”，书信往来压到最低限度，妻子和女儿承担了全部家务，女儿还帮助做了某些计算。没有她们的劳动，是不会有这本书的。令人意外的是，连生病的时间都被挤掉了。

自然，艰苦的努力并不等于尝试的成功。在182个问题中，好问题大约会有的，但并不全是，其中浅薄无味者有之，无意义者有之，过于一般化者有之……甚至已被解决而为作者所不知者，也间或有之。相反，由于种种原因，很多有价值且未解决的问题，却未能列入，遗憾之余，我再次声明，爱中国人的成果，乃本人一癖，遗漏决非有意。

这是一本问题和课题的书，但是我相信，中国广大初等数学工作者观之，会赏心悦目的，会感到自豪的，因为其中引用了数百人的成果（当然没忘指出他们的大名），无论提出者，推进者，解决者，凡见到的，都一一记录在案，我希望本书能作为一座小小的初等数学研究的历史丰碑。

我一向钟爱青年人的成果，此癖在著述中得到了极大的满足。在中国初等数学研究的文献海洋中遨游，心情总难平静，我感到：

我国初等数学研究运动，确在迅猛发展；

我国初数研究队伍，确实了不起：人多、青年多，其中不乏立志献身者，雄心勃勃者，智力超群者，攻坚历险者，稳产高产者，这支队伍，虽有缺陷，但水平不断提高，数学方法论的素养在不断提高，经验越来越丰富——这是事实！一批善提问题和猜想的能手，涌现了出来，一批敢向新领域突进的人，脱颖而出，一批人密切注视着世界初数研究的动向，一批“学派”的刍型若隐若现……。

当然，在写作过程中，我感到责任之重大。因此，对每个问题都颇费推敲，由于漏掉了某人某文献（或只不过是通信中）的一点推进而几易其稿的事，已属平常，虽然我并没有赋予自己综述研究成果的任务，但为了更准确地保留问题提出、进展、反复的本来面貌，在不少情形下，除略易符号之外，直接引用了原文。我感到，没有这些作者、研究者的成果和智慧，我纵有三头六臂，也很难在短短一年内筛选出这么多的问题。当然，在

相应的地方，直述他们的大名，意思是，荣誉之外，请他们替作者分担责任。这里，我向他们表示深深的谢意！

当然，从根本上来说，每篇文章，每项成果，都是问题，都可从某个角度作为新课题加以研究，这里的问题仍只不过是举例，仍只是提供了方向和线索，而作为本书不可分割的构成部分的主要参考文献(目录列在每章之后)构成了 whc (问题或猜想)的必要背景材料。

这本著作，是不是一个成功的尝试，自然留待历史去评说，更有待有识之士的批评鉴定，但随着初数研究的迅速开展，其中的问题，会逐渐成为 Fwhc (被解决掉的问题或猜想)，这种事也许在写作出版过程中已经发生。当然，这无论如何，总是好事。

杨之 壬申仲秋于天津宝坻

目 录

序	(1)
§0 话说问题	(1)
1. 数学研究与数学问题	(1)
2. 问题是从哪里来的?	(2)
3. 怎样选择“我的”问题?	(9)
4. 对问题解答的一般要求	(12)
§1 映射数列问题	(16)
1. 数码方幂和问题	(17)
2. $(3n+1)$ 问题	(22)
3. $(3n+1)$ 问题的推广	(24)
4. 黑洞数问题	(28)
5. 意义与前景	(34)
§2 绝对值方程问题	(36)
1. 多边形的方程	(37)
2. 特殊多边形方程及其应用	(42)
3. 二元一次绝对值方程的分类研究	(46)
4. 意义与前景	(49)
§3 数阵问题	(51)
1. 等差数阵	(52)
2. 高维等差数阵	(56)
3. 一些有研究价值的数阵	(60)
4. 递归数阵	(65)

5. 意义与前景	(68)
§4 一般折线研究	(70)
1. 封闭折线的基本性质	(71)
2. 星形折线	(76)
3. 意义与前景	(82)
§5 多边形的深入研究	(84)
1. 一般多边形	(84)
2. 研究三角形的新工具	(89)
3. 关于四边形的研究	(93)
4. 图形的切割与拼组	(99)
5. 平面铺砌问题	(106)
6. 平面图形的折迭问题	(111)
7. 意义与前景	(114)
§6 多面体的广泛研究	(117)
1. 一般多面体的研究	(117)
2. 几种特殊多面体	(122)
3. 立体切割与拼组	(126)
4. 一般四面体研究	(130)
5. 几种特殊四面体	(136)
6. 截面与体积问题	(139)
7. 空间多边形与棱锥截线	(144)
8. 意义与前景	(146)
§7 组合几何问题	(150)
1. 正多边形对角线交点的计数	(150)
2. 平面格图中的计数问题	(153)
3. 有限点集的一般性质	(159)
4. 希布隆型问题	(164)

5. 希卡与平面划分问题	(170)
6. 几何点集	(173)
7. 意义与前景	(176)
§ 8 多项式相关问题的研究	(179)
1. “四个二次”研究	(179)
2. 二次分式函数的研究	(185)
3. 高次多项式研究	(191)
4. 复系数的方程与不等式	(197)
5. 分圆多项式问题	(203)
6. 二元多项式研究	(207)
7. 特殊多项式的研究	(212)
8. 意义与前景	(214)
§ 9 数列研究	(218)
1. 等差、等比数列的研究	(220)
2. 等差数列中的子数列	(224)
3. 数列分组问题	(229)
4. 自然数方幂和问题	(232)
5. 等差数列方幂和问题	(242)
6. 常系数线性递归数列及推广	(246)
7. 特殊线性递归数列	(250)
8. 几类非线性递归数列	(257)
9. 收敛数列的研究	(265)
10. 意义与前景	(271)
§ 10 关于不等式研究	(276)
1. 平均不等式的继续研究	(277)
2. 均值概念的综合与推广	(280)
3. 循环平均、循环不等式及其他	(288)

4. 三角形不等式·····	(295)
5. 其他几何不等式·····	(309)
6. 综合的尝试·····	(315)
7. 意义与前景·····	(325)
§ 11 数论、几何及其他·····	(329)
§ 12 数学方法论的研究·····	(341)
1. 对“数学特点”的深入探讨·····	(341)
2. 数学方法与数学思想·····	(348)
3. 其他·····	(355)
4. 意义与前景·····	(358)

§ 0 话说问题

重大的个别问题，是数学的活的血液。

——希尔伯特

1. 数学研究与数学问题

数学研究与数学问题有什么关系呢？

希尔伯特在《数学问题》中有一段精彩的、耐人寻味的论述：

“问题对于一般数学进展的深远意义，以及它们在研究者个人的工作中所起的重要作用，是不可否认的。只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。”

数学家哈尔莫斯概括希尔伯特、波利亚等人的观点，进一步说：问题是数学的心脏。这是众多数学家切身体验的发微，也是对数学发展历史规律的精炼阐释。

俗话说，思从疑字始，法自欲字生，问题启迪方法，任务提示手段，只有有了自己的目标，一个人的研究才能开始，面对要解决的问题，新的思想才能产生，有效的工具、方法才能被发现或创造出来。

纵观数学历史，我们看出，正是由于丰富的数学问题，使近代数学成果累累。希尔伯特23个问题，起了推波助澜的作用；也正是由于问题缺乏，古典初等数学缓慢发展达几个世纪之久；而现代初等数学的发展，仍然离不开有“份量”的好问题的推动。

有问题，有猜想，才能促使人们去革新方法，创造工具，重建概念，发展理论；有问题，有猜想，才能吸引人们去研究、去开拓、去发现！

问题是数学之宝，问题乃数学之灵魂，这就是数学历史的辩证法。

我们自己，也有这方面的经验。

大家知道，“绝对值方程”的研究，现在已有十数篇文献，在“多边形方程”的研究方面有了突破性进展。可是当1985年末《中等数学》发表“绝对值方程”一文时，并没有引起人们的注意，以至于在很长一段时间里，没有相继的研究工作，可是，当1986年《关于绝对值方程的几个问题和猜想》刊出以后，很快（一两个月之内）就收到有关文章数篇，不仅探索了所提的问题和猜想，而且把这一领域的研究引向纵深。

这段小小的历史花絮是令人深思的。

2. 问题是从哪里来的？

问题是从哪里来的？

希尔伯特曾指出两条渠道：

“在每个数学分支中，那些最初、最古老的问题，肯定起源于经验，是由外部现象世界所提出的。”

“但是，随着一门数学分支的进一步发展，人类智力受到成功的鼓舞，开始意识到自己的独立性，它自身独立地向前发展，通常并不受来自外部世界的明显影响，而只借助于逻辑组合，一般化、特殊化，巧妙地对概念进行分析综合，提出新的、富有成果的问题，因而它自己就以一个真正提问者的身份出现。”

希尔伯特还详细描述了“外部现象世界”同“数学内部”两条渠道交互作用产生数学问题的辩证过程：

“其间，当纯粹思维的创造力进行工作时，外部世界又开始起作用，通过实际现象向我们提出新的问题，开辟新的数学分支，而当我们试图征服这些新的、属于纯思维王国的知识领域时，常常会发现过去未解决的问题的答案，这同时就极有成效地推进着老的理论。据我看来，数学家们在他们的这门科学的各分支问题的提法、方法和概念中，所经常感到的那种令人惊讶的相似性，和仿佛事先有所安排的协调性，其根源就在于思维与经验之间这种反复出现的相互作用。”

希尔伯特这些话，是1900年说的。九十年后的今天看来，仍然是真理，那么，到底怎样从“内部”、“外部”去寻找问题呢？

一、分析实际需要，抽象形成问题。

我们生活的现实世界，到处都有数学原型。特别是生产、生活的需要，通过“数学眼光”的观察，常可透视出数学问题。苏联的康托洛维奇，从工业生产中提出了“合理下料问题”、“资源合理分配问题”、“生产组织（如机床调配）与管理问题”等，抽象形成线性规划这门数学学科；华罗庚观察工农业生产中经常出现某种材料配比问题和人力物力在生产中的安排问题，一般只采用经验或传统方法而不尽合理，形成产品质量不稳定和人力物力的浪费，对这些问题加以抽象，提出了“合理安排实验点”与“合理安排工序”两个数学问题，并综合国内外有关研究成果，提出了“优选法”和“统筹法”（合称“双法”，属于最优化数学）来解决它们，取得了成功。

再如“费马点问题”（已知平面三点A、B、C，试求第四点

X , 使 $XA + XB + XC$ 最小), 是基于如下一类实际问题: A 、 B 、 C 是三户人家 (图0—1), 要共打一眼井, 井 X 打在何处, 能使到三家的距离之和为最小?

又如哥尼斯堡“七桥问题”, 本是生活趣题, 数学家欧拉通过“形式化抽象”的方法化成“一笔画问题”, 从而解决了它, 开了拓扑与图论的先河。

即将进入21世纪的人类社会, 生产生活领域丰富多彩, 千姿百态的有待探索解决的问题, 也会大量呈现在我们面前, 把这些问题简化、形式化, 抽象概括为数学模型, 舍弃那些非数学、非形式的因素, 剩下纯粹的数量关系和空间形式结构, 就成为数学问题。

二、观察归纳猜想, 综合发现问题。

对于观察与归纳在数学发现中的作用, 波利亚曾引用过欧拉的一段名言:

“在通常所谓的纯数学中, 观察也占很重要的地位, 这好象是很奇怪的说法。因为有一种流行的见解, 认为观察只有对能作用于我们感官的物理对象才有意义, 既然我们把数学看作纯粹的理智, 那么也就很难明白, 观察和实验在研究数的性质时, 能有多大用处。但实际上, 正如我将要充分说明的, 今天已知的数的性质, 大多都是通过观察发现的, 并且远在能够严格论证它们的正确性以前, 就被发现, 甚至有许多数的性质, 是我们熟知的, 但还不能证明, 而只是通过观察发现的。由此可见, 在发展很不完全的数论中, 我们可以把极大的希望寄托在观察上, 观察将不断引导我们发现数的新性质, 然后我们才努力去证明它们。”