新东方
NEW ORIENTAL

2008

新东方考研数学培训教材

考研数学

概率论与数理统计

卷III

费允杰 编著

- 通俗易懂，贴近考生
- 含最新、最全的历年真题解析（1987~2007）
- 基本概念讲解到位，实现“概念带动题型”的最佳学习效果
- 以题型为主导，并附有极具杀伤力的“解题秘笈”

群言出版社

2008

新东方考研数学培训教材

考研数学

卷Ⅲ

概率论与数理统计

费允杰 ◎ 编著

群言出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学. 3，概率论与数理统计 / 费允杰编著. —北京：群言出版社，2007

ISBN 978-7-80080-708-4

Ⅰ. 考…　Ⅱ. 费…　Ⅲ. ①概率论—研究生—入学考试—自学参考资料②数理统计—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 010577 号

责任编辑	李小艾
封面设计	王　琳
出版发行	群言出版社
地　　址	北京东城区东厂胡同北巷 1 号
邮政编码	100006
联系电话	65263345　65265404
电子信箱	qunyancbs@dem-league. org. cn
印　　刷	北京画中画印刷有限公司
经　　销	全国新华书店
版　　次	2007 年 2 月第 1 版　2007 年 2 月第 1 次印刷
开　　本	787×1092　1/16
印　　张	15
字　　数	331 千字
书　　号	ISBN 978-7-80080-708-4
定　　价	20.00 元

序

为了帮助参加硕士研究生入学考试的广大有志青年能够在最短的时间内取得最好的成绩，我们根据教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，结合我们多年的考研数学的命题、阅卷和辅导经验，编写了这套《考研数学》系列丛书，其中含：卷Ⅰ 高等数学与微积分、卷Ⅱ 线性代数、卷Ⅲ 概率论与数理统计。

这套书的特点是：

1. 基本概念讲解到位；
2. 按照题型分类，题目精简，不搞题海战术；
3. 作者均为考研数学辅导的一线教师，经验丰富。

这套书是在北京新东方学校开办考研数学培训三年之后推出的。在这期间，辅导班的学员人数呈几何级数增长。由于新东方采用独一无二的“基本概念→解题秘笈”的“两步教学法”，教学成果显著，在 2005 和 2006 年北京新东方学校考研数学高分得主颁奖中，多名学员获奖。现在，每年都有上万名学员来到新东方，“从绝望中寻找希望”，学习数学的思维方式和解题技巧。应广大学员的迫切要求，我们编写了这套考研丛书，并在第一版的基础上进行了修订，以回报大家对新东方的厚爱，希望大家能够借助这套丛书顺利通过考试，修成正果。

这是新东方教育科技集团推出的第一套考研数学辅导书。该系列丛书在出版过程中得到了俞敏洪老师和其他领导的大力支持，在此表示衷心的感谢。这套书的出版也标志着新东方由单一的英语培训迈向多元化培训，在新东方的发展史上具有划时代的意义。

新东方考研数学丛书编委会

前 言

本书是工学类、经济和管理学类(数学一、三、四)硕士研究生入学考试科目“概率论与数理统计”复习指导书。

本书分为八章:随机事件和概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。按照2007年“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求,数学四不考“数理统计”部分,即“数理统计的基本概念、参数估计、假设检验”这三章,数学一、三、四对于其他章节的要求只有掌握程度上的细微差别。2008年1月参加硕士研究生入学考试的考生请参考最新的“数学考试大纲”。

“概率论与数理统计”这门课程的特点是概念和公式繁多,章节的关系松散,应用题比较抽象,考生拿到题目经常没有思路,无法下手。本书作者多年来一直参加考研数学的辅导工作,结合自身多年考试和命题的经验,对于考生思维中的“瓶颈”了如指掌。

本书的结构与其他同类书籍有着本质的不同,注重思维,注重与考生的交流。作者在本书的每一章中特别采用了“基本概念→重点考核点→常见题型”三步走的策略,先讲基本概念,再深入浅出地提出“题型学习法”,并且在每一个“常见题型”后面都有极其精辟的“题型点评”。这是作者在教学过程中苦心钻研的教学成果,希望能够帮助大家突破“瓶颈”,完成“基本概念→解题秘笈”的成功之路。这实际上也是新东方学校考研数学辅导中的“两步教学法”。

本书的每一章最后都附有最全最新的历年真题(1987～2007),让广大考生作为练习。本书不仅可以作为硕士研究生入学考试的辅导书,对于大学在校学生、大专生以及自学考试者,也是一本难得的参考书。

由于作者水平有限,加之时间仓促,书中难免有错误之处,恳请读者批评指正。

费允杰

目　录

Contents

Contents

第一章

随机事件和概率

第一章是整个概率论的基础，对理解整个概率论起到极大的作用. 随机事件和概率（第一章）是二维随机变量（第二章）、多维随机变量（第三章）以及数字特征（第四章）的基础.

第一节　基本概念

1. 概念网络图

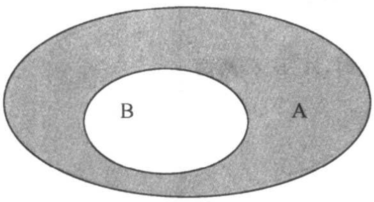
$$\begin{array}{l}\text{随机}\\ \text{试验}\,E\to\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{基本事件}\,\omega\\ \text{样本空间}\,\Omega\\ \text{随机事件}\,A\end{array}\right\}\to P(A)\left\{\begin{array}{l}\text{古典概型}\\ \text{几何概型}\\ \text{五大公式}\left\{\begin{array}{l}\text{加法 }B+C\\ \text{减法 }B-C\\ \text{条件概率 }B/C\text{ 和乘法公式 }BC\\ \text{全概公式}\\ \text{贝叶斯公式}\end{array}\right\}\\ \text{独立性}\\ \text{贝努利概型}\end{array}\right\}$$

首先，由随机试验 E 得到基本事件 ω 和样本空间 Ω 以及随机事件 A. 然后求 A 这样一个随机事件的概率 $P(A)$. 此时，我们有各种各样的方法. 当 A 这个事件比较简单的时候，我们可以用古典概型和几何概型；当 A 比较复杂的时候，我们可以把它分解为两个事件（B 与 C）的和 $B+C$（加法公式），差 $B-C$（减法公式），或者除 B/C（相当于条件概率）及乘 BC（乘法公式）. 当 A 更加复杂的时候，我们可以采用全概公式及贝叶斯公式. 最后，独立性和贝努利概型都可以用来计算事件 A 的概率. 第一章的内容总的来说就是通过各种方法来计算一个简单或者复杂事件的概率.

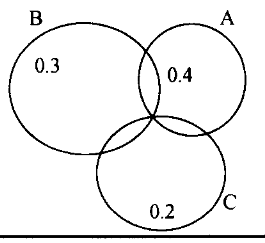
2. 重要公式和结论

(1) 排列组合公式	$P_m^n=\dfrac{m!}{(m-n)!}$从 m 个人中挑出 n 个人进行排列的可能数. $C_m^n=\dfrac{m!}{n!\ (m-n)!}$从 m 个人中挑出 n 个人进行组合的可能数.	两者的区别 $P_m^n=C_m^nP_n^n$，在实际做题的时候，我们不需要考虑用组合数还是排列数. 因为任何一个问题首先都是考虑它的组合数 C_m^n，然后再考虑这取出的 n 个元素是否需要排列，如果需要，我们就再乘 P_n^n，得到它的排列数 P_m^n. 见例 1.1.
(2) 加法和乘法原理	加法原理(两种方法均能完成此事)：$m+n$ 某件事由两种方法来完成，第一种方法可由 m 种方法完成，第二种方法可由 n 种方法来完成，则这件事可由 $m+n$ 种方法来完成. 乘法原理(两个步骤分别不能完成这件事)：$m\times n$ 某件事由两个步骤来完成，第一个步骤可由 m 种方法完成，第二个步骤可由 n 种方法来完成，则这件事可由 $m\times n$ 种方法来完成.	两者的区别：加法是两种方法，每一种方法均能把事情完成；而乘法是两个步骤，每一步骤均不能把事情完成. 见例 1.2—1.4.
(3) 一些常见排列	特殊排列(相邻、彼此隔开、顺序一定、不可分辨) 重复排列和非重复排列(有序) 对立事件(至少有一个) 顺序问题	这几个问题是概率论中非常重要的基础，请结合后面的例题理解. 见例 1.5--1.10.
(4) 随机试验和随机事件	如果一个试验在相同条件下可以重复进行，而每次试验的可能结果不止一个，但在进行一次试验之前却不能断言它出现哪个结果，则称这种试验为随机试验. 试验的可能结果称为随机事件.	例如：抛硬币就是一个随机试验，正面朝上或朝下都是随机事件.
(5) 基本事件、样本空间和事件	在一个试验下，不管事件有多少个，总可以从其中找出这样一组事件，它具有如下性质： ① 每进行一次试验，必须发生且只能发生这一组中的一个事件； ② 任何事件，都是由这一组中的部分事件组成的. 这样一组事件中的每一个事件称为基本事件，用 ω 来表示. 基本事件的全体，称为试验的样本空间，用 Ω 表示. 一个事件就是由 Ω 中的部分点(基本事件 ω)组成的集合. 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示事件，它们是 Ω 的子集. Ω 为必然事件，$\varnothing$ 为不可能事件. 不可能事件($\varnothing$)的概率为零，而概率为零的事件不一定是不可能事件；同理，必然事件(Ω)的概率为 1，而概率为 1 的事件也不一定是必然事件.	例如掷骰子：$\tilde{\omega}_i=$“有 i 点向上”，则，“掷骰子”这个随机试验的基本事件为：$\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\tilde{\omega}_3,\tilde{\omega}_4$，样本 $\tilde{\omega}_5,\tilde{\omega}_6$ 空间 $\Omega=\{\tilde{\omega}_i,i=1,2,\cdots,6\}$. 随机事件有：$A=$“奇数点向上”，$B=\{$偶数点向上$\}$等等. 例如，某房间温度从 20 度～26 度范围内变化，温度等于 24 度的概率为 0，但它确是可能的；同样的，去掉温度等于 24 度后概率仍为 1，但它不是必然事件了.
(6) 事件的关系与运算	① 关系： 如果事件 A 的组成部分也是事件 B 的组成部分(A 发生必有事件 B 发生)，则有：$A\subset B$ 如果同时有 $A\subset B,B\supset A$，则称事件 A 与事件 B 等价，或称 A 等于 B：$A=B$. A、B 中至少有一个发生的事件：$A\cup B$，或者 $A+B$. 属于 A 而不属于 B 的部分所构成的事件，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$，也可表示为 $A-AB$ 或者 $A\overline{B}$，它表示 A 发生而 B 不发生的事件.	学会用逻辑关系来理解事件的关系：$A\subset B$ 的逻辑关系是“A 是 B 的充分条件”. 利用集合的关系来理解 $A-B,A-AB$ 和 $A\overline{B}$三者是等价的. 牢记三者的等价关系对以后计算概率有很大帮助.

续表

	A、B同时发生：$A\cap B$，或者AB. $A\cap B=\varnothing$，则表示A与B不可能同时发生，称事件A与事件B互不相容或者互斥. 基本事件是互不相容的. $\Omega-A$称为事件A的逆事件，或称A的对立事件，记为$\overline{A}$. 它表示A不发生的事件. 互斥未必对立. ② 运算： 结合率：$A(BC)=(AB)C$　$A+(B+C)=(A+B)+C$ 分配率：$(AB)+C=(A+C)(B+C)$　$(A+B)C=(AC)+(BC)$ 德摩根率：$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$	分配律虽然复杂，但是集合里的“加”和“乘”的运算完全可以被看成是四则运算. 见例 1.11 和 1.12.
(7) 概率的公理化定义	设Ω为样本空间，A为事件，对每一个事件A都有一个实数$P(A)$，若满足下列三个条件： 1° $0\leqslant P(A)\leqslant 1$， 2° $P(\Omega)=1$ 3° 对于两两互不相容的事件$A_1,A_2,\cdots$有 $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$ 常称为可列(完全)可加性. 则称$P(A)$为事件A的概率.	这个定义在考试中不容易考到，大家只需要了解即可.
(8) 古典概型	1° $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\cdots\omega_n\}$， 2° $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}$. 设任一事件$A$，它是由$\omega_1,\omega_2\cdots\omega_m$组成的，则有 $$\begin{aligned}P(A)&=P\{(\omega_1)\cup(\omega_2)\cup\cdots\cup(\omega_m)\}\\&=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_m)\\&=\frac{m}{n}=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}\end{aligned}$$	古典概型在本章里起到至关重要的作用，是本章的一个难点. 第2个条件很重要，每一个基本事件一定要是等概型. 见例 1.13—1.18.
(9) 几何概型	若随机试验的结果为无限不可数并且每个结果出现的可能性均匀，同时样本空间中的每一个基本事件可以使用一个有界区域来描述，则称此随机试验为几何概型. 对任一事件A，$P(A)=\dfrac{L(A)}{L(\Omega)}$. 其中$L$为几何度量(长度、面积、体积).	见例 1.19.
(10) 加法公式	$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 当$P(AB)=0$时，$P(A+B)=P(A)+P(B)$	
(11) 减法公式	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$ 当$B\subset A$时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$  当$A=\Omega$时，$P(\overline{B})=1-P(B)$	见例 1.20.

续表

(12) 条件概率	定义设 A、B 是两个事件,且 $P(A)>0$,则称 $\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生条件下,事件 B 发生的条件概率,记为 $P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$. 条件概率是概率的一种,所有概率的性质都适合于条件概率. 例如 $P(\Omega/B)=1\Rightarrow P(\overline{B}/A)=1-P(B/A)$	第一,注意条件概率与一般概率的区别.条件概率:在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率.条件概率是以 A 这样一个新的样本空间来考虑问题的;一般概率是以基本事件的总数构成的样本空间来考虑的.第二,注意条件概率和乘法之间的区别.$P(BA)$ 表示 A 发生并且 B 发生的概率;$P(B/A)$ 表示在 A 发生的条件下 B 发生的概率.条件概率的标志词:"当、已知、如果"等等.
(13) 乘法公式	乘法公式:$P(AB)=P(A)P(B/A)$ 更一般地,对事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$,若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\|A_1)P(A_3\|A_1A_2)\cdots\cdots$ $P(A_n\|A_1A_2\cdots A_{n-1})$.	乘法公式的目的是计算两个事件相交的概率,它是条件概率的乘法形式.乘法公式的标志词:"同时发生、并且". 见例 1.21 和 1.22.
(14) 独立性	① 两个事件的独立性 设事件 A、B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A、B 是相互独立的. 若事件 A、B 相互独立,且 $P(A)>0$,则有 $$P(B\|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$ 这与两个事件"独立"的含义是一致的. 若事件 A、B 相互独立,则可得到 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立. 必然事件 Ω 和不可能事件 Φ 与任何事件都相互独立. ② 多个事件的独立性 设 ABC 是三个事件,如果满足两两独立的条件, $P(AB)=P(A)P(B)$;$P(BC)=P(B)P(C)$;$P(CA)=P(C)P(A)$ 并且同时满足 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 那么 A、B、C 相互独立. 对于 n 个事件类似. 两两独立,并不一定相互独立.可以通过下面的图来理解:如图,我们调整 $P(AB)=0.12=P(A)P(B)$,$P(BC)=0.06=P(B)P(C)$, $P(AC)=0.08=P(C)P(A)$, 并且 $0=P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)=0.024$.此时,$A$、$B$、$C$ 两两独立但不相互独立.  	$P(AB)=P(A)P(B/A)$ 在任何情况下都是成立的,只有当 A、B 相互独立时才有:$P(AB)=P(A)P(B)$ 成立. 可以看出,独立性是对乘法公式的简化. 见例 1.26—1.28. 两两独立有三个条件,而相互独立必须要满足四个条件.两两独立不一定相互独立. 见例 1.25. 但是,两两排斥一定相互排斥.

续表

(15) 全概公式	设事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足 1° $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$， 2° $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$， 则有 $P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+\cdots+P(B_nA)$ $=P(B_1)P(A\|B_1)+P(B_2)P(A\|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A\|B_n)$	从数学角度来讲，全概公式是“分块计算”法，要求两个条件，即要求 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为完备事件组. 从应用角度来说，一个事情由两个随机阶段形成，每个阶段均有几个随机的结果，求第二阶段某一个结果的概率. 见例 1.16②中方法二的补充和例 1.23.
(16) 贝叶斯公式	设事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 及 A 满足 1° $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容，$P(Bi)>0,i=1,2,\cdots,n$， 2° $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i$，$P(A)>0$， 则 $P(B_i/A)=\dfrac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A/B_j)}$，$i=1,2,\cdots,n$. 此公式即为贝叶斯公式. $P(B_i)$，$(i=1,2,\cdots,n)$，通常叫先验概率. $P(B_i/A)$，$(i=1,2,\cdots,n)$，通常称为后验概率. 贝叶斯公式反映了“因果”的概率规律，并作出了“由果朔因”的推断.	分母是个全概公式，因此两个条件和全概公式是完全一样的. 贝叶斯公式实质上是用一个已知的条件概率来计算一个未知的条件概率. 从时间顺序上来说，是已知第二阶段的某一结果，来求第一阶段某一结果的概率. 即“由果求因”. 这一点，与全概公式正好相反. 见例 1.24.
(17) 伯努利概型	我们作了 n 次试验，且满足 ◆ 每次试验只有两种可能结果，A 发生或 A 不发生； ◆ n 次试验是重复进行的，即 A 发生的概率每次均一样； ◆ 每次试验是独立的，即每次试验 A 发生与否与其他次试验 A 发生与否是互不影响的. 这种试验称为伯努利概型，或称为 n 重伯努利试验. 用 p 表示每次试验 A 发生的概率，则$\overline{A}$发生的概率为 $1-p=q$，用 $P_n(k)$表示 n 重伯努利试验中 A 出现 $k(0\leqslant k\leqslant n)$次的概率， $P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$.	伯努利概型是离散型概型中最重要的一种概型. 伯努利概型的最基本的特征：只知道次数，不知道位置. 见例 1.29—1.31.

【例 1.1】 有 5 个队伍参加了甲 A 联赛，两两之间进行循环赛两场，没有平局，试问总共输的场次是多少？

解 在没有平局的情况下，总共输的场次就是总共比赛的场次，总的场次为 $2C_5^2$（相互间为两场比赛）. 另外，如果把相互间的两场比赛理解成主客场，则首先从 5 个队任取两个队得到组合数 C_5^2，然后这两个队需要排列（放在不同的位置或完成不同的任务），我们还需要再乘以 P_2^2，得到 $2C_5^2$.

点评 这是一道简单的排列组合的问题，我们通过这个题理解组合数与排列数的概念，特别是两者的区别. 我们不需要考虑用组合数还是排列数. 因为任何一个问题首先都是考虑它的组合数 C_m^n，然后再考虑这取出 n 个元素是否需要排列，如果需要我们就自然再乘 P_n^n，得到它的排列数 P_m^n.

【例 1.2】 ① 到美利坚去，既可以乘飞机，也可以坐轮船，其中飞机有战斗机和民航，轮船有小鹰号和 Titanic 号，问有多少种走法？

② 到美利坚去，先乘飞机，后坐轮船，其中飞机有战斗机和民航，轮船有小鹰号和 Titanic 号，问有多少种走法？

解 ① 两种方法，利用加法原理，$2+2=4$.

② 两个步骤，第一步：坐飞机，第二步：坐轮船. 只坐飞机或只坐轮船均不能到达美利坚. 得用乘法原理：$2\times2=4$.

点评 加法原理的特点：每一种方法均能完成事情；乘法原理的特点：单独一个步骤不能完成任务.

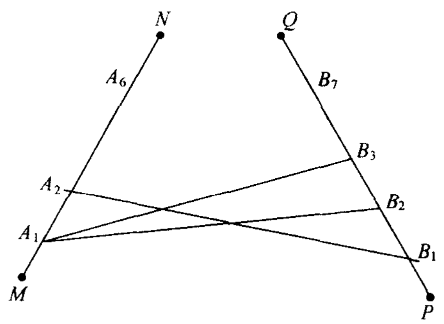
【例 1.3】 10 人中有 6 人是男性，问组成 4 人组，三男一女的组合数.

解 第一步，选三男 C_6^3；第二步，选一女 C_4^1. 两者相乘得：$C_6^3C_4^1$.

【例 1.4】 两线段 MN 和 PQ 不相交，线段 MN 上有 6 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_6$，线段 PQ 上有 7 个点 $B_1,B_2,\cdots,B_7$. 若将每一个 A_i 和每一个 B_j 连成不作延长的线段 A_iB_j $(i=1,2,\cdots6;j=1,2,\cdots,7)$，则由这些线段 A_iB_j 相交而得到的交点（不包括线段 MN 和 PQ 上的 13 个点）最多有

(A) 315 个　　(B) 316 个　　(C) 317 个　　(D) 318 个

解 作图，



图中只画出两个交点示意.

从图中可以看出，从 MN 上任取两个点，再从 PQ 上任取两个点，这样四个点的组合惟一确定了一个交点. 当然这些交点可能重合，如果不考虑重合的可能性（题干中强调“最多”），这样四个点的组合数也就是交点的总数. $C_6^2C_7^2=315$.

点评 这是一道相当有难度的题，其中最大的难度就是想到把交点数转化成组合数.

【例 1.5】 晚会上有 5 个不同的唱歌节目和 3 个不同的舞蹈节目，问：分别按以下要求各可排出几种不同的节目单？

① 3 个舞蹈节目排在一起；

② 3 个舞蹈节目彼此隔开；

③ 3 个舞蹈节目先后顺序一定.

④ 3 个舞蹈节目不可分辨.

解 ① 这是“相邻问题”，把相邻的元素放在一起作为 1 个元素即可. 5 个唱歌节目与这 1 个元素形成 6 个元素，排列数为 P_6^6，然后 3 个舞蹈节目还需要排列，即 P_3^3. 两个步骤相乘，得 $P_6^6P_3^3$.

② 这是“彼此隔开”的问题，使用“挡板模型”. 5 个唱歌节目为挡板，隔开 6 个位置让 3 个舞蹈节目选择，即 $C_6^3P_3^3$，这样排列一定满足“彼此隔开”并且包括所有的“彼此隔开”的情况. 然后 5 个唱歌节目本身需要排列，即 P_5^5. 所以答案为 $C_6^3P_3^3P_5^5$.

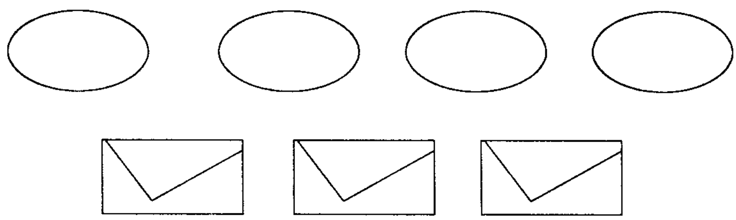
③ 这是“先后顺序一定”的问题，先排“先后顺序不一定”的元素. 先排 5 个唱歌节目，即 P_8^5，剩下 3 个位置留给“3 个先后顺序一定的舞蹈节目”，排列数必然只有 1 种，所以答案就是 P_8^5；也可以由 $\frac{P_8^8}{P_3^3}$ 来计算，即总数除掉 3 个舞蹈节目的排列数.

④ “不可分辨”与“先后顺序一定”是相同的解法. 先排 5 个唱歌节目，即 P_8^5，剩下 3 个位置留给“3 个不可分辨的舞蹈节目”，排列数必然只有 1 种，所以答案就是 P_8^5；也可以由 $\frac{P_8^8}{P_3^3}$ 来计算，即总数除掉 3 个舞蹈节目的排列数.

点评　以上 4 个小问是常见的特殊排列，其解法请牢记.

【例 1.6】　3 封不同的信，有 4 个信箱可供投递，共有多少种投信的方法？

解　作图，第一排表示 4 个信箱，第二排表示 3 封信.



可能的答案：P_4^3，C_4^3，3^4，4^3.

分析　P_4^3 表示从 4 个信箱中任取 3 个，并且每个信箱惟一地罩住一封信. 这不是正确答案，因为它没有包括“3 封信都投到一个信箱”等情况.

C_4^3 表示从 4 个信箱中任取 3 个. 这更不是正确答案，因为它完全没有考虑每个信箱对信还有一个选择. P_4^3 比 C_4^3 更正确，是因为 P_4^3 考虑到每个信箱在选择每一封信的时候至少还有一个排列.

3^4 表示每一个信箱面对 3 封信的时候有 3 种选择：比如第 1 个信箱可以选择第 1 封信，可以选择第 2 封信，也可以选择第 3 封信；第 2 个信箱同理；以此类推. 最后用乘法原理把 4 个 3 乘起来. 这也不是正确答案，因为每个信箱面对 3 封信的时候并不是只有 3 种选择，还有多种选择，如：一封信都不选；选第 1 和第 2 封信；等等. 而且，第 1 个信箱的选择还会影响第 2 个信箱的选择.

4^3，这个答案是正确的. 它考虑的是每一封信. 每一封信面对 4 个信箱的时候，都有 4 种选择，而且互不影响.

点评　本题考查重复排列和非重复排列的知识.

排列数 P_4^3，实际上是一种非重复排列，所谓非重复排列指元素和它的位置是一一对应的，每一个元素有且仅有一个位置. 例如，4 个人坐 3 个位置，从 4 个人中任选 3 个人，每个人只能坐一个位置，有且仅有一个位置，不可能两个人坐一个位置，也不可能一个人坐两个位置. 这样的排列叫做非重复排列.

象 4^3 这种形式，实际上是一种重复排列. 重复排列指：一个元素可以坐不止一个位置；两元素可以坐同一个位置；位置和元素没有一一对应关系.

在这里，我们不仅要弄清楚重复排列和非重复排列的区别；更要弄清楚，在重复排列时，应该是 4^3 还是 3^4. 应该从所谓“可以自由活动的对象”（即“相互间不干扰的元素”）考虑，在这道题里，“可以活动的对象”是“信”而不是“信箱”. 那么从信的角度来考虑，有 3 封

信，每一封信是 4 种情况(4 个信箱)，所以答案就是 4^3.

【例 1.7】 某市共有 10000 辆自行车，其牌照号码从 00001 到 10000，求有数字 8 的牌照号码的个数.

解 直接考虑“有数字 8”是复杂的，因为“8”的位置和出现的次数都在发生变化.

我们考虑对立事件“没有数字 8”的情况：从 00001 到 10000，先考虑首位(万位)是 0 的情况. 千位上，没有数字 8 的情况有 9 种(0,1,2,3,4,5,6,7,9)，同理，百位上、十位上、个位上没有数字 8 的情况也是 9 种. 4 个步骤相乘得 9^4(注意此处为“重复排列”). 去掉 00000 这 1 个数，再加上 10000(不含数字 8)这 1 个数. 所以，“没有数字 8”的情况一共有 9^4 种.

同时，从 00001 到 10000，一共有 10^4 种情况.

所以，“有数字 8 的牌照号码的个数”为 10^4-9^4.

点评 这个题直接算是不太可能的，因为“有数字 8”表示 8 出现的位置和次数都是不确定的. 所以，我们就采用了一种常见的方法：对立事件. “有数字 8”的对立事件是“没有数字 8”，从而简化计算过程.

通过这道题大家要学会“对立事件”这个计算方法，同时复习一下“非重复排列”和“重复排列”的知识.

【例 1.8】 3 白球，2 黑球，先后取 2 球，放回，至少一白的种数？(有序)

解法 1(错误) 第一次先取一白 C_3^1，保证至少有一白；第二次从五个球中任取一球 C_5^1. 得：$C_3^1\cdot C_5^1=15$

解法 2(正确) 采用“对立事件”，先计算“两球全为黑”的种数：$C_2^1C_2^1=4$. 则，“至少一白”的种数 $=C_5^1\cdot C_5^1-C_2^1\cdot C_2^1=21$

点评 在排列组合问题中，经常出现的问题是采用不同方法计算出的结果却不一样. 很明显，正确答案只有一个. 在这道题里，解法 2 是正确的. 解法 1 的错误在于：少计算了“第一次为黑，第二次为白”的情况，而这种情况的种数是 $C_3^1C_2^1=6$. 我们可以看到当 15 加上 6 时，正好等于 21.

这道题告诉我们，像“至少一白”这种问法，标准的做法是采用“对立事件”. 这样可以避免出错.

【例 1.9】 3 白球，2 黑球，先后取 2 球，不放回，至少一白的种数？(有序)

解法 1(错误) 第一次先取一白 C_3^1，保证至少有一白；第二次从剩余四个球中任取一球 C_4^1. 得：$C_3^1\cdot C_4^1=12$

解法 2(正确) 采用“对立事件”：$C_5^1\cdot C_4^1-C_2^1\cdot C_1^1=18$

点评 同理，解法 1 是有问题的，少计算了“第一次为黑，第二次为白”，$C_2^1C_3^1=6$；我们不难看出 $12+6=18$. 而解法二是正确的.

比较例 1.8 和例 1.9，例 1.8 为“放回”，例 1.9 为“不放回”，“放回”可选的种类会更多一些，因而计算出的结果会比“不放回”更大一些. 这一点区别也是要注意的.

【例 1.10】 3 白球，2 黑球，任取 2 球，至少一白的种数？(无序)

解法 1(错误) 先从 3 白球中任取一白球，再从剩余四球中任取一球：$C_3^1\cdot C_4^1=12$.

解法 2(正确) 采用对立事件，$C_5^2-C_2^2=9$.

点评 根据前两道例题的经验，解法 2 的对立事件法，肯定是正确的.

那么，为什么解法 1 计算出的结果反而更大呢？这是因为“先后取”和“任取”是不一样的. “先后取”比“任取”更大一些.

例　3 个白球，2 个黑球.

1. 先后不放回的取 2 次，取出 2 个白球的种数为 $C_3^1C_2^1=6$.

2. 一次性取(任取)2 个，取出 2 白球的种数为 $C_3^2=3$.

这就说明一个道理，先后取(放回或不放回)比任取计算出的结果更大一些. 因为"先后取"有一个顺序，而"任取"是没有顺序的."有顺序"比"没有顺序"大，就像排列数比组合数大一些一样. 通过比较例 1.9 和例 1.10 的结果，可以进一步验证这一点.

例 1.10 的解法 1 有两重错误：一，少考虑了"先黑后白"的情况；二，题目要求是"任取"，却采用了"先后取". 第一重错误会导致结果变小，第二重错误会导致结果变大. 综合在一起，反而使结果变大了.

通过这三道题，对于有序和无序的问题，大家要明确以下几点，：

1. "先后"和"任取"的区别."先后"相当于"排列"，"任取"相当于"组合". 所以"先后"比"任取"算出的结果更大一些.

2. 在"先后"里，又分"放回"和"不放回". 这两者也是有区别的."放回"比"不放回"计算出的结果更大一些.

3. "至少有一个"的问题用"对立事件"来考虑.

【例 1.11】　化简 $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$

解　原式 $=(AA+BA+A\overline{B}+B\overline{B})(\overline{A}+B)$

$=(A+BA+A\overline{B})(\overline{A}+B)$

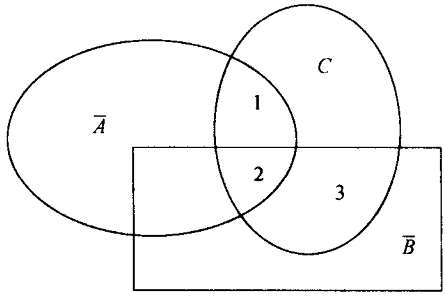
$=AB$

点评　这道题完全不需要使用复杂的分配律，可以用"四则运算"的方法来化简.

【例 1.12】　$(\overline{A\cup B})C=(\overline{A}C)\cup(\overline{B}C)$成立的充分条件为：

(1)$C\subset\overline{A}$　　　(2) $C\subset\overline{B}$

解　直接画一个集合来考虑



说明　图中两个椭圆和一个方框分别表示集合 $\overline{A},\overline{B},C$；为了说明问题，我们使其两两相交，并在相交后的三个空白块标上 1,2,3 称为：块 1，块 2，块 3.

左边 $=(\overline{A}\,\overline{B})C=2$；右边 $=(\overline{A}C)\cup(\overline{B}C)=1+2+3$

左边等于右边，等价于：块 1 为空集，且块 3 为空集.

由条件(1)易得：块 3 为空集；

由条件(2)易得：块 1 为空集；

所以，两个条件联合起来才是题干的充分条件.

点评　通过这道题大家可以看出，除了利用了一次德摩根率，并没有用到什么"分配律"等复杂的公式. 对于这类题，特别是选择题，完全可以用简单的画图法来解决，这样不但直观，避