读考研书 找人大社

2008 人大考研

2008年考研
数学
最新精选600题(理工类)

主编 黄先开 曹显兵

权威名家精选配套习题 复习全程使用

全书分三部分，精编精选典型习题，难度适中，数量适当
解答详细精准，循序渐进，提供多种解法

中国人民大学出版社

2008年考研数学最新精选600题(理工类)

▶ 主　编　黄先开　曹显兵
▶ 编　者　黄先开　曹显兵
向子贵　李晋明

正版查询及服务程序

←刮　开　涂　层
←获取20位数字编码
←上　www.1kao.net　注　册
←登录增值服务进免费课堂

2008

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

2008 年考研数学最新精选 600 题（理工类）/黄先开，曹显兵主编
北京：中国人民大学出版社，2007
ISBN 978-7-300-07839-7

Ⅰ. 2…
Ⅱ. ①黄… ②曹…
Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-习题
Ⅳ. O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 008401 号

2008 年考研数学最新精选 600 题（理工类）
主编　黄先开　曹显兵

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.net(中国 1 考网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		
规　　格	210 mm×285 mm　16 开本	**版　　次**	2007 年 3 月第 1 版
印　　张	19.75	**印　　次**	2007 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	590 000	**定　　价**	25.00 元

前言

要想学好数学，必须做一定数量的习题。做习题可以帮助考生正确地理解和牢固地掌握有关的概念、定理、公式与解题方法。只有通过做习题，才能发现自己的问题所在，才能更好地、真正地理解和掌握有关知识与解题方法，才能把书本上的东西转化为自己头脑里的东西。因此，很多经过第一轮复习（主要指对教材的复习）和第二轮复习（主要指有针对性地用考研复习参考书的复习，如《考研数学经典讲义》）后的同学，都会问在哪可找到好的习题做进一步的练习？根据我们考研辅导的体会，在辅导班上也经常有一些很好的典型例题因时间关系而不能讲授，但这些题在复习中又是绝对应该掌握的。因此根据广大考研同学的现实需要，也是为了对我们课堂讲授做一个重要补充，作者在查阅大量相关辅导资料的基础上经过反复比较、筛选和重新编制，最后汇编成这本习题精选，相信能较好地满足广大考生第三轮复习的需要。

研究生入学考试是一种具有选拔性的水平考试，除了考查考生对数学的基本概念、基本理论和基本方法的掌握情况外，更注重考查考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析和解决问题的能力。本书偏重于能力训练，特别适合于有一定基础的考生作为进一步提高之用。需要提醒考生注意的是，在考研数学复习的过程中，个别考生眼高手低，没养成良好的做题习惯，在没有经过深入思考的情况下就匆忙翻看解答，这样是很难取得理想成绩的。特别是本书精选习题涉及知识点多、题型新颖、难度较高、综合性强，往往需要灵活运用所学知识才能作答。因此希望考生在做题时，如果遇到困难，千万不要急于看解答，一定要多思考。要注意，这正是搞清概念、弄清原理、熟悉方法、培养思维能力的重要训练过程。只有这样才能真正全面系统地掌握所学知识，才能真正提高应试水平，才能真正取得好成绩。

值得提出的是，本书作者基础理论扎实，研究水平较高，具有丰富的考研辅导经验，所编选习题代表了考研数学未来命题的趋势，相信本书是一本具有重要参考价值的复习用书。由于成书比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请大家批评指正。

编者

2007年3月于北京

目 录

第一部分

PART ONE 高等数学

第一章

函数、极限与连续

精选习题

一 填空题

设 $f(x)$ 连续，且当 $x \to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x (x^2+1-\cos t)f(t)\mathrm{d}t$ 是与 x^3 等价的无穷小量，则 $f(0)=$ ______.

二 选择题

1. 当 $x \to 0$ 时，下列无穷小量中阶数最高的是(　　).

(A) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$　　(B) $3x^3-4x^4+5x^5$

(C) $e^{x^2}-\cos x$　　(D) $\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有(　　).

(A) $f(-x)>g(-x)$　　(B) $f'(x)<g'(x)$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$　　(D) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$

3. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x^n-3x^{-n}}{x^n+x^{-n}}\sin\frac{1}{x}$，则 $f(x)$ 有(　　).

(A) 两个第一类间断点　　(B) 三个第一类间断点

(C) 两个第一类间断点和一个第二类间断点　　(D) 一个第一类间断点和一个第二类间断点

三 解答题

1. 讨论函数 $f(x)=xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界性.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，以 T 为周期，令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 求证：

(1) $F(x)=kx+\varphi(x)$，其中 k 为某常数，$\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(x)$ 具有连续导数，且满足 $f(x)=x+\int_0^x tf'(x-t)\mathrm{d}t$. 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+x^4}-1}$.

5. 求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}$.

6. 已知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-1$,求:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2\ln\cos x}\int_0^{x^2}e^tf(1+e^{x^2}-e^t)\mathrm{d}t$.

7. 设 $f(x)=nx(1-x)^n(n=1,2,\cdots)$,$M_n$ 是 $f(x)$ 在$[0,1]$上的最大值,求$\lim\limits_{n\to\infty}M_n$.

8. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}$.

9. 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^x-1)^2}{(x-1)^2x^2}$.

10. 设$f(x)$在$x=a$的某邻域内可导,且$f(a)\neq0,a\neq0$,求极限$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{(x-a)f(a)}-\dfrac{1}{\int_a^xf(t)\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{2x-a}\right]$.

11. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导,且 $f(a)\neq0$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x}{f(a)}\right]^n$.

12. 设 $1\leqslant x<+\infty$ 时,$0<f'(x)<\dfrac{1}{x^2}$,且 $f'(x)$ 连续,证明$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 存在.

13. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(x)>0$,$g(x)$ 非负,求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^bg(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

14. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $x\in(a,b)$,证明:$\lim\limits_{s\to0}\dfrac{1}{s}\int_a^x[f(t+s)-f(t)]\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$.

15. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n\dfrac{k}{n^2+k^2+1}$(用定积分求极限).

16. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{2x}|t-x|\sin t\mathrm{d}t}{|x|^3}$.

17. 设 $f(x)$ 是满足$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$ 的连续函数,且当 $x\to0$ 时,$\int_0^xf(t)\mathrm{d}t$ 是与 x^n 同阶的无穷小量,求正整数 n.

18. 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数,且$\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$. 求$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

19. 如图 1—1—1,对指数曲线 $y=e^{\frac{1}{2}x}$,在原点 O 与点 $x(x>0)$ 之间找一点 $\xi=\theta x(0<\theta<1)$,使在这点左、右两边有阴影部分的面积相等,求$\lim\limits_{x\to0}\theta$.

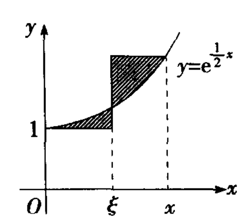

图 1—1—1

20. 求极限$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$.

21. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,$f''(0)\neq0$,
$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^xf(t)\mathrm{d}t}{x^\alpha-\sin x}=\beta(\beta\neq0)$,求 α、β(其中 $\beta\neq0$).

22. 设 $f(x)$ 在$(-a,a)$内连续,在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)\neq0$.

(1) 求证:对任给的 $0<x<a$,存在 $0<\theta<1$,使$\int_0^xf(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$.

(2) 求$\lim\limits_{x\to0^+}\theta$.

23. 已知抛物线 $y=px^2(p>0)$.

(1) 计算抛物线在直线 $y=1$ 下方的弧长 l.

(2) 求$\lim\limits_{p\to\infty}l$.

24. 设 $f(1)=0, f'(1)=a$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})}-\sqrt{1+f(1+\sin^2x)}}{\ln\cos x}$.

25. 设 $g(x)$ 是微分方程 $g'(x)+g(x)\sin x=\cos x$ 满足条件 $g(0)=0$ 的解，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}$.

26. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-1}{x}=a$，

已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^1 g(x^2t)\mathrm{d}t-1}{x^2}, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{a+b\cos x}{x^2}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a,b.

分析

一

应填 $\dfrac{6}{7}$.

解 由等价无穷小的定义及洛必塔法则，可得

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x(1-\cos t)f(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{3x^2}\left[2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+(x^2+1-\cos x)f(x)\right]\\&=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{x^2+1-\cos x}{x^2}f(x)\\&=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}f(x)+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot f(0)\\&=\frac{7}{6}f(0).\end{aligned}$$

所以，$f(0)=\dfrac{6}{7}$.

评注：含参数的变限积分，不能直接求导，必须经变量替换将参变量提至积分号外再求导.

二

1. 应选(D).

解 当 $x\to0$ 时

$$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\sim x^2,$$

$$3x^3-4x^4+5x^5=x^3(3-4x+5x^2)\sim3x^3,$$

$$e^{x^2}-\cos x=e^{x^2}-1+1-\cos x\sim\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2,$$

$\int_0^{1-\cos x}\dfrac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$ 由 $\int_0^u\dfrac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$ 与 $u=1-\cos x$ 复合而成，当 $x\to0$ 时，$\dfrac{\sin x^2}{x}\sim x$，$\int_0^x\dfrac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$ 与 x^2 同阶，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$. 所以，当 $x\to0$ 时，$\int_0^{1-\cos x}\dfrac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$ 是 x 的 $2\times2=4$ 阶无穷小．故选(D).

2. 应选(C).

解 由 $f(x)$、$g(x)$ 可导知，$f(x)$、$g(x)$ 连续. 于是有：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$.

又 $f(x_0)<g(x_0)$，所以有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. 故选(C).

评注：本题也可用排除法．取 $f(x)=x$，$g(x)=x+1$，则 $f(x)<g(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$. 但(A)，(B)，(D) 不成立，故选(C).

3. 应选(C).

解 注意到当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，当 $|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$，易求得

$$f(x)=\begin{cases}-3\sin\dfrac{1}{x}, & 0<|x|<1\\ -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{x}, & |x|=1\\ 2\sin\dfrac{1}{x}, & |x|>1\end{cases},$$

可见，$x=-1$ 和 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点，而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，故选(C).

评注：函数 $f(x)$ 的间断点 x_0 分为两类：$f(x)$ 在 x_0 的左、右极限存在的间断点称为第一类间断点，其中左、右极限相等的间断点称为可去间断点．$f(x)$ 在 x_0 的左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.

三 [illegible]

1. **分析** 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 要证 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，只要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

解 由 $f(-x)=(-x)e^{-x^2}\int_0^{-x}e^{t^2}\,dt$ 及 $\int_0^{-x}e^{t^2}\,dt\xlongequal{t=-u}-\int_0^x e^{u^2}\,du=-\int_0^x e^{t^2}\,dt$ 可知：$f(-x)=f(x)$. 所以，$f(x)$ 是偶函数. 只需证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

又

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{\frac{1}{x}e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2e^{x^2}-\frac{1}{x^2}e^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

于是，对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，存在 $A>0$，当 $x>A$ 时，有

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},$$

即当 $x>A$ 时，有 $0<f(x)<1$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上连续，因此，$f(x)$ 在 $[0,A]$ 上有界，注意到在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\geqslant 0$. 故，$\exists M_1>0$，使得 $\forall x\in[0,A]$，有 $0\leqslant f(x)\leqslant M_1$. 取 $M=\max\{1,M_1\}$，则对 $\forall x\in[0,+\infty)$，有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$. 从而可知，对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$.

评注：

(1) 要判断函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界性，需考察 $f(x)$ 在间断点 x_0 及在无穷远点的极限. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 附近有界，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有界，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有界．若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，又 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

在闭区间上连续函数一定有界，但在开区间上不连续的函数也可能有界．例如：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}, & x>0\\ 1, & x=0.\\ \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x^2}}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}}e^{t^2}\,dt, & x<0\end{cases}$$

因为，$\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\frac{1}{2}$，所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有界.

(2) 在本题的证明中取 $\xi=\frac{1}{2}$（或取其他一个确定的正数）是非常必要的．如果用“$\forall\xi>0,\exists A>0$，当 $x>A$ 时，有 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\xi$”来证明 $f(x)$ 在 $[A,+\infty)$ 上有界就是错误的，因为此时的“界”不确定.

(3) 用变量替换可证明 $f(x)$ 与其原函数 $\int_0^x f(t)\,dt$ 的奇偶性有着密切的联系：

若 $f(x)$ 连续，则

1) $\int_0^x f(t)\,dt$ 为奇（偶）函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 为偶（奇）函数.

2) $\forall a\in\mathbf{R}$，$\int_a^x f(t)\,dt$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.

2. **分析**　只要确定常数 k，使得 $\varphi(x)=F(x)-kx$ 以 T 为周期.

解　(1) 由 $\varphi(x+T)=F(x+T)-k(x+T)$

$$=\int_0^x f(t)\,dt-kx+\int_x^{x+T}f(t)\,dt-kT$$

$$=\varphi(x)+\int_0^T f(t)\,dt-kT\quad\left(\int_x^{x+T}f(t)\,dt=\int_0^T f(t)\,dt\right)$$

令 $k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$，则 $\varphi(x)=F(x)-kx$ 是以 T 为周期的周期函数. 从而有 $F(x)=kx+\varphi(x)$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不一定存在，所以不能用洛必塔法则求该极限．

但 $\int_0^x f(t)\,dt$ 可写成：

$$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\,dt+\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续且以 T 为周期．于是 $\varphi(x)$ 在 $[0,T]$ 上有界，在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，所以，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt+\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt.$$（无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量）

评注：

(1) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则有如下结论：

1) $f(x)$ 的原函数 $\int_a^x f(t)\,dt$ 是以 T 为周期的函数的充分必要条件是 $\int_0^T f(t)\,dt=0$.

2) $\forall a\in\mathbf{R}$，$\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$.

3) $\int_0^{nT}f(x)\,dx=n\int_0^T f(x)\,dx$.

(2) 对“$\frac{0}{0}$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限，当 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大量时，可由洛必塔法则得知

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

但当 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不为无穷大量时，不能断定 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

3. **分析** $f(x)$ 的表达式中含有含参变量积分，应经变量替换将变量移至积分号外再求极限.

$$\int_0^x tf'(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_0^x (x-u)f'(u)\mathrm{d}u$$
$$= x\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf'(u)\mathrm{d}u.$$

将参变量 x 提到积分号外后，已知条件可化为：

$$f(x) = x + x\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf'(u)\mathrm{d}u.$$

解 由已知条件 $f(x) = x + \int_0^x tf'(x-t)\mathrm{d}t$ 可化为

$$f(x) = x + x\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf'(u)\mathrm{d}u.$$

两边对 x 求导得：

$$f'(x) = 1 + \int_0^x f'(u)\mathrm{d}u + xf'(x) - xf'(x)$$
$$= 1 + f(x) - f(0)$$
$$= 1 + f(x) \quad (f(0) = 0).$$

得 $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$. 所以 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x - 1) = -1$.

评注：

(1) 本题的关键是求出 $f(x)$ 的表达式. 当已知条件是由积分方程给出时，通过求导可得出 $f(x)$ 所满足的微分方程：

$$f'(x) - f(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

由通解公式可得通解为：

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\int(-1)\mathrm{d}x}\left[\int 1\cdot \mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right] = c\mathrm{e}^x - 1.$$

由 $f(0) = 0$，得 $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

一般地，一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解为：

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right].$$

(2) 在计算含参变量的积分时，应通过变量替换将参变量提至积分号外，再作计算.

4. **分析** 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x^4} - 1 \sim \dfrac{1}{2}x^4$，$\ln(1+x)\sim x$，$\sin^2 x\sim x^2$.

解 原式 $= 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^4}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{4x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{x^2}\cdot\frac{\sin x}{x}$$
$$= 1.$$

5. **分析** 当 $x\to 0^+$ 时，$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}\to 1$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x - 1\to 0$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^x\left[\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^x - 1\right]}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{x^3}$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left[\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)+1\right]}{x^2}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

评注:洛必塔法则是求"$\frac{0}{0}$"和"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式的重要工具,为了避免复杂的计算,减少错误,在使用该工具之前,应尽可能综合运用四则运算、连续性、恒等变形、等价无穷小替换和变量代换等方法进行简化.

在本题中我们分离出极限为 1 的因子 x^x,使函数中"$\frac{0}{0}$"型未定式部分 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1}{x^3}$ 更为突出,并利用恒等变形简化了后面的计算．否则,如果直接用洛必塔法则,就会很麻烦.

6. **分析**　由已知,$f(1)=0,f'(1)=1$,有 $\lim\limits_{u\to1}\frac{f(u)}{u-1}=1$.

当 $x\to0$ 时,$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]\sim\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$.

令 $1+e^{x^2}-e^t=u$,$\int_0^{x^2}e^tf(1+e^{x^2}-e^t)dt=\int_1^{e^{x^2}}f(u)du$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_1^{e^{x^2}}f(u)du}{x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}=-2\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_1^{e^{x^2}}f(u)du}{x^4}$

$$=-2\lim_{x\to0}\frac{f(e^{x^2})\cdot e^{x^2}\cdot2x}{4x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{f(e^{x^2})}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=-f'(1)$$

$$=-1.$$

评注:在求极限时要注意重要条件的应用.例如:

(1) $f(x_0)=0,f'(x_0)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=A$　($f(x)$ 在 x_0 连续).

(2) 若 $f'(x_0)$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=x_0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[g(x)]-f[h(x)]}{x-x_0}=f'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-h(x)}{x-x_0}.$$

7. **分析**　先求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 M_n,再求极限.

解　$f'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}$.

令　$f'(x)=0$,得 $n^2x(1-x)^{n-1}=n(1-x)^n$,即 $nx=1-x$.得 $x=\frac{1}{n+1}$.

又 $f''\left(\frac{1}{n+1}\right)<0$,所以 $M_n=f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$ 为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的极大值.

比较 $f(0)=0,f(1)=0$ 和 M_n 可知,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $M_n=f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$.

评注:本题的极限是"1^∞"型未定式,其一般形式为 $\lim f(x)^{g(x)}$,其中 $\lim f(x)=1,\lim g(x)=\infty$.为求极限,也可先将幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 化为指数型复合函数 $e^{g(x)\ln f(x)}$,利用等价无穷小量替换定理:

$$\ln f(x)=\ln[1+(f(x)-1)]\sim f(x)-1,$$

可得:

$$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}.$$

于是,将求幂指函数的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 转化为求积函数的极限 $\lim g(x)[f(x)-1]$.

8. **分析** 直接用洛必塔法则将会导致复杂的计算,所以,该题用恒等变形或用台劳公式进行化简.

解 方法一:原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin\dfrac{xe^{2x}+xe^{-2x}}{2}\sin\dfrac{xe^{2x}-xe^{-2x}}{2}}{x^3}$

$$=-2\lim_{x\to0}\frac{x^2(e^{2x}+e^{-2x})(e^{2x}-e^{-2x})}{4x^3}$$

$$=-4.$$

方法二:由台劳公式(麦克劳林公式),当 $x\to0$ 时,有

$$\cos(xe^{2x})=1-\frac{x^2e^{4x}}{2}+o(x^3)$$

$$\cos(xe^{-2x})=1-\frac{x^2e^{-4x}}{2}+o(x^3)$$

于是,原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{x^2e^{4x}}{2}-1+\dfrac{x^2e^{-4x}}{2}+o(x^3)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-4x}-e^{4x}}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{o(x^3)}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to0}(e^{-4x}+e^{4x})$$

$$=-4.$$

评注:

(1) 极限中的函数若具有二阶以上的导函数,可直接用台劳公式进行简化.

(2) 该题也可以用如下方法求解:

当 $u\to0$ 时,$1-\cos u\sim\dfrac{1}{2}u^2$,于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{[1-\cos(xe^{-2x})]-[1-\cos(xe^{2x})]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^2e^{-4x}}{2}-\frac{x^2e^{4x}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^{-4x}-e^{4x}}{x}$$

$$=-4.$$

尽管用这种方法得到了与前面相同的结果,但必须指出,在和、差中用等价无穷小量作代换时,一定要非常谨慎.

若当 $x\to\square$ 时,$\alpha(x)\sim u(x)$,$\beta(x)\sim v(x)$,则只有当 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\neq-1$ 时,才能用 $\lim\limits_{x\to\square}[\alpha(x)+\beta(x)]=\lim\limits_{x\to\square}[u(x)+v(x)]$. 这是因为将 $\alpha(x)+\beta(x)$ 用 $u(x)+v(x)$ 替代后所产生误差之大小只有用台劳公式才能说清楚.

9. **分析** 直接用洛必塔法则将会导致复杂的计算,考虑变量替换,令 $t=x^x-1$,则当 $x\to1$ 时,$t\to0$,且 $x\ln x=\ln(1+t)$,

$$\ln x=\ln[1+(x-1)]\sim x-1,\ln^2x\sim(x-1)^2,$$

$$x^2(x-1)^2\sim x^2\ln^2x=\ln^2(1+t).$$

解 原式 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^2}{\ln^2(1+t)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^2}{t^2}=1.$

评注: 极限在用常见方法(如四则运算,重要极限,等价无穷小量替换等)不能求解时,变量替换是一种行之有效的方法. 在本题中,恰当的变量替换为等价无穷小代替创造了条件,从而该极限的计算便可迎刃

而解.

10. **分析** "$\infty-\infty$"型是分式,一般先通分.

解 原式
$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{f(a)}\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)f(a)}{(x-a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{f(a)}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(x-a)f(x)}$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{f(a)}\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}+f(x)}$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f'(a)}{f(a)+f(a)}$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{f'(a)}{2f^2(a)}.$$

评注:极限$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+(x-a)f(x)}$(用洛必塔法则)$=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{f(x)+f(x)+(x-a)f'(x)}=\frac{f'(a)}{2f(a)}$.

这种解法是错误的.因为这里利用了$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)$.而已知条件不能保证$f'(x)$在点$a$连续.

关于"$\infty-\infty$"型未定式的极限,一般的处理方法为:是分式先通分;是根式先有理化;是整式先提出无穷大因子的最高次幂,分别将其化为"$\frac{0}{0}$"型,或"$\frac{\infty}{\infty}$"型,或"$\infty\cdot 0$"型再计算.

11. **分析** 由

$\lim\limits_{n\to\infty}n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a+\frac{1}{n}-a\right)f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi)=f(a)$ (由积分中值定理,$a<\xi<a+\frac{1}{n}$),

可知,该极限为"1^∞"型极限,化为函数的极限并用洛必塔法则计算.

解 先求函数的极限,
$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\frac{1}{x}\int_a^{a+x}f(t)\mathrm{d}t}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}\int_a^{a+x}f(t)\mathrm{d}t-f(a)}{xf(a)}}$$
$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{f(a)}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_a^{a+x}f(t)\mathrm{d}t-xf(a)}{x^2}}$$
$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{f(a)}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(a+x)-f(a)}{2x}}$$
$$=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{2f(a)}}.$$

令$x=\frac{1}{n}$,$n\to\infty$时,有
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x}{f(a)}\right]^n=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\frac{1}{x}\int_a^{a+x}f(t)\mathrm{d}t}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{2f(a)}}.$$

评注:利用函数极限及洛必塔法则求数列极限的理论依据是:

(1) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$.

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

12. **分析** 要证明$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$存在,只要证$f(n)$单调有界,即证$f(x)$单调有界.由已知条件、定积分的性质和牛顿—莱布尼兹公式便可知$f(x)$单调有界.

证 当 $1 \leqslant x < +\infty$ 时，由 $f'(x) > 0$ 知，$f(x)$ 单调增加，由题设和定积分的性质，可得：

$$0 < \int_1^x f'(t)\mathrm{d}t < \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

由牛顿—莱布尼兹公式得：

$$0 < f(x) - f(1) < -\frac{1}{x} + 1$$

即 $f(1) < f(x) < f(1) + 1$. 所以，数列 $\{f(n)\}$ 单调有界．由单调有界定理知，$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 存在.

评注：关于递推数列的极限，用先验证后求或先求后验证这些传统的方法无疑是正确的，但在单调性和有界性判断方面用传统的方法会遇到困难．此时，应尽可能转化为函数单调性和有界性的判断．这样就可综合运用函数的性质、重要公式和结论来解决极限问题.

13. **分析** 应用函数 $f(x)$ 的性质，将 $\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 进行放缩，然后再由夹逼定理可得要求的极限.

解 由 $f(x) > 0$ 在 $[a,b]$ 上连续，可知存在 m, M，使得 $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$. 于是有

$$\sqrt[n]{m} \leqslant \sqrt[n]{f(x)} \leqslant \sqrt[n]{M}.$$

又 $g(x)$ 非负，所以

$$\sqrt[n]{m}\,g(x) \leqslant g(x)\sqrt[n]{f(x)} \leqslant \sqrt[n]{M}\,g(x),$$

$$\sqrt[n]{m}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt[n]{M}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M} = 1,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

14. **分析** 极限中含有含参变量的积分，应先经变量替换将参数提至积分号外再计算.

证 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可知 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且 $F'(x) = f(x)$.

$$\int_a^x f(t+s)\mathrm{d}t \xlongequal{t+s=u} \int_{a+s}^{x+s} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^{x+s} f(u)\mathrm{d}u - \int_a^{a+s} f(u)\mathrm{d}u = F(x+s) - F(a+s).$$

所以

$$\begin{aligned}
\text{原式左边} &= \lim_{s\to0}\frac{F(x+s)-F(a+s)-F(x)}{s} \\
&= \lim_{s\to0}\left[\frac{F(x+s)-F(x)}{s} - \frac{F(a+s)-F(a)}{s}\right] \\
&= F'(x) - F'(a) \\
&= f(x) - f(a) \\
&= \text{右边}.
\end{aligned}$$

评注：变限积分求导公式的一般形式为：若 $f(x)$ 连续，$a(x)$，$b(x)$ 可导，则

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x).$$

15. **分析** 将 n 项的和转化为积分和，从而可以用定积分计算这种类型的极限.

解 因为

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2+1} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2},$$

又

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2},$$