

21

世纪高等院校教材

复变函数与积分变换

(第二版)

哈尔滨工业大学数学系 组编
盖云英 包革军 编



科学出版社

www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

复变函数与积分变换

(第二版)

哈尔滨工业大学数学系 组编
盖云英 包革军 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是国家工科数学教学基地之一的哈尔滨工业大学数学系根据数学教学改革成果而编写的系列教材之一.经过5年的教学实践,在本书第一版的基础上进行了修订.全书共8章:复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换.每章后配备了一定量的习题,并根据难易程度分为A、B两类.书中有*号部分供读者选用.

本书可作为高等工科院校各专业本科生工程数学课教材,也可供有关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/盖云英,包革军编.—2版.—北京:科学出版社, 2007

21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-018393-4

I. 复… II. ①盖…②包… III. ①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 IV. O174.5 O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第162394号

责任编辑:赵 靖 / 责任校对:刘亚琦

责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2007年2月第 二 版 印张:20 3/4

2007年2月第九次印刷 字数:380 000

印数:29 001—35 000

定价:29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈明辉〉)

科学出版社

高等教育分社

教学支持说明

科学出版社高等教育分社为了对教师的教学提供支持,特对教师免费提供本教材的电子课件,以方便教师教学。

获取电子课件的教师需要填写如下情况的证明,以确保本电子课件仅为任课教师获得,并保证只能用于教学,不得复制传播用于商业用途。否则,科学出版社保留诉诸法律的权利。

地址:北京市东黄城根北街16号,100717

科学出版社 高等教育分社 赵靖(收)

联系方式:010-64015178 010-64034725(传真)

zhaojing@mail.sciencep.com

登陆科学出版社网站:www.sciencep.com“教材天地”栏目可下载本表。

请将本证明签字盖章后,传真或者邮寄到本社,我们确认销售记录后立即赠送。

如果您对本书有任何意见和建议,也欢迎您告诉我们。意见一旦被采纳,我们将赠送书目,教师可以免费选书一本。

证 明

兹证明_____大学_____学院/____系第_____学年☐上
☐下学期开设的课程,采用科学出版社出版的_____
_____(书名/作者)作为上课教材。任课老师为_____
共_____人,学生_____个班共_____人。

任课教师需要与本教材配套的电子课件。

电 话 : _____

传 真 : _____

E-mail : _____

地 址 : _____

邮 编 : _____

学院/系主任: _____(签字)

(学院/系办公室章)

_____年_____月_____日

哈尔滨工业大学数学教学丛书编写委员会

主 任 王 勇

委 员 (按汉语拼音排序)

包革军	董增福	盖云英	高广宏	焦光虹
李道华	尚寿亭	田波平	王希连	吴勃英
谢鸿政	杨凤林	游 宏	张 彪	张池平
张传义	张云飞			

第二版前言

本书第一版自 2001 年 8 月出版以来已经历了 5 个年头. 这期间我系作为国家工科数学教学基地之一, 已于 2004 年 5 月顺利通过教育部专家组的验收. 紧接着就是为迎接教育部对我校本科教学优秀评估进行各项准备工作. 在这种形势下, 我们认为有必要对第一版进行修订. 遵照教育部制定的对本课程教学大纲的基本要求并结合教学实践及对教材改革的研究, 我们对本教材做了如下的修订.

首先对部分超出大纲的内容进行了删减, 如 3.2 节中不加假设的柯西积分定理的证明, 7.7 节相关函数, 7.9 节多维傅氏变换及 8.6 节双边拉普拉斯变换等. 考虑到复变函数与积分变换这两门课程的前后衔接, 在积分变换部分我们做了一些精简. 在复变函数部分, 考虑到学生学习的认识规律, 将 2.3 节解析函数与调和函数移到第 3 章作为 3.4 节的内容, 同时又介绍了柯西积分公式的一个应用——泊松公式. 与此同时, 在各章节补充了新的例题和习题.

在这次修订过程中, 我们广泛征求了学生和任课教师的意见, 对于一些数学用语及符号进行了统一规范. 对书中一些写得不够清楚不太恰当的地方进行了修改. 对于书后习题和答案重新进行了审核, 改正了个别的错误.

本次修订, 第 1, 2, 3, 8 章由盖云英教授执笔, 第 4, 5, 6, 7 章由包革军教授执笔. 陈明浩副教授、邢宇明副教授也参加了部分修订工作. 罗声政教授对本书的修订提出了许多宝贵的意见, 科学出版社、哈尔滨工业大学教务处和数学系对本书的修订提供了热情的帮助, 在此一并表示感谢.

由于编者水平有限, 书中一定还会存在不少缺点和不足, 殷切期望同行及读者批评指教.

编 者

2006 年 8 月于哈尔滨工业大学

第一版前言

培养基础扎实、勇于创新的人才,是大学教育的一个重要目标.随着知识经济时代的到来,这一目标显得更加突出.在工科大学的教育体系中,数学课程是基础课程,在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力等诸方面起着特殊重要的作用.

工程数学中复变函数与积分变换是理工院校学生继工科数学分析课程之后的又一门数学基础课.通过本课程的学习,不仅能学到复变函数与积分变换中的基本理论及工程技术中的常用数学方法,同时还可以巩固和复习工科数学分析的基础知识,为学习有关的后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础.为此我们按照教育部关于课程改革的精神,结合多年从事同名课程的教学实践,并参照原国家教委 1993 年批准印发的工程数学复变函数课程基本要求和工程数学积分变换课程基本要求编写了这本复变函数与积分变换教材.该教材可供高等工科院校的电类及与电类有关的各专业使用,也可供其他专业选用,此外,可作为工程技术人员自学复变函数与积分变换的参考书.

在编写过程中我们力求突出以下几个特点.

1. 将复变函数与积分变换的内容有机地结合在一起,既保证了教学质量的提高,又压缩了教学时数.完成本教材的基本教学内容大约需要 48 学时.

2. 重视对学生能力的培养,注意提高学生的基本素质.对基本概念的介绍尽可能联系实际,突出其物理意义;基本理论的推导深入浅出,循序渐进,适合工科专业的特点;基本方法的阐述富于启发性,使学生能举一反三、融会贯通,以期达到培养学生创新能力的目的.

3. 例题和习题丰富,有利于学生掌握所学内容,提高分析问题解决问题的能力.习题分为 A、B 两类,对 A 类习题读者应该独立完成,而 B 类习题是为那些学有余力的学生而准备的.

4. 为使理论完善,为学生展望新知识留下窗口,我们在编写过程中,适当增加了些超出大纲的内容,这样为进一步拓宽数学知识指出了方向.这在教材中已打了“*”号,可供有关专业选用.

参加本书编写的人员有盖云英(第 1,2,3,8 章),包革军(第 4,5,6,7 章),陈明浩、邢宇明完成了本书的全部习题采集和整理工作.罗声政教授审阅了全书.本书在编写过程中得到哈尔滨工业大学数学系的领导以及科学出版社的大力支持,以

使这本书能尽快与读者见面.在此,一并表示感谢!

由于编者的水平有限,书中的缺点和疏漏在所难免,恳请专家、同行和广大读者批评指正.

编 者

2001 年 4 月于哈尔滨工业大学

目 录

第 1 章 复数与复变函数	1
1.1 复数及其四则运算	1
1.2 复数的几何表示	2
1.3 共轭复数	5
1.4 乘方与开方	8
1.5 复球面与无穷远点.....	13
1.6 复平面上的点集.....	14
1.7 复变函数.....	17
习题 1	23
第 2 章 解析函数	26
2.1 解析函数的概念.....	26
2.2 函数解析的充要条件.....	29
2.3 初等函数.....	34
*2.4 解析函数的物理意义	44
习题 2	50
第 3 章 复变函数的积分	53
3.1 复变函数积分的概念.....	53
3.2 柯西积分定理.....	57
3.3 柯西积分公式.....	63
3.4 解析函数与调和函数.....	72
习题 3	79
第 4 章 级数	82
4.1 复数项级数与复变函数项级数.....	82
4.2 幂级数.....	90
4.3 泰勒级数	100
4.4 洛朗级数	106
习题 4	113
第 5 章 留数	116
5.1 孤立奇点	116

5.2 留数	123
5.3 留数在定积分计算中的应用	131
* 5.4 辐角原理与儒歇定理	138
习题 5	144
第 6 章 保形映射	147
6.1 保形映射的概念	147
6.2 分式线性映射	150
6.3 分式线性映射的性质	154
6.4 两个重要的分式线性映射	159
6.5 几个初等函数所构成的映射	162
* 6.6 黎曼存在定理与边界对应	173
* 6.7 施瓦茨-克里斯托费尔公式	174
习题 6	183
第 7 章 傅里叶变换	186
7.1 傅里叶积分与傅里叶积分定理	186
7.2 傅氏变换与傅氏逆变换	193
7.3 单位脉冲函数	198
7.4 广义傅氏变换	204
7.5 傅氏变换的性质	207
7.6 卷积	216
* 7.7 傅氏变换的应用	227
习题 7	232
第 8 章 拉普拉斯变换	237
8.1 拉普拉斯变换的概念	237
8.2 拉普拉斯变换的几个基本性质	247
8.3 拉普拉斯逆变换, 反演公式	263
8.4 拉普拉斯变换的应用	270
习题 8	279
习题答案	285
习题 1	285
习题 2	287
习题 3	288
习题 4	289
习题 5	291

习题 6	292
习题 7	293
习题 8	295
参考文献	299
附录	300
附录 A 傅氏变换简表	300
附录 B 拉氏变换简表	308
索引	317

第 1 章 复数与复变函数

在这一章里,我们先介绍一下复数系统的代数和几何结构,然后引进复变量的函数——复变函数,进而介绍它的极限和连续性.

1.1 复数及其四则运算

1. 复数的概念

在高中代数中已经讲述过复数. 为了便于以后讨论,我们把有关复数的基本定义及结论,在这里回顾一下.

设 x, y 为两实数, 则

$$z = x + iy \quad (\text{或 } x + yi)$$

表示复数, 这里 i 为虚单位, 具有性质 $i^2 = -1$. x 及 y 分别叫做 z 的实部与虚部, 常记为

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

虚部为零的复数为实数, 即 $x + i0 = x$. 因此, 全体实数是全体复数的一部分. 特别地, $0 + i0 = 0$, 即, 当且仅当 z 的实部和虚部同时为零时复数 z 为零.

实部为零且虚部不为零的复数称为纯虚数.

如果两复数的实部和虚部分别相等, 则称两复数相等.

2. 四则运算

复数的四则(加、减、乘、除)运算, 可以按照多项式的四则运算进行, 只要注意将 i^2 换成 -1 . 设

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

则

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1.1.1)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (1.1.2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad (1.1.3)$$

如果 $z_2 \neq 0$, 则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (1.1.4)$$

从(1.1.1)~(1.1.4)式即知复数经过四则运算得到的仍旧是复数. 又从(1.1.1)、(1.1.2)式以及实部与虚部的定义得出

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{Re}z_1 \pm \operatorname{Re}z_2 \\ \operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{Im}z_1 \pm \operatorname{Im}z_2 \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

例 1.1.1 化简 $i^3, i^4, \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$.

解

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \\ \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i} &= \frac{i^2 + (1-i)^2}{(1-i)i} = \frac{-1-2i}{1+i} \\ &= \frac{(-1-2i)(1-i)}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

例 1.1.2 计算

$$(1) \frac{2+3i}{2-3i}, \quad (2) \frac{2i}{\sqrt{3}-i} - \frac{3}{\sqrt{3}i-1}.$$

$$\text{解} \quad (1) \quad \frac{2+3i}{2-3i} = \frac{(2+3i)^2}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{4+12i-9}{4+9} = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$$

$$(2) \quad \frac{2i}{\sqrt{3}-i} - \frac{3}{\sqrt{3}i-1} = \frac{2i}{\sqrt{3}-i} - \frac{3}{i(\sqrt{3}+i)} = \frac{2i}{\sqrt{3}-i} + \frac{3i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4}i$$

例 1.1.3 已知 $x+yi = (2x-1) + y^2i$, 求 $z = x+iy$.

解

$$\begin{aligned} x &= 2x-1, & x &= 1 \\ y &= y^2, & y &= 0 \quad \text{或} \quad y = 1 \end{aligned}$$

由此

$$z = 1 \quad \text{或} \quad z = 1+i$$

1.2 复数的几何表示

1. 用平面上的点和向量表示复数

复数 $z = x + iy$, 由实部 x 与虚部 y 唯一确定, 这也就是说由一对有序实数 (x, y) 唯一确定. 而有序实数对 (x, y) 又与平面直角坐标系中的点 $P(x, y)$ 一一对应, 于是可用平面直角坐标系中的点来表示复数.

每一点 (x, y) 表示一个复数 $z = x + iy$ 的直角坐标平面称为复平面. 由于 x 轴上的点对应实数, y 轴上的点对应纯虚数, 故称 x 轴为实轴, 称 y 轴为虚轴. 由

于复数与复平面上的点是一一对应的,以后把“点 z ”和“复数 z ”作为同义词而不再区别.

在复平面上,如图 1.2.1 所示,从原点 O 到点 $P(x, y)$ 引向量 $\vec{OP}$. 我们看到 $\vec{OP}$ 与这个复数 z 也构成一一对应关系(复数 0 对应着零向量),因此也可以用向量 $\vec{OP}$ 来表示复数 $z = x + iy$,其中 x, y 顺次等于 $\vec{OP}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量.今后把“复数 z ”与其对应的“向量 z ”也视为同义词.

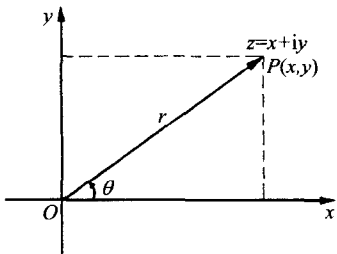


图 1.2.1

在物理学中,如力、速度、加速度等都可用向量表示,说明复数可以用来表示实有的物理量.

2. 模与辐角

向量 $\vec{OP}$ 的长度 r 叫做复数 z 的模或绝对值,记作 $|z|$,即 $|z| = r$. 实轴正向转到与向量 $\vec{OP}$ 方向一致时,所成的角度 θ 叫做复数的辐角,记作 $\text{Arg}z$,即 $\text{Arg}z = \theta$.

复数 0 的模为零,即 $|0| = 0$,其辐角是不确定的.任何不为零的复数 z 的辐角 $\text{Arg}z$ 均有无穷多个值,彼此之间相差 2π 的整数倍.通常把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的辐角值 θ_0 称为 $\text{Arg}z$ 的主值,记为 $\arg z$,于是

$$\text{Arg}z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

由直角坐标与极坐标的关系(图 1.2.1),我们立即得到不为零的复数的实部、虚部与该复数的模、辐角之间的关系

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \tan(\text{Arg}z) = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

以及

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad (1.2.2)$$

于是复数 z 又可表示为

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (1.2.3)$$

(1.2.3)式通常称为复数 z 的三角表示式.如果再利用欧拉(Euler)公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

我们又可以得到

$$z = re^{i\theta} \quad (1.2.4)$$

这种形式称为复数的指数表示式.

在1.1节中已经指出:两复数的实部与虚部分别相等,则称两复数相等.于是从(1.2.1)式与(1.2.2)式即知两复数相等,其模必定相等,其辐角可以差 2π 的整数倍(辐角如果都取主值,则应相等).反之,如果复数的绝对值及辐角分别相等,则从(1.2.3)式即知这两个复数必然相等.

复数用向量表示,即有大小,又有方向,所以两个复数,如果不都是实数,就无法比较大小.但是,两个复数的模都是实数,就可以比较大小.

从图1.2.1可以看出

$$-r \leq x, \quad y \leq r$$

即

$$-|z| \leq \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} z \leq |z| \quad (1.2.5)$$

例1.2.1 求下列各复数的模及辐角.

(1) i , (2) -1 , (3) $-i$, (4) $1+i$.

解 由 z 平面上的对应点的位置,可以看出

$$(1) |i| = 1, \quad \arg i = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$(2) |-1| = 1, \quad \arg(-1) = \pi, \quad \operatorname{Arg}(-1) = \pi + 2k\pi.$$

$$(3) |-i| = 1, \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$(4) |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

例1.2.2 将复数 $z=1-\sqrt{3}i$ 分别化为三角表示式和指数表示式.

解 因为 $x=1, y=-\sqrt{3}$,所以

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

又 z 在第四象限内,于是

$$\theta = \arg z = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$$

所以

$$z = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$$

由于辐角的多值性,亦可表为

$$z = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \right]$$

指数表示式为

$$z = 2e^{-\frac{\pi}{3}i+2k\pi i}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3. 加法与减法

以 $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$ 为两邻边作一平行四边形 Oz_1zz_2 , 通过图 1.2.2 可以说明, 复数的加法、减法法则与向量的加法、减法法则一致.

通过两向量的和与差的几何作图法, 在复平面中可以求出相应两复数的和 $z_1 + z_2$ 与差 $z_1 - z_2$ 的对应点.

在图 1.2.3 中, 以向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 、 $\overrightarrow{Oz_2}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线向量 $\overrightarrow{Oz}$ 及 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 就分别对应于复数 $z_1 + z_2$ 及 $z_1 - z_2$. 由于 $\overrightarrow{Oz}$ 的起点为原点 O , 因而终点 z 所对应的复数就是 $z_1 + z_2$; 而向量 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 的起点不是原点, 经平移得起点为原点 O 的向量 $\overrightarrow{OS}$, 则终点 S 所对应的复数就是 $z_1 - z_2$.

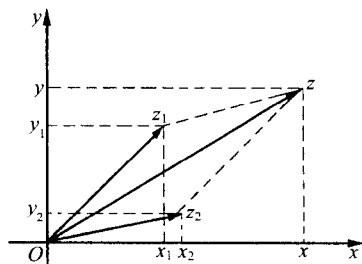


图 1.2.2

从图 1.2.3 还可以看到: $|z_1 - z_2|$ 表示复平面上两点 z_1 与 z_2 之间的距离. 事实上, 有

$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
这正是平面上两点距离的表达式.

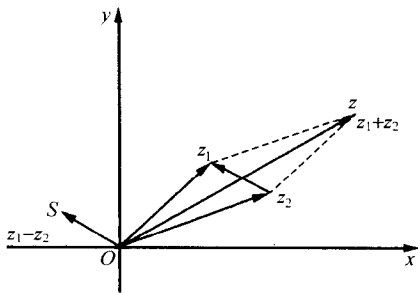


图 1.2.3

1.3 共轭复数

1. 定义及性质

实部相等、虚部互为相反数的两个复数叫做**共轭复数**. 如果其中一个复数记为 z , 则其共轭复数记为 $\bar{z}$. 于是

$$x - iy = \overline{x + iy}$$

由定义,显然 $\bar{\bar{z}} = z$. 特别地,实数的共轭复数是该实数本身;反之,如果复数 z 与它的共轭复数 $\bar{z}$ 相等,则这个复数便是一个实数.

由定义不难验证,两复数的和、差、积、商的共轭复数,分别等于这两复数的共轭复数的和、差、积、商,即

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \quad (1.3.1)$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (1.3.2)$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0) \quad (1.3.3)$$

我们还可以用共轭复数来表示复数的实部与虚部以及模. 如

$$2\operatorname{Re} z = z + \bar{z}$$

$$2i\operatorname{Im} z = z - \bar{z}$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

2. 三角不等式

利用共轭复数的性质,我们能够比较容易地证明两个重要的不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (1.3.4)$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (1.3.5)$$

事实上,从共轭复数的性质,我们有

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + \overline{z_1 z_2} + z_1 \bar{z}_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

由此即可得不等式(1.3.4). 如将上式中 z_2 换成 $-z_2$, 则有

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\geq |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2 \end{aligned}$$

由此即可推出不等式(1.3.5).

当然在图 1.2.3 中利用三角形三边关系也可证明不等式(1.3.4)及(1.3.5).

例 1.3.1 A, C 为实数, $A \neq 0, \beta$ 为复数且 $|\beta|^2 > AC$, 证明 z 平面上的圆周可以写成

$$Az\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + C = 0$$

证 在平面解析几何中,已知任意一圆的方程可写作